ФРАНТІШЕК
ЛАТКА

František Latka

MINILEXIKÓN matematiky

ALFA
VYDAVATEL'STVO TECHNICKEJ
A EKONOMICKEJ LITERATURY
BRATISLAVA
1971

Франтішек Латка

Математичний мінілексикон

Переклали зі словацької
М. І. Панів, І.-П. П. Сироїд

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО «СВІТ»
1990

ББК 22.1+22.161
Л27
УДК 50

Справочник содержит сведения по элементарно математике и основам математического анализа, а так же начала алгебры и математической логики. Материал подобран и изложен таким образом, чтобы им мо воспользоваться широкий круг читателей.

Для учеников старших классов, профтехучилищ абитуриентов, слушателей подготовительных отделени вузов.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Є. М. Парасюк (Львів. держ. ун-т)

Редакція науково-технічної і природничої літератур
Редактор Л. І. Сідлович

Латка Ф.

Л27 Математичний мінілексикон : Переклад з словацької. — Львів : Світ. 1990. — 104 с.: іл
ISBN 5—11—000891—4.

Довідник містить відомості з елементарної матем тики та основ математичного аналізу, а також початк алгебри та математичної логіки. Матеріал підібрано т викладено таким чином, щоб ним могло користувати широке коло читачів.

Для учнів старших класів, профтехучилищ, абіт рієнтів, слухачів підготовчих відділень вузів.

Л $\frac{4802000000-009}{M225(04)-90}$ БЗ 34—18—89 ББК22.1+22.1

ISBN 5—11—000891—4

ВІД ПЕРЕКЛАДАЧІВ

Книжка словацького автора Франтішека Латки «Математичний мінілексикон» вперше побачила світ у 1971 р. З того часу на батьківщині автора вона витримала дванадцять видань загальним тиражем понад 600 тис. примірників. Крім того, великими тиражами книжка перевидавалася в Угорщині, Болгарії, Німецькій Демократичній Республіці.

Пропонований читачам український переклад «Математичного мінілексикону» є першим виданням цієї книги в Україні.

Довідник укладено так, що математичні правила і формули зрозумілі навіть без додаткових пояснень. Лише в окремих випадках як зразок наводяться приклади.

Якщо у процесі перекладу книги виникала необхідність дати пояснення чи уточнення для українського читача, автори перекладу робили відповідні примітки з позначкою *Прим. перекл.* В окремих випадках перекладачі заміняли той чи інший символ, щоб адаптувати формулу до прийнятих у вітчизняній літературі правил. У цілому ж переклад здійснено практично без відхилень від авторського тексту.

Довідник допоможе читачам активно засвоювати елементарні основи математики — починаючи з чисел і закінчуючи елементами векторного і матричного числення, похідними та інтегралами. Він містить також певні відомості з теорії множин і математичної логіки. При цьому основна увага приділяється не стільки строгому визначенню математичних понять, скільки простим прийомам їх використання. Автор ніби пропонує читачеві: «Роби так, як я, і ти навчишся користуватися правилами і законами математики».

Перекладачі сподіваються, що довідник Франтішека Латки українською мовою знайде свого зацікавленого і вдячного читача.

1. СИСТЕМА ЧИСЕЛ

Десяткова (арабська) система

10 основних чисел: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Величини чисел, що йдуть одна за одною, знаходяться у співвідношенні 1 : 10

1 десятка	= 10 одиниць	$10=10^1$
1 сотня	= 10 десятків	$100=10^2$
1 тисяча	= 10 сотень	$1000=10^3$
⋮	⋮	
1 мільйон	= 1 000 000	10^6
1 мільярд	= 1 000 000 000	10^9
1 більйон	= мільйон до другого степеня	10^{12}
1 трильйон	= мільйон до третього степеня	10^{18}
1 квадрільйон	= мільйон до четвертого степеня	10^{24}
1 квінтільйон	= мільйон до п'ятого степеня	10^{30}

і т. д.

Двійкова (бінарна) система

2 основні цифри: 0 1
Множники локальних величин: степені з основою 2 (число розкладається на суму послідовних степенів двійки).

Наприклад, $38=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+$ $+0\cdot 2^0=32+0+0+4+2+0=38.$

Запис $38_{\text{десяткове}}=100110_{\text{двійкове}}.$

Запис $11010=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=16+$ $+8+0+2+0=26.$

(Для порівняння з десятковою системою:
$63\,025=6\cdot 10^4+3\cdot 10^3+0\cdot 10^2+2\cdot 10^1+5\cdot 10^0$).

Арифметичні дії у двійковій системі мають особливі правила:

$0+0=0$	$0\cdot 0=0$	$1\cdot 0=0$
$0+1=1+0=1$	$0\cdot 1=0$	$1\cdot 1=1.$
$1+1=10$		

Римська система

7 основних цифр: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000

Приклади:

IV= 4	XL= 40	CD= 400
IX= 9	LXXX= 80	DC= 600
XIV=14	XC= 90	CM= 900
XVIII = 18	CII=102	MI=1001
XIX=19	CCC=300	MCMLXIX=1969

2. РІЗНОВИДИ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ

1-й сту-пінь	Додавання	2 + 7 (доданки)	=	9 (сума)
	Віднімання	8 — 3 (зменшуване, від'ємник)	=	5 (різниця)
2-й сту-пінь	Множення	4 · 7 (множники)	=	28 (добуток)
	Ділення	18 : 6 (ділене, дільник)	=	3 (частка)
3-й сту-пінь	Піднесення до степеня	показник 5^3 основа степеня	=	125 величина степеня
	Добування кореня	показник кореня $\sqrt[3]{125}$ підкореневе число	=	5 величина кореня

3. КЛАСИФІКАЦІЯ ЧИСЕЛ

Цілі числа
натуральні 3; 5 — нуль 0 — від'ємні —4; —7

Раціональні числа
3; —6; 2/5; —0,7

Ірраціональні числа
$\sqrt{3}$; π; —log 5

Дійсні числа
4; —0,5; π; —log 7

Уявні числа *
$3i$; $-\sqrt{2}i$; $-8i$; $4i$

Комплексні числа
$3+2i$, $a+bi$; $-4+\sqrt{2}i$; $-\sqrt{3}i$

Дроби — дістаємо при діленні цілих чисел (знаменник не дорівнює нулю)	$3:5=\frac{3}{5}=3/5=0{,}6$
Ірраціональні числа — дістаємо при добуванні кореня і логарифмуванні окремих невід'ємних чисел	$x=\sqrt[3]{5}$, log 5
Уявні числа — для уявної одиниці i має місце $i^2=-1$	$\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$

* Зауважимо, що уявні числа є підмножиною множини комплексних чисел. — *Прим. перекл.*

Натуральне число ділиться на:

2 — якщо це число парне: 6, 200, 1278, 31432;
4 — якщо останні дві цифри діляться на 4: 2216, 3008, 7300;
8 — якщо останні три цифри діляться на 8: 3104, 15 064, 45 000;
3 — якщо сума цифр ділиться на 3: 4041 (сума 9), 19002 (сума 12);
9 — якщо сума цифр ділиться на 9: 8037 (сума 18), 141 021 (сума 9);
6 — якщо число одночасно ділиться на 2 і на 3: 323 112 (сума 12); 24 (сума 6);
5 — якщо на останньому місці цифра 5 або 0: 1265, 330, 14 775;
10 — якщо на останньому місці цифра 0: 60, 5130, 72 700;
25 — якщо останні дві цифри діляться на 25: 300, 225, 70 075;
100 — якщо останні дві цифри нулі: 1200, 236 300, 500.

5. ЗАОКРУГЛЕННЯ ЧИСЕЛ

6, 7, 8, 9 — заокруглюємо вверх: $5{,}7\approx 6$, $26{,}28\approx 26{,}3$, $136\approx 140$;
1, 2, 3, 4 — заокруглюємо вниз: $5{,}4\approx 5$, $26{,}21\approx 26{,}2$, $14\approx 10$;
5 — заокруглюємо на парне число: якщо цифра перед п'ятіркою парна — заокруглюємо вниз, якщо непарна — заокруглюємо вверх: $26{,}65\approx 26{,}6$, $38{,}35\approx 38{,}4$.

На практиці, як правило, 5 заокруглюємо вверх.

$7\approx 10$	$16\,915\approx 20\,000$	$47{,}451\approx 47\,000$
$814\approx 800$	$47\,451\approx 47\,450$	$47\,451\approx 50\,000$
$5307\approx 5000$	$47\,451\approx 47\,500$	$45\,000\approx 40\,000$

$$8{,}2734\approx 8{,}273\approx 8{,}27 \qquad 6{,}3149\approx 6{,}315\approx 6{,}32$$

6. ОСНОВНІ АРИФМЕТИЧНІ ЗАКОНИ

Комутативний закон (переставність)

$$3+7=7+3 \qquad a+b=b+a$$
$$4\cdot 6=6\cdot 4 \qquad a\cdot b=b\cdot a.$$

Асоціативний закон (сполучність)

$$(2+3)+4=2+(3+4) \qquad (a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(2\cdot 3)4=2(3\cdot 4) \qquad (a\cdot b)c=a(b\cdot c).$$

Дистрибутивний закон (множення на суму)

$$2(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4 \qquad a(b+c)=ab+ac.$$

7. ЧОТИРИ ОСНОВНІ АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ З ЦИФРОЮ 0

Додавання і віднімання

$$4+0=0+4=4 \qquad a+0=0+a=a$$
$$5-0=5 \qquad a-0=a$$
$$0-3=-3 \qquad 0-a=-a$$
$$0+0=0 \qquad 0-0=0.$$

Множення

$3\cdot0=0\cdot3=0 \qquad a\cdot0=0\cdot a=0$

$0\cdot0=0.$

Ділення $\qquad 0:a=0$, де $a\neq0$

$0:3=0$

$\left.\begin{matrix}3:0\\ a:0\end{matrix}\right\}$ Ділення ненульового числа на нуль не визначається, тому що воно не має жодного значення (далі в тексті знаменник простих прикладів буде вважатися відмінним від нуля).

8. ПРАВИЛА ПРО ЗНАКИ

Винесення за дужки спільного множника

$5x+3x=(5+3)x \qquad \pm ax\pm bx=\pm(a+b)x$

$5x-3x=(5-3)x \qquad \pm ax\mp bx=\pm(a-b)x$

Розкриття дужок

$4+(2+3-5)=$
$=4+2+3-5$

$a+(b+c-d)=$
$=a+b+c-d$

$4-(2+3-5)=$
$=4-2-3+5$

$a-(b+c-d)=$
$=a-b-c+d$

Множення

$(+4)\cdot(+2)=$
$=(-4)(-2)=$
$=+(4\cdot2)$

$(+a)(+b)=$
$=(-a)\cdot(-b)=$
$=+ab$

$(+4)\cdot(-2)=$
$=(-4)(+2)=$
$=-(4\cdot2)$

$(+a)(-b)=$
$=(-a)\cdot(+b)=$
$=-ab$

$\boxed{\begin{matrix}+\cdot+=+\\ -\cdot-=+\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}+\cdot-=-\\ -\cdot+=-\end{matrix}}$

Ділення

$$\frac{+4}{+2}=\frac{-4}{-2}=+\frac{4}{2} \qquad \frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$$

$$\frac{-4}{+2}=\frac{+4}{-2}=-\frac{4}{2} \qquad \frac{-a}{+b}=\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

$\boxed{\begin{matrix}+:+=+\\ -:-=+\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}+:-\\ -:+=-\end{matrix}}$

Нерівності

Якщо $a>b$, напр.: $a=4$, $b=2$, $c=3$, $d=-3$, то має місце:

$b<a; \qquad a\pm c>b\pm c; \qquad -a<-b$

$2<4: \qquad 4\pm3>2\pm3; \qquad -4<-2$

для $\quad c>0: \qquad ac>bc; \qquad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

$3>0: \qquad 4\cdot3>2\cdot3; \qquad \frac{4}{3}>\frac{2}{3}.$

Примітка. Якщо $a<b$, то знак нерівності $>$ міняється у всіх прикладах на $<$.

для $d<0$: $ad<bd$; $\frac{a}{d}<\frac{b}{d}$

$-3<0$: $4\cdot(-3)<2\cdot(-3)$ $\frac{4}{-3}<\frac{2}{-3}$.

Якщо $ab>0$: $(a>b)$, то має місце: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Якщо $a>b>1$, а $n>0$, то тоді має місце: $a^n>b^n$.

Абсолютна величина — позначення $|a|$

при $a\geqslant 0$ приймемо

$|a|=+a$

$|4|=+4$

при $a<0$ приймемо

$|a|=-a$

$|-4|=+4$

$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ $|ab|=|a|\cdot|b|$

$|4\pm 2|\leqslant|4|+|2|$ $|4\cdot 2|=|4|\cdot|2|$

$|a\pm b|\geqslant|a|-|b|$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

$|4\pm 2|\geqslant|4|-|2|$ $\left|\frac{4}{2}\right|=\frac{|4|}{|2|}$.

9. ДРОБИ

Основне правило: Величина дробу не змінюється, коли множимо (ділимо) чисельник і знаменник на те саме число, відмінне від нуля.

Розширення дробів

$\frac{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 3}$; $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$;

$\frac{4}{2}\pm 3=\frac{4\pm 2\cdot 3}{2}$ $\frac{a}{b}\pm c=\frac{a\pm b\cdot c}{b}$.

Спрощення (скорочення) дробів

$\frac{4}{2}=\frac{4:2}{2:2}=\frac{2}{1}$; $\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}$; $\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$.

$\frac{12}{6}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{4}{2}$

Додавання дробів

$\frac{4}{3}\pm\frac{2}{3}=\frac{4\pm 2}{3}$ $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$

$\frac{4}{3}\pm\frac{2+5}{3}=\frac{1}{3}(4\pm 2\pm 5)$ $\frac{a}{c}\pm\frac{b+d}{c}=\frac{1}{c}(a\pm b\pm d)$

$\frac{4}{2}\pm\frac{3}{5}=\frac{4\cdot 5\pm 2\cdot 3}{2\cdot 5}$ $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

Множення дробів

$\frac{4}{2}\cdot 3=\frac{4\cdot 3}{2}$; $\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 5}$ $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Ділення дробів

$\frac{4}{2}:3=\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{2\cdot 3}$ $\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{bc}$

$$\frac{4}{2}:\frac{3}{5}=\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4\cdot 5}{2\cdot 3} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{4\cdot 5}{2\cdot 3} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-b^2}{ab}:\frac{a-b}{ab}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{a-b}=\frac{(a^2-b^2)\,ab}{ab\,(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=a+b,$$

або простіше: обчислюємо чисельник і знаменни з допомогою множення на одне й те ж ненульо число

$$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot ab}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\cdot ab}=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b; \quad (a\neq b).$$

10. ДІЇ З МНОГОЧЛЕНАМИ

Додавання і віднімання

$$4-3+\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}=4$$

$$3{,}5+4{,}2-2{,}7+2=7$$

$$2a+(3a-4b)-(4a+2b)=2a+3a-4b-4a-2b=a-6b$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{13}{15} \qquad \frac{2a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{2ad+bc}{bd}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 3-1\cdot 4+5\cdot 2}{12}=\frac{15}{12}=1\frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{4a}-\frac{2y}{b}=\frac{x\cdot b}{4a\cdot b}-\frac{2y\cdot 4a}{b\cdot 4a}=\frac{xb-8ay}{4ab}.$$

Множення

$$(3+4-2)2=6+8-4=10 \qquad (3a-3b+c)2d=6ad-6bd+2cd$$

$$\begin{array}{r} 246\times 28 \\ \hline 492 \\ 1968 \\ \hline 6888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4x^2+3x-2)(x^2-2x+3)= \\ \hline =4x^4+3x^3-2x^2 \\ -8x^3-6x^2+4x \\ 12x^2+9x-6 \\ \hline =4x^4-5x^3+4x^2+13x-6. \end{array}$$

Ділення

$$\begin{array}{r} -2850:38=75 \\ 266 \\ \hline -190 \\ 190 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^3+2x^2+2x+1)\,(x^2+x+1)= \\ =x+1)-(x^3+x^2+x) \\ \hline x^2+x+1 \\ -(x^2+x+1) \\ \hline 0. \end{array}$$

11. ПРОПОРЦІЇ (потрійні правила)

$$3:4=21:28 \qquad \frac{3}{4}=\frac{21}{28} \qquad 3\cdot 28=4\cdot 21.$$

Добуток зовнішніх членів дорівнює добутку внутрішніх членів.

При $a:b=c:d$ або $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ має місце: $ad=b$

оскільки

$$\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d};\quad \frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Пряма пропорція	Обернена пропорція
14 книг коштує 168 крб. 5 книг коштує x крб.	15 робітників виконають роботу за 8 днів 4 робітники виконають роботу за x днів
$x:168=5:14$	$x:8=15:4$
$x=\frac{168\cdot 5}{14}=60$ крб.	$x=\frac{8\cdot 15}{4}=30$ днів.

12. ЧИСЛЕННЯ ПРОЦЕНТІВ

Три головні задачі числення процентів:

1. Знаходження процентної частини $\check{c}$

$$\check{c}=\frac{\text{основа}}{100}\cdot p.$$

Існуючу продуктивність 120 штук необхідно підвищити на 5%. На скільки штук треба виготовити більше?

$$\check{c}=\frac{120}{100}\cdot 5=6 \text{ штук}$$

2. Знаходження основи (зі зменшеної або збільшеної основи)

$$z=\frac{\check{c}}{p}\cdot 100.$$

$$z=\frac{\text{основа (зменш., збільш.)}}{100\mp p}\cdot 100.$$

Маса готової продукції 300 кг, а втрати в матеріалах становили 20%. Скільки було використано матеріалів?

$$z=\frac{300}{80}\cdot 100=375 \text{ кг.}$$

Скільки важила готова продукція, якщо при 20%-ній втраті матеріалів оброблено 600 кг?

$$z=\frac{600}{120}100=500 \text{ кг.}$$

3. Обчислення процентів

$$1\% \text{ (зі ста)}=\frac{1}{100} \text{ основи}$$

$$p\% \text{ (зі ста)}=\frac{p}{100} \text{ основи}$$

$$p\,\%\ (\text{на сто}) = \frac{100\cdot p}{100+p}\ [\%\ \text{зі ста}]$$

$$p\%\ (\text{у сто}) = \frac{100\cdot p}{100-p}\ [\%\ \text{зі ста}].$$

Оптова ціна складається з виробничої ціни плю 20% надбавки. Надбавка, таким чином, є або 20% на 100% виробничої ціни, або, якщо беремо за о нову оптову ціну, то

$$\frac{100\cdot 20}{100+20}[\%] = 16{,}6\ \%\ \text{зі}\ 100\ \%\ \text{оптової ціни.}$$

При певному виробництві втрати від загальн кількості сировини дорівнюють 23%. Якщо ж втрати розглядати у співвідношенні до готової пр дукції, то тоді втраті 23% в сотні відповідає втр та x% зі ста, тобто

$$\frac{100\cdot 23}{100-23}[\%] = 29{,}9\ \%\ \text{зі ста.}$$

13. СЕРЕДНЄ

Середні для $a=4$, $b=7\,(a>0,\ b>0)$. Середні д n членів $a_1, \ldots, a_n$.

Середнє арифметичне $a_1, \ldots, a_n$ — дійсні чи

$$m_a = \frac{4+7}{2} = 5{,}5; \qquad m_a = \frac{a+b}{2}$$

$$m_a = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

Середнє геометричне $a_1, \ldots, a_n$ — невід'ємні числа

$$m_g = \sqrt{4\cdot 7} = 5{,}3; \qquad m_g = \sqrt{ab}$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

Гармонійне середнє $a_1, \ldots, a_n$ — додатні числа

$$m_h = \frac{2\cdot 4\cdot 7}{4+7} = 5{,}09; \qquad m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$m_h = \frac{2ab}{a+b} \qquad \frac{1}{m_h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

Середнє квадратичне $a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа

$$m_k = +\sqrt{\frac{1}{2}(4^2+7^2)} = 5{,}7 \qquad m_k = +\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

$$m_k = +\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$$

має місце: $m_k \geqslant m_a \geqslant m_g \geqslant m_h$

14. СТЕПЕНІ

a, b — дійсні числа; n, p — натуральні числа

$a^3 = a\cdot a\cdot a$ $\qquad$ $a^n = a\cdot a\cdot a\ldots\cdot a$ (n множників a)

$(-a)^4 = a^4$; $\qquad$ $(-a)^{2n} = +a^{3n}$;

$(-a)^3 = -a^3 \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5 \qquad a^n \cdot a^p = a^{n+p}$

$\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4; \ \frac{a^3}{a^3} = a^0 = 1 \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}; \quad a \neq 0$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n;$

$\frac{1}{a^{-2}} = a^2 \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^n; \quad a \neq 0$

$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \qquad (a^n)^p = a^{np}$

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}; \ a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}; \ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \ a$

$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}; \ a > 0$

$4^3 \cdot a^3 = (4a)^3 \qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$(5ax)^3 = 5^3 \cdot a^3 \cdot x^3 \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n$

$\frac{3^4}{4^4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \ b \neq 0$

$4^0 = 1; \ 5^1 = 5; \ 0^{10} = 0 \qquad a^0 = 1; \ a^1 = a; \ 0^n = 0$

Приклади:

$a^2 : a^5 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \ a \neq 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-k} = \left(\frac{y}{x}\right)^k = \frac{y^k}{x^k}; \ xy$

$\frac{a^2}{b^3} = a^2 \cdot \frac{1}{b^3} = a^2 \cdot b^{-3} \qquad \frac{a^n}{b^m} = a^n \cdot b^{-m}; \ b \neq 0$

$3ab^{-2}c^{-3} = 3a \cdot \frac{1}{b^2} \times \qquad a^3 : a^{-5} = a^3 \cdot a^5 = a^8; \ a \neq 0$

$\times \frac{1}{c^3} = \frac{3a}{b^2 c^3}$

$12^0 = 1; \ (-25)^0 = 1; \ \left(\frac{9}{4}\right)^0 = 1; \ 0^{15} = 0$

$(-1)^{-6} = 1; \ (-1)^5 = -1;$

$-a^{-2} \cdot a^{-2} = -a^{-2+(-2)} = -a^{-4} = -\frac{1}{a^4}; \ a \neq 0$

$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{8}{12}} \cdot a^{\frac{9}{12}} = a^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{a^{17}}; \ a \geq 0$

$\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{\frac{1}{z}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{z}}$, або

$z^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = z^{-\frac{2}{6}} = z^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{z^{-1}} \sqrt[3]{\frac{1}{z}}; \ z > 0$

$\sqrt{a\sqrt[3]{b}} : \sqrt[3]{b^{-1}\sqrt{a^3}} = (ab^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} : (b^{-1} \cdot a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} =$

$= a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} : b^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} =$

$= a^0 b^{\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = b^{\frac{3}{6}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}; \quad a > 0, \ b > 0$

$(x^2 y^{-4})^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{10}{2}} y^{-\frac{20}{2}} = x^5 y^{-10} = \frac{x^5}{y^{10}}; \quad y \neq 0$

15. КОРЕНІ

a, b — дійсні числа; m, n — натуральні числа

$\sqrt[3]{a^3}=(\sqrt[3]{a})^3=a \qquad \sqrt[2n-1]{a^{2n-1}}=a$

$\sqrt{a^2}=|a| \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$

$\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}} \qquad \sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}};\quad a\geqslant 0$

$\sqrt[3\cdot 5]{a^{4\cdot 5}}=\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}} \qquad \sqrt[mr]{a^{nr}}=\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}};\quad a\geqslant 0$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \qquad \sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b};\ \ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$

$\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} \qquad \sqrt[2n-1]{ab}=\sqrt[2n-1]{a}\cdot\sqrt[2n-1]{b};$

$a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}};\quad a\geqslant 0,\ b>0$

$\sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}};\quad b>0 \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad b>0$

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a};$

$a\geqslant 0$

Приклад:

$$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{4b}\cdot\sqrt{8ab}=\sqrt{2a\cdot 4b\cdot 8ab}=\sqrt{64a^2b^2}=2|ab|;$$
$$a\geqslant 0,\ b\geqslant 0.$$

Увага: $\sqrt{a\pm b}$ не дорівнює $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

(наприклад, $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5;\ \ \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

$\frac{\sqrt[4]{a^{5n}}}{\sqrt[4]{a^n}}=\sqrt[4]{\frac{a^{5n}}{a^n}}=\sqrt[4]{a^{5n-n}}=\sqrt[4]{a^{4n}}=a^n,\ a>0$

$\sqrt[3]{\frac{27a^6b^3}{8x^3y^6}}=\frac{\sqrt[3]{27a^6b^3}}{\sqrt[3]{8x^3y^6}}=\frac{3a^2b}{2xy^2};\ \ xy\neq 0$

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}=\sqrt[15]{x};\ \ x\geqslant 0$

$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}=\sqrt[15]{a^5}\cdot\sqrt[15]{a^3}=\sqrt[15]{a^8}$

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^8\cdot a^9}=\sqrt[12]{a^{17}};\ \ a\geqslant 0$

$\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}\ \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{15})\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6\cdot 3}+\sqrt{15\cdot 3}=\sqrt{2\cdot 9}+$

$+\sqrt{5\cdot 9}=3\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=|a|.$

Увага: $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ неможливо звести до спільного кореня, тобто $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\neq\sqrt{a\pm b}$

$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=a^{\frac{9+4}{12}}=a^{\frac{13}{12}}=\sqrt[12]{a^{13}};$
$a\geqslant 0.$

16. ТОТОЖНІ РІВНОСТІ

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})$
$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

Обчислення другого степеня чисел

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b$$

$$64^2=(60+4)^2;\quad a=60;\quad b=4$$

$$\begin{array}{r} 60^2=3600 \\ (2\cdot60+4)\cdot4=\underline{\ 496} \\ 4096 \end{array}$$

При багатоцифрових числах, напр.:
$64{,}82^2$ — за a послідовно приймаємо 6, 60, 6480;
за b послідовно 4, 8, 2.

Сума перших двох рядків дає 64^2, сума трьох 648^2 і т. д.

Записуємо на два місця вправо. При десяткових числах в результаті запишемо подвійну кількість десяткових знаків (після коми).

$$\begin{array}{r} 6^2=36.. \\ (2\cdot\ 60+4)4=\ \ 124\cdot4=\ \ 496.. \\ (2\cdot\ 640+8)8=\ 1288\cdot8=\ 10304.. \\ (2\cdot6480+2)2=12962\cdot2=\underline{\ \ 25924.} \\ 4201{,}6324 \end{array}$$

$23{,}6^2$ — за a послідовно приймаємо 2, 20, 230;
за b послідовно 3,6.

Обчислення можна записувати спрощено:

$$\begin{array}{r} 2^2=4 \\ 43\cdot3=129 \\ 466\cdot6=\underline{\ 2796} \\ 556{,}96. \end{array}$$

Обчислення квадратного кореня числа

Підкореневе число ділиться на групи з двох чисел, причому від десяткової коми в напрямку вліво і вправо, тут найвищою групою може бути і одноцифрова.

$\sqrt{5476}$ — шляхом знаходження кореня першої групи (54) одержимо $a=7$, піднесенням до другого степеня числа $a=7$ і в результаті віднімання одержимо з виразу $a^2+2ab\pm b^2$ остачу $2ab+b^2=576$.

Для того щоб одержати друге число b, треба остачу $2ab+b^2$ після пропуску числа 6 поділити на $2a$. Тобто $57:14$, таким чином, число $b=4$. Від остачі 576 віднімаємо добуток числа $2a$, до якого приписуємо b, і числа b, тобто $144:4$, отже:

$$\begin{array}{l} \sqrt{54|76}=74 \\ \underline{-49} \\ \quad 57|6:144\cdot4 \\ \underline{-576} \\ \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{5|28|42}=229{,}8 \\ \underline{-4} \\ 128:42\cdot2 \\ \quad 444|2:449\cdot9 \\ \quad\ 4010|0:4588\cdot8 \\ \quad\ \ 339|6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{55|98,|03|24}=74{,}82 \\ \quad 6\ 9|8:144\cdot4 \\ \quad 1\ 22\ 0|3:1488\cdot8 \\ \qquad 2\ 99\ 2|4:14962\cdot2 \end{array}$$

17. СТЕПЕНІ ДВОЧЛЕНІВ

$$(a+b)^0=1; \quad a+b\neq 0$$
$$(a\pm b)^1=a\pm b$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$
$$(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$$

Біном Ньютона

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n+(-1)\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+$$
$$+(-1)^j\binom{n}{j}a^{n-j}b^j+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}b^n.$$

Біноміні коефіцієнти

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k};$$
$$\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{5040}{24}=210$$
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!};\ \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1;\ \binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\,6!}$$

Біномні коефіцієнти можна знайти за допомогою трикутника Паскаля (див. нижче).

На практиці для обчислення двочленів часто використовують приблизні формули:

$$(1\pm x)^n \doteq 1\pm nx; \qquad 1{,}035^3=\left(1+\frac{35}{10^3}\right)^3\doteq 1+3\,\frac{35}{10^3}$$

$$(1\pm x)^n \doteq 1\pm nx+\frac{1}{2}n\,(n-1)\,x^2$$

$$0{,}99^5=\left(1-\frac{1}{10^2}\right)^5\doteq 1-5\,\frac{1}{10^2}+\frac{1}{2}\cdot 5\,(5-1)\left(\frac{1}{10^2}\right)^2.$$

Трикутник Паскаля

$n=0$	1	$2^0=1$
$n=1$	1 1	$2^1=2$
$n=2$	1 2 1	$2^2=4$
$n=3$	1 3 3 1	$2^3=8$
$n=4$	1 4 6 4 1	$2^4=16$
$n=5$	1 5 10 10 5 1	$2^5=32$
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1	$2^6=64$

Наприклад: $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+$ $+5ab^4-b^5$.

18. РІВНЯННЯ

Лінійні рівняння з одним невідомим

$x+8=10$	$\frac{x}{7}=5\,/\cdot 7$	$ax+b=c$	$a\neq 0$
$x=10-8$	$\frac{x\cdot 7}{7}=5\cdot 7$	$ax=c-b$	
$x=2$	$x=35$	$x=\frac{c-b}{a}$.	

Система двох рівнянь з двома невідомими (подіб-
ний спосіб розв'язання застосовується і для систе-
ми трьох рівнянь з трьома невідомими).

1. Розв'язання способом додавання або віднімання рівнянь

$$\begin{aligned} 4x-5y&=39\\ 5x+5y&=78/+\\ \hline 9x+0&=117\\ x&=\frac{117}{9}\\ x&=13\\ y&=\frac{13}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x-7y&=41/\cdot 3\\ 5x+3y&=63/\cdot 7\\ \hline 12x-21y&=123\\ 35x+21y&=441/+\\ \hline 47x&=564\\ x&=12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot 12-7y&=41\\ -7y&=-7\\ y&=1\end{aligned}$$

2. Спосіб підстановки

$$\begin{aligned} 4x+y&=40\\ x-y&=5\\ \hline x&=5+y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(5+y)+y&=40\\ 20+4y+y&=40\\ 5y&=20\\ y&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-4&=5\\ x&=9.\end{aligned}$$

3. Спосіб порівняння частин

$$\begin{aligned} 7x-y&=99\\ 2x-y&=24\\ \hline y&=7x-99\\ y&=2x-24\\ \hline 7x-99&=2x-24\\ 5x&=75\\ x&=15\end{aligned}$$

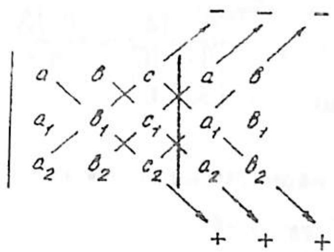
$$\begin{aligned} y&=7\cdot 15-99\\ y&=105-99\\ y&=6\end{aligned}$$

4. Розв'язання за допомогою детермінантів (визначників)

Детермінант другого порядку $\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b$

Детермінант третього порядку (обчислення за правилом Саррюса)

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} =$$



$$= ab_1c_2 + bc_1a_2 + ca_1b_2 - a_2b_1c - b_2c_1a - c_2a_1b$$

Знаходження розв'язків

$$\begin{aligned} ax+by&=c\\ a_1x+b_1y&=c_1\end{aligned} \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} c & b\\ c_1 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}};$$

$$\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix} \neq 0.$$

Приклад:

$$\begin{aligned} 8x-3y&=46\\ 5x+6y&=13\end{aligned}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}46 & -3\\ 13 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}8 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}}=\frac{46\cdot 6+13\cdot 3}{8\cdot 6+5\cdot 3}=\frac{315}{63}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}8 & 46\\ 5 & 13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}8 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}}=\frac{8\cdot 13-5\cdot 46}{8\cdot 6+5\cdot 3}=\frac{-126}{63}=-2$$

Квадратне рівняння

Загальний вигляд
$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$; b, c — довільні числа)

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Зведений вигляд

$$x^2+px+q=0$$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Зв'язок між коренями і коефіцієнтами

$$x_1+x_2=-p; \quad x_1x_2=q.$$

Розклад квадратного тричлена на кореневі множники

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

19. УЯВНІ І КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Уявна одиниця i — для неї має місце $i^2=-1$.
Степені уявної одиниці

$i^1=i$. $i^2=-1$; $i^3=-i$; $i^4=1$:

$i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}=-1$; $i^{4n+3}=-i$; $i^{4n}=1$;

n — натуральне число.

Комплексні числа

$z=a+bi$ (a, b — дійсні числа; a — дійсна частина; bi — уявна частина; i — уявна одиниця).
Наприклад: $z=2+3i$

Якщо $a\neq 0$, $b=0$, то комплексне число $z=a+bi=a$ є дійсне число;

якщо $a=0$, $b\neq 0$, то комплексне число $z=a+bi=bi$ є чисто уявне число.

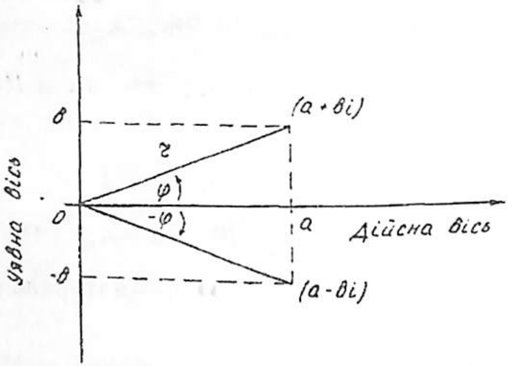
Спряжені комплексні числа

$z=a+bi$ (дійсні частини рівні, уявні частини — протилежні числа)
$\bar{z}=a-bi$.

Тригонометрична форма

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)]$$

для $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.



Модуль комплексного числа (абсолютна вел
чина)

$$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

φ — аргумент (головне значення при $-\pi<\varphi\leqq$
Показникова форма $z=re^{i(\varphi+2k\pi)}$; $e\doteq 2{,}7182818...$
число Ейлера.

Правила дій над числами

$$z_1=a_1+b_1 i=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_1 e^{i\varphi_1}$$
$$z_2=a_2+b_2 i=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_2 e^{i\varphi_2}$$

Додавання і віднімання

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$$
$$z+\bar{z}=a+bi+a-bi=2a.$$

Множення

$$z_1\cdot z_2=(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+b_1 a_2)i$$
$$z_1\cdot z_2=r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]=$$
$$=r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2,$$

Ділення

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}i \quad \text{при } z_2\neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Піднесення до степеня і добування кореня

$$z^m=(a+bi)^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)=r^m e^{im\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=$$
$$=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}i(\varphi+2k\pi)}$$

при $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ і одержимо n різних значень.

20. ЛОГАРИФМИ

Логарифмом додатного числа N за основою a ($a>0$, $a\neq 1$) називається показник степеня x, до якого треба піднести основу a для того, щоб одержати число N.

Запис: $\log_a N=x$, тобто $a^x=N$. Наприклад, $\log_4 16=2$, бо $4^2=16$.

Десяткові логарифми ($a=10$), запис*: $\log N=x$, $10^x=N$.

* У вітчизняній літературі десятковий логарифм позначають так: $\log_{10} N=\lg N$. — *Прим. перекл.*

Натуральні логарифми ($a=e$), запис: $\ln N=x$
$e^x=N$, $e \doteq 2{,}718282$.

Залежність між десятковими і натуральними логарифмами

$$\log N=\log e\cdot\ln N, \quad \text{тобто} \quad \log N \doteq 0{,}434\,294 \ln N$$
$$\ln N \doteq 2{,}302\,585 \log N$$

$\log 1000=3$, або $10^3=1000$	$\log 0{,}1=-1$, або $10^{-1}=0{,}1$
$\log 10=1$, або $10^1=10$	$\log 0{,}01=-2$, або $10^{-2}=0{,}01$
$\log 1=0$, або $10^0=1$	$\log 0{,}001=-3$, або $10^{-3}=0{,}001$

$\log 50 \doteq 1{,}69897$, або $10^{1{,}69897} \doteq 50$
$\log 500 \doteq 2{,}69897$, або $10^{2{,}69897} \doteq 500$.

Логарифм додатного числа складається з суми двох чисел: з цілого числа — так званої характеристики — і невід'ємного числа, меншого від 1, так званої мантиси:

$$\log N=ch+m.$$

Характеристика ch визначає порядок числа. Наприклад:

$N=726{,}4$, $ch=2$; $N=238\,584\,217$, $ch=8$.
$N=6{,}23$, $ch=0$; $N=0{,}006\,23$ $ch=-3$.

Укладено таблиці мантис десяткових логарифмів (наприклад, чотиризначні таблиці В. М. Брадіса, п'ятизначні — Є. Пржевальського. — *Прим. перекл.*).
Наприклад:

$$\log 53{,}4 \doteq 1+0{,}727\,54; \quad \log 7{,}416 \doteq 0{,}870\,10$$
$$\log 0{,}089\,18 \doteq 0{,}950\,27-2.$$

Правила логарифмування ($a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$)

$$\log(a\cdot b)=\log a+\log b \qquad \log a^n=n\log a$$
$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b \qquad \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a.$$

Наприклад:

$$\log\frac{3a^4b}{\sqrt[3]{c^5\cdot a^3}}=\log 3+4\log a+\log b-$$
$$-\frac{5}{3}\log c-3\log d.$$

Приклад: $$N=\frac{5000\cdot 0{,}5}{0{,}03}$$

$$\log N=\log 5000+\log 0{,}5-\log 0{,}03$$
$$\log 5000 \doteq 3{,}69897$$
$$+\log 0{,}5 \doteq \underline{+(0{,}69897-1)}$$
$$3{,}39794$$
$$-\log 0{,}03 \doteq \underline{-(0{,}47712-2)}$$
$$2{,}92082+2$$
$$\log N=4{,}92082.$$

Мантисі 0,920 82 в таблицях відповідає послідовність цифр 8333.

Десяткову кому визначає характеристика $ch=4$:

$$N=83\,330.$$

Перетворення від'ємного логарифма

Наприклад: $\log N=\overset{+2}{-1{,}301\,03}\overset{-2}{=}0{,}69897-2$

Мантисі 0,698 97 згідно з таблицями належать цифри 5000.

Десяткову кому визначає характеристика —2, тобто

$$N \doteq 0{,}05.$$

Додатні числа, менші від 1, мають від'ємні логарифми. Для того щоб можна було використати логарифмічні таблиці, в яких наводяться тільки додатні мантиси, треба перетворити наведений логарифм у додатну мантису з від'ємною характеристикою.

Здійснюється це в той спосіб, що до від'ємного логарифма додаємо і одночасно віднімаємо число, значення якого більше на одиницю від абсолютної величини вихідної характеристики. Від збільшеного таким чином логарифма віднімаємо вихідний від'ємний логарифм.

Наприклад:

+1	—1
—0,183 50	=0,816 50—1
+4	—4
—3,311 00	=0,689 00—4
+1	—1
—0,283 60	=0,716 40—1

21. ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ

Послідовністю (числовою) називається відображення (функція) множини натуральних чисел у множину чисел (наприклад, дійсних або комплексних).

Наприклад: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$
$\{4, 7, 10, 13\ 16, \ldots\}$ (тут $a_1=4, a_2=7, \ldots$).

Послідовність може бути:

зростаючою $a_n < a_{n+1}$ для всіх n

спадною $a_n > a_{n+1}$

сталою $a_n = a_{n+1}$

Ряд

Наприклад: $a_1+a_2+a_3+\ldots$ $\quad 4+7+10+13+16+\ldots$

Арифметична послідовність — різниця d двох послідовних членів є сталою (константою)

$$\{5, 15, 25, 35, 45\ldots\}$$

$$\{a_1 (a_1+d),\ (a_1+2d),\ (a_1+3d),\ldots\}$$

$$a_n=a_1+(n-1)d; \qquad a_n=a_{n-1}+d$$

$$d=a_{n+1}-a_n.$$

Будь-який член a_n послідовності (n — натуральне число, $n>1$)

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \text{ (тобто середнє арифметичне)}$$

n-й член

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad a_5=a_1+4d.$$

Будь-які члени

$$a_s=a_r+(s-r)\,d \qquad a_{20}=a_{10}+(20-10)\,d$$

Арифметичний ряд — ряд, що утворений із членів арифметичної послідовності

$$5+15+25+35+\ldots$$
$$s_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+[a_1+(n-1)d]$$
$$d=a_{n+1}-a_n.$$

Сума перших n членів

$$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d].$$

Сума перших n натуральних чисел

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Сума перших n парних чисел

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1).$$

Сума перших n непарних чисел

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$

Сума других степенів перших n натуральних чисел

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Сума третіх степенів перших n натуральних чисел

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

Геометрична послідовність — частка $q\neq0$ двох послідовних членів є сталою (константою)

$$\{1,2,4,8,16,\cdots\}\quad\{a_1,a_1q,a_1q^2,a_1q^3,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots\}$$

$$a_n=a_1q^{n-1};\quad q=\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Будь-який член

$|a_n|=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}};\ n\neq1$ (тобто середнє геометричне)

n-й член

$$a_n=a_1q^{n-1}\qquad a_6=a_1q^5$$

Будь-які члени

$$a_s=a_rq^{s-r}\qquad a_{10}=a_6\cdot q^4.$$

Геометричний ряд — ряд, що складається з членів геометричної послідовності

$$5+5\cdot3+5\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots$$
$$s_n=a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots+a_1q^{n-1}.$$

Частка

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Сума перших n членів

для $|q|\neq1$ $\quad s_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1};\quad s_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}$

для $q=1$ $\quad s_n=a_1n.$

Сума нескінченного геометричного ряду

$$|q|<1\quad s_\infty=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

22. КОМБІНАТОРИКА

Переставлення $P(n)$ — (без повторення елементів) — кортеж * довжини n з n-елементної множини $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в якого всі компоненти різні.

Кількість ** переставлень n різних елементів $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (n — факторіал).

Переставлення n елементів з повтореннями (коли між n елементами є три групи, які мають послідовно r, s, t однакових елементів):

$$P_{r,s,t}(n) = \frac{n!}{r!\,s!\,t!}.$$

Наприклад: скільки різних пятизначних цілих чисел можна утворити з п'яти цифр 3, 4, 4, 6, 6?

$$P_{2,2}(5) = \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 30.$$

Переставлення n елементів з повторенням (коли елементи складаються з 2 груп з r і $n-r$ елементів):

$$P_{r,n-r}(n) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r} \qquad \text{(читай } n \text{ над } r\text{)}.$$

Наприклад: скільки різних шестизначних чисел можна утворити з чисел 1, 1, 3, 3, 3, 3?

$$P_{2,4}(6) = \frac{6}{2!\,4!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15; \quad \binom{6}{2} = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 15.$$

* Кортеж — скінченна послідовність елементів будь-якої множини X. Число елементів послідовності називається довжиною кортежа. — *Прим. перекл.*

** Фактично автор через $P(n)$ позначає два різних поняття: конкретне переставлення (кортеж) і кількість переставлень з n елементів (число). У конкретному тексті ці поняття легко відрізнити. — *Прим. перекл.*

Розміщення $V_r(n)$ (без повторення елементів) — це кортежі по r елементів із n даних елементів; кожен елемент в кортежі міститься не більше одного разу, а кортежі відрізняються між собою тільки елементами або лише їх порядком (або першим і другим).

Запис $V_r(n)$ означає кількість розміщень r-класу з n елементів.

Для розміщень r-класу з n елементів без повторення (кожен елемент в одному кортежі міститься лише раз):

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$$

Наприклад: успішним вважається кидок тоді, коли, кидаючи кубик три рази підряд, одержуємо кожного разу іншу кількість очок. Скільки різних успішних кидків існує?

$$V_3(6) = 6\cdot5\cdot4 = 120.$$

Розміщенням з повторенням r-класу з n елементів називається кортеж довжиною r, що складається з елементів множини $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, і в якому хоча б один елемент повторюється:

$$V_r'(n) = n^r.$$

Наприклад: скільки існує можливостей вгадати правильну відповідь при заповнюванні бланка «Спортпрогноз» на 12 пар? $n=3$ (перемога, програш, нічия), $r=12$

$$V_{12}'(3) = 3^{12} = 531\,441.$$

Комбінації $C_r(n)$ (без повторення) — кортежі по r елементів з n даних елементів; кожен елемент у кортежі присутній не більше одного разу, і розташування елементів у кортежі значення не має.

Запис $C_r(n)$ означає кількість комбінацій r-класу з n елементів.

Комбінація r-класу з n елементів без повторення (кожна комбінація може мати той самий елемент лише раз):

$$C_r(n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Наприклад: скільки існує можливостей вгадати в «Спортлото» тоді, коли кількість видів спорту збільшиться до 90, а кількість виграшних номерів зменшиться до 5?

$$n=90,\ r=5,\ C_5(90) = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,(90-5)!} =$$
$$=43949268.$$

Комбінація r-класу з n елементів з повторенням (кожна комбінація може більше ніж один раз мати той самий елемент):

$$C'_r(n) = \binom{n+r-1}{r}.$$

Наприклад: скільки комбінацій третього класу можна утворити з п'яти цифр 3, 4, 5, 6, 7?

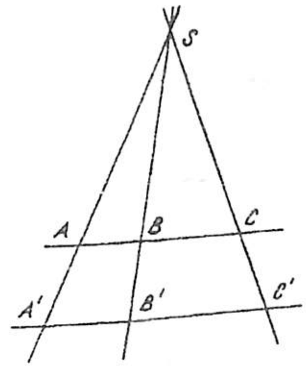
$$C'_3(5) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} =$$
$$= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

23. ПЛАНІМЕТРІЯ

Пропорційність відрізків

Для жмутка прямих, перетнутого паралелями, має місце:

1. $SA : AA' = SB : BB' = SC : CC'$
2. $AB : BC = A'B' : B'C'$
3. $AB : A'B' = SA : SA' = SB : SB'$



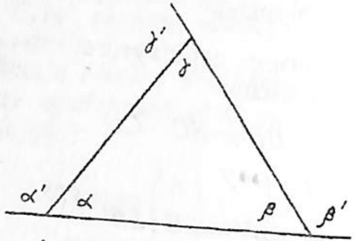
Трикутники

Має місце:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

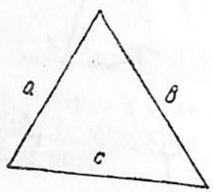
$\alpha'+\beta'+\gamma'=360°$

$\alpha'=\beta+\gamma,\quad \beta'=\alpha+\gamma,\quad \gamma'=\alpha+\beta$



Навпроти рівних сторін розташовані рівні кути. Навпроти більшої сторони лежить більший кут. Для обох тверджень дійсні обернені твердження. Нерівність трикутника

$$|a-b|<c<a+b, \quad |a-c|<b<a+c,$$
$$|b-c|<a<b+c.$$



Висота трикутника:

а) відстань вершини від прямої, на якій лежить протилежна сторона,

б) перпендикуляр, опущений з вершини на пряму, на якій лежить протилежна сторона,

в) $v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$,

г) висоти трикутника перетинаються в одній точці (ортоцентрі).

Медіана з'єднує вершину з серединою протилежної сторони.

Медіани перетинаються в центрі. Центр лежить в одній третій частині кожної медіани, замірюваної від середини сторони.

Осі сторін перетинаються в центрі описаного кола.

Радіус описаного кола $r=\frac{abc}{4A}$, де A — площа трикутника.

Бісектриси внутрішніх кутів перетинаються в центрі вписаного кола.

Радіус вписаного кола $\rho=\frac{A}{s}$, де $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Площа трикутника

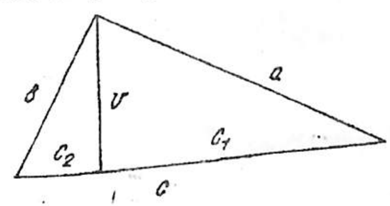
$$A=\frac{zv}{2}=\frac{av_a}{2}=\frac{bv_b}{2}=\frac{cv_c}{2}.$$

Формула Герона

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Прямокутний трикутник (a, b — катети, c — гіпотенуза)

1. Теорема Евкліда про висоту $v^2=c_1c_2$.
2. Теорема Евкліда про катети $a^2=cc_1$
3. Теорема Піфагора $c^2=a^2+b^2$.



Рівносторонній трикутник

$$\alpha=\beta=\gamma=60^\circ.$$

Центр описаного і вписаного кола, точка перетину висот і медіан збігаються.

$$v=\frac{a}{2}\sqrt{3}.\quad A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

24. ГОНІОМЕТРІЯ

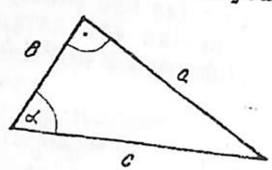
Прямокутний трикутник (a, b — катети, c — гіпотенуза)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$$

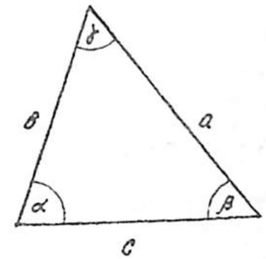
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$



Загальний трикутник

a, b, c — сторони; α, β, γ — кути



Теорема синусів

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема косинусів

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Теорема тангенсів

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Радіус описаного кола

$$r=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Радіус вписаного кола

$$\rho=(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Площа трикутника

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}=2r^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

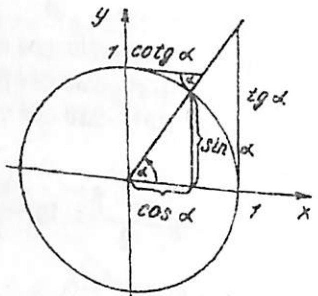
Співвідношення між гоніометричними функціями припустимих кутів *

Співвідношення між гоніометричними функціями одного і того ж кута

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha=1$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\quad 1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$



$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$$

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{|\operatorname{cotg}\alpha|}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$$

* У співвідношеннях, де з'являється $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\beta$, припускається, що $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\beta\neq k\pi$, де k — ціле число.

$$|\operatorname{tg}\alpha|=\frac{|\sin\alpha|}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}=\frac{1}{|\operatorname{cotg}\alpha|}$$

$$|\operatorname{cotg}\alpha|=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{|\sin\alpha|}=\frac{|\cos\alpha|}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{|\operatorname{tg}\alpha|}.$$

Гоніометричні функції різних кутів

$\sin(90°\pm\alpha)=+\cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(180°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

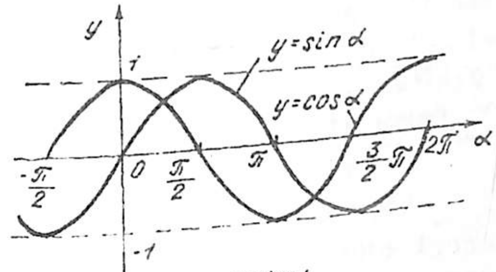
$\cos(90°\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180°\pm\alpha)=-\cos\alpha$

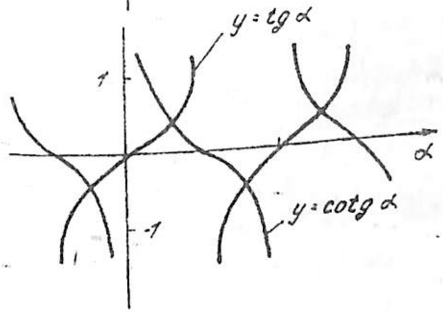
$\operatorname{tg}(90°\pm\alpha)=\mp\operatorname{cotg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(180°\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(90°\pm\alpha)=\mp\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(180°\pm\alpha)=\pm\operatorname{cotg}\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

$\cos(-\alpha)=+\cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha$





Функції суми і різниці двох кутів $(\alpha \pm \beta)$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}.$$

Функції подвійного і половинного кута

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{1}{2}(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\left|\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Суми і різниці гоніометричних функцій

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha).$$

25. ВЕКТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ

Позначення: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ ... вектори; $m, n, p, \ldots$ скаляри; $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — одиничні вектори (орти) на трьох осях прямокутних координат.

Зображення вектора за допомогою його складових — проекцій на три осі координат (a_x, a_y, a_z — координати вектора a).

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Абсолютна величина вектора (модуль).

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Додавання і віднімання векторів

$$a+b=s \qquad a-b=d$$

$$a\pm b=(a_x\pm b_x)i+(a_y\pm b_y)j+(a_z\pm b_z)k.$$

Наприклад:

$$a=-3i+8j+5k;\quad b=6i-5j-7k$$

$$s=a+b=(-3+6)i+(8-5)j+(5-7)\times k=3i+3j-2k.$$

Множення вектора на скаляр

$$na=f \qquad |na|=|n||a|=|n|\ a$$

$$n(a+b)=na+nb \qquad (n+m)a=na+ma$$

$$n(ma)=(nm)a$$

$$ma:n=\frac{m}{n}a.$$

Скалярний добуток векторів (внутрішній добуток) — результатом є скаляр

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos(a,b)=ab\cos(a,b)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Наприклад: $a=6i+4j-5k$; $b=12i-8j-3k$

$$a\cdot b=6\cdot12+4\cdot(-8)+(-5)(-3)=55$$

$$|a|=\sqrt{6^2+4^2+5^2}=\sqrt{77}\doteq8{,}774$$

$$|b|=\sqrt{12^2+8^2+3^2}=\sqrt{217}\doteq14{,}73$$

$$\cos(a,b)=\frac{55}{8{,}774\cdot14{,}73}\doteq0{,}425,$$ тобто

$$\sphericalangle(a,b)\doteq64^\circ49' \text{ або } 295^\circ11'.$$

Властивості скалярного добутку

Комутативність: $a\cdot b=b\cdot a$

Дистрибутивність: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Гомогенність (однорідність): $n(a\cdot b)=(na)\cdot b=a\cdot(nb)$.

Векторний добуток (зовнішній добуток) — результатом є вектор.

$$|a\times b|=||a|\cdot|b|\sin(a,b)|$$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i, & j, & k\\ a_x, & a_y, & a_z\\ b_x, & b_y, & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y, & a_z\\ b_y, & b_z\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix} a_z, & a_x\\ b_z, & b_x\end{vmatrix}j+$$

$$+\begin{vmatrix} a_x, & a_y\\ b_x, & b_y\end{vmatrix}k=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+$$

$$+(a_xb_y-a_yb_x)k.$$

Наприклад:

$$a=16i+4j-7k;\ b=3i-9j-4k$$

$$a=b=\begin{vmatrix} i, & j, & k\\ 16, & 4, & -7\\ 3, & -9, & -4\end{vmatrix}=-79i+43j-156k.$$

Властивості векторного добутку:

Антикомутативність: $a\times b=-b\times a$.

Дистрибутивність: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.

Гомогенність: $m(a\times b)=(ma)\times b=a\times(mb)$.

26. ОСНОВИ МАТРИЧНОГО ЧИСЛЕННЯ

Матриця типу $m \times n$ — таблиця дійсних чисел, укладених в m рядків і n стовпців.

Числа в матриці називаються елементами. Елементами матриці можуть бути також комплексні числа і функції, вектори і т. д. Елемент в i-му рядку та k-му стовпчику позначається* a_{ik}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

Основні види матриць

Нульова матриця — всі елементи нулі.
Квадратна матриця — $m=n$; n — порядок матриці.
Прямокутна матриця — $m \neq n$.
Діагональна матриця — квадратна матриця, для якої має місце

* *Прим. перекл.* Коми між елементами матриці часто опускають. Наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

В математичній літературі зустрічаються також позначення матриць:

$$A = \| a_{ij} \|; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{ik}=0, & \text{якщо} & i \neq k \\ a_{ik} \neq 0, & \text{якщо} & i=k \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2,0,0 \\ 0,3,0 \\ 0,0,4 \end{bmatrix}.$$

Одинична матриця 1 — діагональна матриця, в якої всі діагональні елементи дорівнюють 1:

$$\begin{matrix} a_{ik}=0, & \text{якщо} & i \neq k \\ a_{ik}=1, & \text{якщо} & i=k \end{matrix} \quad 1 = \begin{bmatrix} 1,0,0, \\ 0,1,0, \\ 0,0,1, \end{bmatrix}.$$

Матриця-стовпець — коли є лише один стовпчик.
Матриця-рядок — має місце один рядок.
Транспонована матриця A^T — утворюється шляхом заміни рядків на стовпчики:

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 4, & 3, & 8 \\ 2, & -1, & -5 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 0,4, & 2 \\ 1,3, & -1 \\ 2,8, & -5 \end{bmatrix}.$$

Регулярна (неособлива) матриця — при квадратній матриці: число h (h — кількість лінійно незалежних рядків) дорівнює числу рядків, тобто $h=n$.
Сингулярна (особлива) матриця отримується при $h<n$.
Обернена матриця A^{-1} до (неособливої) матриці A — якщо $AA^{-1}=A^{-1}A=1$.

Для прямокутної матриці типу $m \times n$ ($m \neq n$) має місце: якщо $m<n$, а $h=m$ — то матриця рядково регулярна; якщо $m>n$, а $h=n$ — то матриця стовпчиково регулярна.

Елементарні перетворення матриць

Під елементарними перетвореннями матриці розуміємо:

а) заміну (переставлення) двох рядків;

б) k-кратне додавання одного рядка до іншого рядка матриці;

в) множення якогось рядка на число, відмінне від нуля.

Операції з матрицями та їх властивості

Рівність матриць — про дві матриці того ж типу скажемо, що матриця $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ саме тоді, коли $a_{ik}=b_{ik}$, тобто, коли елементи на тих самих місцях дорівнюють один одному.

Рівність матриць не зміниться:

а) якщо до обидвох матриць додамо одну і ту ж матрицю

$$\mathbf{A}+\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{C};$$

б) якщо помножимо обидві матриці на число, відмінне від нуля

$$k\mathbf{A}=k\mathbf{B}, \quad k\neq 0;$$

в) якщо помножимо обидві матриці на одну і ту ж матрицю справа

$\mathbf{AD}=\mathbf{BD}$, або зліва: $\mathbf{DA}=\mathbf{DB}$

Сума матриць (внутрішня операція) — додавати можна лише матриці однакового типу. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$, де $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, тобто додаємо елементи на тих самих місцях:

$$\begin{bmatrix} 2, 3, 1 \\ 1, 2, 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3, & -2, 1 \\ 0, & 5, 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5, 1, 2 \\ 1, 7, 5 \end{bmatrix}.$$

Властивості:

а) комутативність: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

б) асоціативність: $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$;

в) дистрибутивність: $(c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$, $c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$;

г) нейтральність нуля — сума матриці $\mathbf{A}$ і матриці нульової (обидві однакового типу) дорівнює матриці $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}+0=0+\mathbf{A}=\mathbf{A};$$

д) протилежна матриця по відношенню до матриці $\mathbf{A}$ позначається — $\mathbf{A}$, і має місце $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$. Існування протилежної матриці дає змогу виконати операцію віднімання двох матриць:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B}).$$

Віднімання матриць виражається через операцію додавання:

$$\begin{bmatrix} 2, & 5, 1 \\ 2, & -5, 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2, 8, 1 \\ -5, 6, 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2, & 5, 1 \\ 2, & -5, 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2, -8, -1 \\ 5, -6, -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0, & -3, & 0 \\ 7, & -11, & -2 \end{bmatrix}.$$

Множення матриці на число (зовнішня операція) — кожен елемент матриці $\mathbf{A}$ множимо на число (скаляр) k:

$$3\cdot\begin{bmatrix} 1, 4 \\ 3, 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3, 12 \\ 9, 15 \end{bmatrix}.$$

Властивості:

а) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$;

б) якщо $c, d\in R$ то $c(d\mathbf{A})=(c\cdot d)\mathbf{A}$.

Добуток матриць — дві матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ можна перемножувати лише тоді, коли $\mathbf{A}$ є типу $m\times n$, а $\mathbf{B}$ типу $n\times p$; добуток матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в цьому порядку є матриця $\mathbf{C}$ типу $m\times p$, де:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$$

$$\begin{bmatrix} 2, 4 \\ 1, 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3, & 4, & -1 \\ 2, & 1, & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot3+4\cdot2, & 2\cdot4+4\cdot1, & 2\cdot(-1)+4\cdot6 \\ 1\cdot3+8\cdot2, & 1\cdot4+8\cdot1, & 1\cdot(-1)+8\cdot6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14, & 12, & 22 \\ 19, & 12, & 47 \end{bmatrix}.$$

Хід: Множимо перший рядок — на перший, другий, третій стовпчик поелементно, а добутки додаємо;

Множимо другий рядок — на перший, другий, третій стовпчик поелементно, а добутки додаємо.

Властивості:

а) Матриці **A** і **B** можна взаємно перемножити, якщо перша матриця має стільки ж стовпчиків, скільки має друга матриця рядків.

б) Про добуток **AB** скажемо, що матриця **A** помножена матрицею **B** справа, а матриця **B** помножена матрицею **A** зліва.

в) Дві квадратні матриці однакового порядку можна завжди перемножити між собою у довільному порядку.

г) Комутативності в загальному випадку немає: **AB≠BA**.

д) Асоціативність **A(BC)=(AB)C**.

е) Дистрибутивність **A(B+C)=AB+AC**, **(A+B)C=AC+BC**.

Визначники *

Визначник матриці — кожній квадратній матриці **A** ставиться у відповідність число, що називається визначником (позначається $|\mathbf{A}|$) і котре обчислюється за правилом:

$$|\mathbf{A}| = \Sigma(-1)^I a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n},$$

де сума поширюється на всі переставлення $(k_1, \ldots, k_n)$ множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, I — число інверсій (змін порядку) в переставленні $(k_1, \ldots, k_n)$.

Обчислення визначників

Визначник другого порядку обчислюється згідно з перехресним правилом:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = ad - bc; \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 3 \times$$

$$\times 4 = 2 - 12 = -10.$$

Визначник третього порядку обчислюється згідно з правилом Саррюса (яке має місце лише для $n=3$) — під матрицею **A** підставимо знову два перших її рядки і обчислимо згідно зі схемою (див. також с. 31):

* Вживається також латинський термін *детермінант*. — *Прим. перекл.*

$$|A| = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1 - cb_1a_2 - c_1b_2a - c_2ba_1$$

$$\begin{array}{ccccc} - & a, & b, & c & + \\ - & a_1, & b_1, & c_1 & + \\ - & & & & + \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1, & 3, & -2 \\ -3, & 0, & 1 \\ 2, & 5, & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + (-3)\cdot 5\cdot(-2) +$$

$$+ 2\cdot 3\cdot 1 - (-2)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 5\cdot 1 - 6\cdot 3\cdot(-3) =$$

$$= 0 + 30 + 6 + 0 - 5 + 54 = 85.$$

Визначник n-ного порядку обчислюємо за допомогою розкладу цього визначника (на визначники нижчого порядку), тобто послідовним зниженням порядку визначника шляхом пропускання (викреслювання) i-го рядка і k-го стовпчика. Таким чином, зведемо, наприклад, обчислення визначника п'ятого порядку до обчислення визначників четвертого порядку і далі визначників третього порядку, котрі вже можна обчислити за правилом Саррюса. Якщо

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{bmatrix}$$

матриця четвертого порядку, то визначником цієї матриці є число $|A|$, обчислене за формулою

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}| - a_{41}|A_{41}|,$$

де визначник $|A_{11}|$ — це визначник підматриці A_{11}, яку одержуємо з матриці A шляхом пропускання (викреслювання) першого рядка і першого стовпчика:

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Далі шляхом пропускання другого рядка і першого стовпчика отримуємо $|A_{21}|$ і т. д.

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} \quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|A_{41}| = \begin{vmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно обчислюємо визначники $|A_{ik}|$ шляхом пропускання відповідного стовпчика і рядка. Знак перед елементами a_{ik} у формулі знаходимо з шахової таблички, яку накладаємо на матрицю A (вгорі зліва починається з +):

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

Приклад: обчисліть визначник

$$D=|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1, & 4, & 0, & 3 \\ 2, & -1, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 1, & 4 \\ 3, & 5, & 9, & 2 \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=a_{11}\cdot|\mathrm{A}_{11}|-a_{21}\cdot|\mathrm{A}_{21}|+a_{31}|\mathrm{A}_{31}|-a_{41}\cdot|\mathrm{A}_{41}|$$

$$|\mathrm{A}|=1\cdot\begin{vmatrix} -1, & 1, & 5 \\ 4, & 1, & 4 \\ 5, & 9, & 2 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 4, & 0, & 3 \\ 4, & 1, & 4 \\ 5, & 9, & 2 \end{vmatrix}+0\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 4, & 0, & 3 \\ -1, & 1, & 5 \\ 5, & 9, & 2 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 4, & 0, & 3 \\ -1, & 1, & 5 \\ 4, & 1, & 4 \end{vmatrix}$$

визначники третього порядку обчислюємо за правилом Саррюса і одержимо:

$$D=1\cdot 201-2\cdot(-43)+0\cdot(-214)-3(-19)=$$
$$=201+86+0+57=344.$$

Властивості визначника квадратної матриці — для $n\geqslant 2$ має місце:

а) величина визначника не зміниться:

— якщо замінити його рядки за стовпчики і навпаки*;

— якщо до одного з рядків додати будь-яку лінійну комбінацію інших рядків;

* Властивість а) означає, що транспонована матриця має той самий визначник $|\mathrm{A}|=|\mathrm{A}^{\mathrm{T}}|$. — *Прим. перекл.*

б) якщо переставити два рядки (стовпчики), визначник поміняє знак;

в) визначник матриці дорівнює 0 ($|\mathrm{A}|=0$):

— якщо рядки (стовпчики) матриці лінійно залежні,

— якщо всі елементи якогось рядка (стовпчика) матриці дорівнюють нулю,

— якщо два рядки (стовпчики) матриці однакові.

Ранг матриці (по рядках) — число h, що дорівнює числу лінійно незалежних рядків даної матриці. Якщо ранг квадратної матриці дорівнює її порядку ($h=n$), то матриця регулярна (неособлива) і її визначник не дорівнює нулю: $|\mathrm{A}|\neq 0$. Якщо $h<n$, то матриця A особлива (сингулярна) і її визначник $|\mathrm{A}|=0$.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

а) поміняти порядок рядків, або рядки за стовпчики;

б) помножити деякі рядки на ненульові числа;

в) до будь-якого рядка додати лінійну комбінацію інших рядків матриці;

г) в матриці пропустити (викреслити) рядок, який є лінійною комбінацією тих, які залишилися в матриці;

д) додати до матриці рядок, який є лінійною комбінацією рядків матриці.

Знаходження рангу матриці

Використовуємо елементарні перетворення матриць — так, щоб під діагоналлю матриці опинилися нулі.

$$\begin{bmatrix} 1, & 4, & 2 \\ 0, & 1, & 4 \\ 2, & 9, & 3 \end{bmatrix}\cdot(-2) \;\; +$$

= Перший рядок множимо на (—2) і додаємо до третього рядка.

$$= \begin{bmatrix} 1, & 4, & 2 \\ 0, & 1, & 4 \\ 0, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) = \\ + \end{matrix}$$

Другий рядок множимо на (-1) і додаємо до третього рядка.

$$= \begin{bmatrix} 1, & 4, & 2 \\ 0, & 1, & 4 \\ 0, & 0, & -5 \end{bmatrix} h=3$$

Знання рангу матриці полегшує розв'язання системи лінійних рівнянь. Якщо якесь рівняння з системи рівнянь є лінійною комбінацією інших рівнянь, то ми його при підрахунках можемо пропустити. Розв'язок системи без цього рівняння буде розв'язком всієї системи. Таким чином, доцільно знайти мінімальну кількість рівнянь даної системи так, щоб усі інші рівняння були їх лінійною комбінацією.

Якщо визначник системи лінійних рівнянь $|\mathbf{A}| \neq 0$, то система має единий розв'язок. Якщо $|\mathbf{A}| = 0$, то система або має нескінченну кількість розв'язків, або ж не має жодного.

Ця ідея використовується при розв'язуванні систем лінійних рівнянь як алгебраїчних, диференціальних, так і інтегральних у різноманітних технічних і нетехнічних галузях.

27. ПЕРИМЕТР І ПЛОЩА ФІГУР

o — периметр, A — площа, a, b, c — сторони, z — основа, v — висота, u — діагональ, r — радіус описаного кола, ρ — радіус вписаного кола, α, β, γ — кути.

Фігура	Периметр — o	Площа — A
Трикутник	$o=a+b+c$	$A=\frac{zv}{2}$
Квадрат	$o=4a$ $u=a\sqrt{2}$	$A=a^2=\frac{u^2}{2}$
Прямокутник	$o=2(a+b)$ $u=\sqrt{a^2+b^2}$	$A=ab$
Ромб Паралелограм	$o=4a$ $o=2(a+b)$	$A=zv=\frac{u_1 u_2}{2}$ $A=av_a=bv_b$
Трапеція	$o=a+b+c+d$	$A=\frac{z_1+z_2}{2}v$
Многокутник	$o=a+b+c+\ldots$ $\ldots+n$	A — розкладенням на трикутники
Правильний шестикутник	$o=6a$ $r=a\doteq 1{,}1547\rho$ $\rho=\frac{r}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$A\doteq 6\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\doteq 2{,}5981a^2$ $A\doteq 6\frac{r\rho}{2}\doteq 3{,}4641\rho^2$ $\rho\doteq 0{,}866a$
Правильний n-кутник	$o=na$ $o=nr\sin\frac{180^\circ}{n}$ $\rho\doteq\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$	$A=\frac{n}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n}$ $A=n\rho^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$ $A=\frac{n}{2}a\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$

Фігура	Периметр — o	Площа — A
Круг	$o=\pi d=2\pi r$	$A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}$
Сектор круга	Довжина дуги $l=r\pi\frac{\alpha}{180}$	$A=\frac{1}{2}lr=\frac{\pi d^2}{4}\frac{\alpha}{360}=\frac{1}{4}ld$
Сегмент круга	Довжина дуги $l=r\pi\frac{\alpha}{180}$	$A=\frac{r(l-a)+av}{2}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha\pi}{180}-\sin\alpha\right)$
Кільце кругове	Середній діаметр $d=\frac{d_1+d_2}{2}$	$A=\pi(R^2-r^2)=\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)$
Сектор кільця кругового	Довжина дуги $l_1=d_1\pi\frac{\alpha}{360}$; $l=d_2\pi\frac{\alpha}{360}$	$A=\frac{\pi\alpha}{360}(R^2-r^2)$
Еліпс		$A=\pi ab$ (a, b — півосі)

28. ПОВЕРХНЯ І ОБ'ЄМ ТІЛ

S — поверхня, V — об'єм, a, b, c — ребра, v — висота тіла, відрізка, o — периметр основи, v' — висота бічної грані, s — сторона конуса (довжина твірної), r_1 — радіус основи, r_2 — радіус верхнього зрізу (конуса, кулі)

Фігура	Поверхня — S Бічна поверхня — Q	Об'єм — V Площа основи — A
Призма	$S=2A+Q$	$V=Av$
Прямокутний паралелепіпед	$S=2(ab+ac+bc)$	$V=abc$
Куб	$S=6a^2$	$V=a^3$
Піраміда	$S=A+Q$ $Q=\frac{1}{2}ov'$ — (правильна піраміда)	$V=\frac{1}{3}Av$
Зрізана піраміда	$S=A_1+A_2+Q$	$V=\frac{1}{3}v(A_1+A_2+\sqrt{A_1A_2})$
Круглий прямий циліндр	$S=2A+Q=$ $=2\pi r(r+v)$ $Q=2\pi rv=\pi dv$	$V=\pi r^2v$
Порожній циліндр (циліндрична труба)	$S=2A+Q$ $A=\pi(r_1^2-r_2^2)$ $Q=2\pi v(r_1+r_2)$	$V=\pi v(r_1^2-r_2^2)$

Фігура	Поверхня — S Бічна поверхня — Q	Об'єм — V Площа основи — A
Круглий прямий конус	$S=A+Q=$ $=\pi r(r+s)$ $Q=\frac{1}{2}\pi ds=$ $=\pi rs$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 v=$ $=\frac{1}{12}\pi d^2 v$
Зрізаний прямий конус	$S=A_1+A_2+Q$ $S=\pi(r_1^2+r_2^2)+$ $+\pi(r_1+r_2)s$	$V=\frac{1}{3}\pi v(r_1^2+r_1 r_2+r_2^2)$
Куля	$S=4\pi r^2=\pi d^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
Сектор кулі	$S=\pi r(r_1+2v)$	$V=\frac{2}{3}\pi r^2 v$
Сегмент кулі	$S=\pi r^2\frac{90+\alpha}{90}$ $S=A+Q=$ $=\pi r_1^2+2\pi rv$	$V=\pi v^2\left(r-\frac{v}{3}\right)=$ $=\pi\frac{v}{6}(3r_1^2+v^2)$
Шар кулі (пояс кулі)	$S=A_1+A_2+Q$ $S=2\pi rv+$ $+\pi(r_1^2+r_2^2)$	$V=\frac{\pi v}{6}(v^2+3r_1^2+3r_2^2)$

29. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Позначення точок: $O(0,\ 0)$; $P_1(x_1,\ y_1)$; $P_2(x_2,\ y_2)$; $P_3(x_3,\ y_3)$.

Поділ відрізка в даному відношенні — з відношенням поділу λ:

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda};\quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda};\quad \lambda=\frac{P_1P}{P_2P}.$$

Відстань між двома точками:

$$\overline{OP_1}=l=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

$$\overline{P_1P_2}=l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Кутовий коефіцієнт k прямої P_1P_2 — кут прямої P_1P_2 з віссю $+x$ позначимо α $\left(\text{при цьому } \alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$:

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Площа трикутника *, якщо задано вершини P_1, P_2, P_3:

$$A_\Delta=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right].$$

* Формулу для площі A_Δ можна записати через визначник:

$$A_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$ — *Прим. перекл.*

Центр ваги трикутника з вершинами P_1, P_2, P_3:

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пряма

Рівняння прямої через кутовий коефіцієнт k:

$$y = kx + q.$$

Рівняння прямої, що проходить через точку P_1 з кутовим коефіцієнтом k:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки P_1, P_2

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

p — відрізок на осі x

q — відрізок на осі y.

Загальний вигляд рівняння прямої:

$Ax + By + C = 0$, хоча б одне $A, B \neq 0$.

Нормальне рівняння прямої (α кут між нормаллю і віссю Ox)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0.$$

Перетворення загального рівняння прямої в нормальне рівняння — шляхом ділення на* $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

* Знак виразу $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ має бути протилежним до знака C. — *Прим. перекл.*

Відстань точки від прямої:

$$l = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

x_0, y_0 — координати точки,

A, B, C — параметри загального вигляду прямої,

або $$l = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - d|.$$

З нормального рівняння прямої

d — відстань прямої від початку координат;

φ — кут між нормаллю до прямої і віссю $+x$.

Координати точки перетину двох прямих — одержимо шляхом розв'язання системи, складеної з рівнянь обох прямих (двох рівнянь з двома невідомими).

Кут між двома прямими, заданими через кутові коефіцієнти:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$$

паралельні прямі: $k_1 = k_2$

перпендикулярні прямі $k_2 = -\frac{1}{k_1}$; $k_1 k_2 = -1$.

Коло

Рівняння кола з центром в початку координат радіуса r:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Рівняння кола із центром $S(m, n)$ радіуса r:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Еліпс

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Рівняння еліпса з центром $S(m, n)$:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи:
фокуси на осі x:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2};$$

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0;$$

фокуси на осі y:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром $S(m, n)$:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи, що проходить через початок координат

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2.$$

Рівняння гіперболи, асимптотики якої є координатними осями

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

Парабола

Рівняння параболи, що проходить через початок координат

$y^2=2px$; $y=\pm\sqrt{2px}$ — віссю параболи є вісь x

$x^2=2py$; $x=\pm\sqrt{2py}$ — віссю параболи є вісь y.

Рівняння параболи з вершиною $V(m, n)$:

$(y-n)^2=2p(x-m)$ — вісь параболи паралельна до осі x

$(x-m)^2=2p(y-n)$ — вісь параболи паралельна до осі y.

30. ПОХІДНІ

Похідні елементарних функцій

$(ax^n)'=nax^{n-1}$; n-ціле

при $n\leqslant 0$ $x\neq 0$

$(x)'=1$

$(C)'=0$

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=a^x\ln a$; $a>0$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$; $x>0$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad x > 0, \ln a \neq 0$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x} \log e; \quad x > 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}; \quad x \neq k\pi$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \ |x| < 1$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; \ |x| < 1$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}; \quad x \neq 0$$

Основні правила знаходження похідних

Похідна суми (різниці)

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad (x^4+x^2+3x)' = 4x^3+2x+3$

$(u-v)' = u' - v'$ $\qquad (x^3-x^2+2x)' = 3x^2-2x+2.$

Похідна добутку $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$[(2x^3+a)(x^3+2b)]' = 6x^2(x^3+2b) + (2x^3+a)3x^2 = 12x^5+12bx^2+3ax^2$$

$2x^3+a = u; \quad u' = 6x^2$

$x^3+2b = v; \quad v' = 3x^2.$

Похідна дробу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{x^3+4}{2x^2-5}\right)' = \frac{3x^2(2x^2-5)-(x^3+4)4x}{(2x^2-5)^2} = \frac{2x^4-15x^2-16x}{4x^4-20x^2+25}$$

$x^3+4 = u$

$u' = 3x^2$

$2x^2-5 = v$

$v' = 4x.$

Похідна складної функції

$y = f(u); \quad u = g(x)$

$y' = f'(u) \cdot g'(x)$ або $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$(\sin^3 x)' = (u^3)' \cdot (\sin x)' = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$\sin x = u$

$u' = \cos x$

$$(\ln \operatorname{tg} x^3)' = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 z} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x^3 \cdot \cos^2 x^3} = \frac{6x^2}{\sin 2x^3}$$

$$y = \ln u; \quad u = \operatorname{tg} z, \quad z = x^3$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Друга похідна знаходиться шляхом використання основних формул першої похідної, третя похідна шляхом диференціювання другої похідної і т. д.

$$y' = 5x^3 \qquad y'' = 15x^2 \qquad y''' = 30x$$

$$y^{(4)} = 30 \qquad y^{(5)} = 0 \qquad y^{(6)} = 0.$$

Похідна n-го порядку

$$y = a_0 x^n; \qquad y^{(n)} = (a_0 x^n)^{(n)} = n!\, a_0$$

$$y = 2x^5; \qquad y^{(5)} = 5!\,2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 2 = 240.$$

31. ІНТЕГРАЛИ

Основні невизначені інтеграли

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \text{ ціле}, \; n \neq -1).$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C; \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C; \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad x \neq k\pi$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C; \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C; \text{ для } |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arccotgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C; \text{ для } |x| > 1$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C; \quad x \neq 0.$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C; \text{ якщо } |x| > a$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Основні правила інтегрування

Інтегрування суми (різниці)

$$\int (u + v - w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx$$

$$\int (x^4 + x^2 - x)\, dx = \int x^4\, dx + \int x^2\, dx - \int x\, dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

Інтегрування функції з постійним множником

$$\int c \cdot f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

$$\int (6x^2 - 3x + 4\sqrt{x})\, dx = \int 6x^2\, dx -$$

$$- \int 3x\, dx + \int 4\sqrt{x}\, dx =$$

$$= 6 \int x^2\, dx - 3 \int x\, dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= 6\frac{x^3}{3} + C_1 - 3\frac{x^2}{2} + C_2 + \frac{4 \cdot 2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_3 =$$

$$= 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Інтегрування методом підстановки

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$ при цьому $t = \varphi(x)$

$dt = \varphi'(x)\, dx$

$$\int (x-3)^4\, dx = \int t^4\, dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{(x-3)^5}{5} + C$$

$$\left| \begin{array}{l} t = x - 3 \\ dt = (x-3)'\, dx = 1 dx \\ dt = dx \end{array} \right.$$

$$\int \cos^5 x \sin x\, dx = -\int t^5\, dt = \quad \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right.$$

$$= -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \quad \left| \begin{array}{l} z = x-1 \\ dz = f'(x)\, dx = \\ = (x-1)'dx = 1dx \\ dz = dx \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2}\, dz =$$

$$= \frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{z} + C =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + C; \quad x \neq 1$$

Інтегрування частинами

$$\int u' v \, dx = uv - \int u v' dx$$
$$\int u v' dx = uv - \int u' v \, dx$$

$\int x \cos x \, dx =$
$= x \sin x - \int 1 \sin x \, dx =$
$= x \sin x + \cos x + C$

$\left| \begin{array}{ll} u = x; & v' = \cos x \\ u' = 1; & v = \sin x \\ -\int \sin x \, dx = \cos x. & \end{array} \right.$

Визначений інтеграл — різниця значень примітивних функцій на верхній і нижній межах інтегрування.

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a); \quad [F(x)]' = f(x)$$

$$\int_3^6 (x^2 - 4x + 5) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \right]_3^6 =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_3^6 = \frac{216}{3} -$$
$$- 72 + 30 - (9 - 18 + 15) = 24;$$

$$\int_2^3 x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_2^3 = \frac{243}{5} - \frac{32}{5} = \frac{243 - 32}{5} =$$
$$= \frac{211}{5} = 42\frac{1}{5}.$$

Обчислення визначених інтегралів

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx;$$

$a < b$, $f(x)$ неперервна на $< a, b >$

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx; \quad a < c < b$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x) + h(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx +$$
$$+ \int_a^b g(x) \, dx + \int_a^b h(x) \, dx$$

$$\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

Застосування визначених інтегралів у геометрії

Площа A криволінійної трапеції (всієї над, або під віссю x), обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Площа A_k круга, обмеженого колом $x^2+y^2=r^2$:

$$A_k = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

рівняння верхнього півкола

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Довжина l дуги плоскої кривої:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

Площа Q поверхні тіла обертання (утвореного обертанням кривої $y=f(x)$ навколо осі x)

$$Q = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

Об'єм V тіла обертання:

а) з віссю обертання x:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x;$$

б) з віссю обертання y:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2\,\mathrm{d}y.$$

Якщо при обчисленні площі підінтегральна функція змінює знак при певному значенні аргументу, то визначений інтеграл повинен мати межею інтегрування відповідне значення аргументу.

Приклад. Знайдіть площу, обмежену графіком функції $y=x^3-1$, y-и координатами нижньої $y=-2$ і верхньої $y=4$ межі і віссю x (функція змінює знак у точці $x=+1$), так, що частина площі знаходиться під, а частина над віссю x. Тому

$$\int_{-2}^{4} \cdots = \int_{-2}^{1} + \int_{1}^{4}.$$

Але площа — додатне число, тобто

$$A = A_1 + A_1 =$$

$$= \left| \int_{-2}^{1} (x^3 - 1)\,\mathrm{d}x \right| + \int_{1}^{4} (x^3 - 1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_{-2}^{1} \right| + \left[\frac{x^4}{4} - x \right]_{1}^{4} =$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 1 - \left(\frac{16}{4} + 2 \right) \right| + \frac{4 \cdot 64}{4} - 4 - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 67\frac{1}{2}.$$

32. МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Висловлення

Символи A, B, C, ..., M, N і т. д. позначають висловлення. Є сенс вважати висловленням твердження, про яке можна сказати або дізнатися, істинне воно чи хибне (знак істинності величини p, знак хибності — n).

Приклади.

Висловлення $2+2=4$ можна позначити A і воно має значення істинності $\mathrm{ph}(A)=p$.

Висловлення $2<-5$ можна позначити M і має воно $\mathrm{ph}(M)=n$.

Сполученням висловлень можна утворювати нові висловлення (складені), істинність яких залежить тільки від істинності складових і від сполучника (операції), який їх з'єднує.

Логічна операція	Сполучник — операція	Читається
Заперечення *	$'$	B' — не B
Кон'юнкція	$\wedge$	$A\wedge B$ — A і B
Диз'юнкція	$\vee$	$A\vee B$ — A або B
Імплікація	$\Rightarrow$	$A\Rightarrow B$ якщо A, то B
Еквівалентність (тотожність)	$\Leftrightarrow$	тоді і тільки тоді

* Частіше вживаються позначення $\overline{B}$; $\neg B$. — *Прим. перекл.*

Таблиця істинності складених висловлень

Істинність висловлень A, B	Істинність складених висловлень				
A B	A'	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow B$	$A\Leftrightarrow B$
pp	n	p	p	p	p
pn	n	n	p	n	n
np	p	n	p	p	n
nn	p	n	n	p	p

Приклади (запишемо заперечення висловлень з прикладів перед таблицями)

A' : хибне, що $2+2=4\,(n)$.

M' : хибне, що $2<-5\,(p)$.

Якщо висловлення B є: хибне те, що $\sin 30°=0{,}5\,(n)$, то висловлення B' є: $\sin 30°=0{,}5\,(p)$.

Значення істинності позначимо ph.

$A\wedge B'$: $(2+2=4$ і $\sin 30°=0{,}5)$; $\mathrm{ph}(A\wedge B')=p$.

$A\vee M$: $(2+2=4$ або $2<-5)$; $\mathrm{ph}(A\vee M)=p$.

$A\Rightarrow M'$: (якщо $2+2=4$, то $2<-5$ хибне); $ph(A\Rightarrow M')=p$.

$A\Rightarrow M$: $(2+2=4$ тоді і тільки тоді як $2<-5)$; $ph(A\Leftrightarrow M')=p$.

Квантори

$\exists$ *квантор існування;*
$\exists x: x+2=4$ читається: існує таке x, для якого дійсне $x+2=4$;

$\forall$ *квантор загальності;*
$\forall x: x+1>x$ читається: для кожного x сума $x+1$ є більшою від x.

Закони операцій над висловленнями

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$	асоціативний закон	$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$
$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$	комутативний закон	$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$
$A\wedge(B\vee A)\Leftrightarrow A$	можливість приєднання	$A\vee(B\wedge A)\Leftrightarrow A$
$(A\vee B)\wedge C\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$	дистрибутивний закон	$(A\wedge B)\vee C\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(A\vee C)\wedge(B\vee C)$
$(A\wedge B)'\Leftrightarrow A'\vee B'$	закон де Моргана	$(A\vee B)'\Leftrightarrow A'\wedge B'$

$A\vee A'$ істинне — закон виключення третього

$A \wedge A'$ хибне — закон несуперечливості
$(A')' \Leftrightarrow A (\Leftrightarrow A'')$ — закон подвійного заперечення.

Приклади.

Однаково, чи ми говоримо *Падає дощ, блискає і при цьому гримить,* чи *Падає дощ і при цьому блискає і гримить.*

Запис: $(П \wedge Б) \wedge Г \Leftrightarrow П \wedge (Б \wedge Г)$.

Висловлення *Падає дощ або світить сонце* має той самий логічний зміст, що й висловлення *Сонце світить або падає дощ.*

Запис: $П \vee С \Leftrightarrow С \vee П$.

Іти і одночасно їхати на велосипеді або іти є те саме, що *Іти.*

Запис: $І \wedge (В \vee І) \Leftrightarrow І$.

Читати і підспівувати або іти — це те саме, що й *Читати або іти і одночасно підспівувати або іти.*

Запис: $(Ч \wedge П) \vee І \Leftrightarrow (Ч \vee І) \wedge (П \vee І)$.

Хибне, що він не прийшов $\Leftrightarrow$ *прийшов.*

Запис: $(П')' \Leftrightarrow П$.

Наведені закони операцій над висловленнями — це власне твердження про однакове значення істинності цих висловлень. Тому ці закони можуть бути перевірені за допомогою таблиці значень істинності складених висловлень.

33. МНОЖИНИ

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — множина, елементами якої є $x_1, x_2, x_3, \ldots$
$A, B, \ldots, M, N, \ldots$ — позначення множин.

Стандартні позначення:

N — множина натуральних чисел
N_0 — множина N з приєднаним нулем
Z — множина цілих чисел
Q — множина раціональних чисел
Q^+ — множина додатних раціональних чисел
R — множина дійсних чисел
R^+ — множина додатних дійсних чисел
$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел
$\varnothing$ — порожня множина
$x \in M$ — елемент x належить множині M
$x \notin M$ — елемент x не належить множині M
$(\{x : x \in M; f(x)\}$ — множина, на якій визначена функція $f(x)$
(a, b) — впорядкована пара елементів $(a, b) \neq (b, a)$ при $a \neq b$.

Приклади:

M — множина жителів Братіслави
$\{a, b, \ldots\}$ — множина робітників у цеху:
a — робітник на першому верстаті; b — на другому і т. д.
$\{x : x \in R; x^3 - 1 = 0\}$ — множина дійсних коренів рівняння $x^3 - 1 = 0$
$x \in Q$ — означає, що x — раціональне число, напр. $\frac{3}{5}, -1, \ldots$
$1{,}5 \notin Z$ — означає, що 1,5 не ціле число
$(3{,}5)$ — пара координат точки на площині.

Операції над множинами

Запис	Читається	Означення
$P \subset M$	Множина P є підмножиною множини M	$x \in P \Rightarrow x \in M$
$P \underset{\neq}{\subset} M$	Множина P є правильною підмножиною множини M	$P \subset M \wedge P \neq M$
$A \cap B$	Переріз множин A, B	$\{x : x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cup B$	Об'єднання множин A, B	$\{x : x \in A \vee x \in B\}$
$A \setminus B$	Різниця множини A і множини B	$\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
P'	Доповнення множини P до основної множини M	$\{x : x \in M \wedge x \notin P\}$
$P(M)$	Потенція множини M (усі підмножини множини M)	$\{S_i : S_i \subset M\}$
$M \times N$	Декартів добуток множини M і N — множина впорядкованих пар (x, y)	$\{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\}$
$M \times M = M^2$	Множина всіх впорядкованих пар елементів множини M	$\{(x_i, x_k) : x_i, x_k \in M\}$
M^3	Множина всіх впорядкованих трійок елементів з M	$\{(x_i, x_j, x_k) : x_i, x_j, x_k \in M\}$

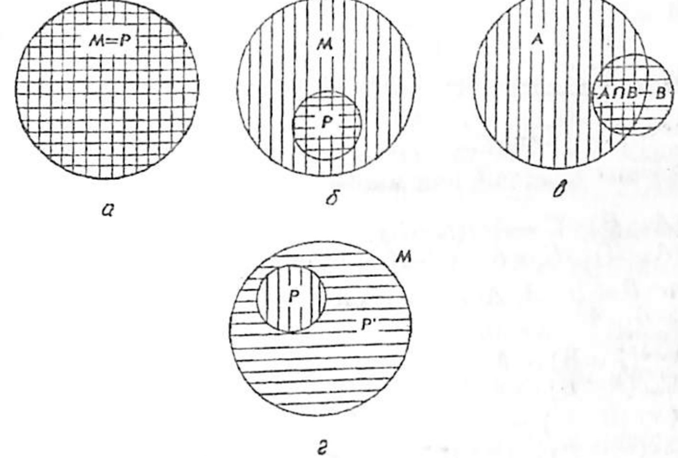


Рис. *а, б.* Множина M — площа вертикально заштрихована, множина P — площа горизонтально заштрихована, $M = P$ рис. *а*; $P \subset M$ рис. *б*.

Рис. *в.* Множина A — площа вертикально заштрихована, множина B — площа горизонтально заштрихована, множина $A \cup B$ — площа в квадрати, множина $A \cap B$ — площа, заштрихована горизонтально і вертикально (і в квадратах). Множина $A \setminus B$ — площа, заштрихована тільки вертикально.

Рис. *г.* Множина M — внутрішня площа більшого круга, множина P — площа вертикально заштрихована, множина P' — площа, заштрихована горизонтально.

Приклади:

Внутрішні точки кругів утворюють множини P, M, A, B.

$M = \{1, 2\}$, $P(M) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{\varnothing\}\}$,

$M = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2\}$, $M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\ (c, 1), (c, 2)\}$

$M=\{a, b, c\}$, $M^2=\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

$M=\{1, 2\}$, $M^3=\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2); (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$.

Закони операцій над множинами

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	асоціативний закон
$A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$	комутативний закон
$A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$	закон про можливість приеднання
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	дистрибутивний закон
$P\cap P'=\varnothing$	переріз доповнюючих множин є порожнім
$P\cup P'=M$ (основна множина)	
$P\cap P=P$, $P\cup P=P$	ідемпотентність
$P\cap P=P$, $P\cup P=P$	властивості порожньої множини
$P\cap M=P$, $P\cup M=M$	властивості основної множини M
$(A\cap B)'=A'\cup B'$, $(A\cup B)'=A'\cap B'$	закони де Моргана

Приклади.

За допомогою наведених законів і тотожностей спрощуємо вирази, або ж розв'язуємо рівняння з множинами.

$(A\cup P)\cup P'=$	
$=A\cup(P\cup P')$	за законом асоціативності
$=A\cup M$	за властивістю доповнюючих множин
$=M$	за властивістю основної множини.

Множина X задана співвідношеннями (рівностями):

1. $X\cup A=B$ $X\cup A'=C$	В обидвох рівностях перейдемо до рівностей з доповнюючими множинами.
2. $X'\cap A'=B'$ $X'\cap A=C'$	Об'єднаємо відповідно ліві та праві частини рівностей, а X' вилучимо.
3. $X'\cap(A\cup A')=B'\cup C'$	Використаємо властивість доповнюючих множин.
4. $X'\cap M=B'\cup C'$	Перейдемо в рівності до доповнюючих множин.
5. $X=B\cap C$	

Відношення

Звичайні бінарні відношення:

Позначення	Читається	Зміст	Приклад
$=$	дорівнює	обидві сторони рівняння рівні	$3+1=4$
$\neq$	не дорівнює	заперечення рівності	$3\neq4$
$<$	менше ніж	лівий член менший ніж правий	$-5<0$
$>$	більше ніж	лівий член більший ніж правий	$-1>-5$

xRy — загальний запис бінарного відношення, R — позначення правила, яким пара елементів (x, y) зв'язана; саме R замінює цілий запис відношення;

$R \subset M^2$ означає: R — бінарне відношення на множині $M \times M = M^2$, тобто є підмножиною множини M^2;

$\{(x, y) \in M \times M;\ x^2 + y^2 = 1\}$ — множинний запис бінарного відношення на множині M, в якому пари зв'язані відношенням $x^2 + y^2 = 1$.

Відношення еквівалентності: а) рефлексивне: xRx; б) симетричне: $xRy \Rightarrow yRx$; в) транзитивне: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Відношення строгого порядку: * а) антирефлексивне $xR'x$; б) антисиметричне: $xRy \Rightarrow yR'x$; в) транзитивне: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

$R(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ запис n-арного відношення.

Приклади.

Еквівалентність: $\alpha^\circ \equiv (\alpha + 360)^\circ$.

Відношення порядку: $\{1, 3\} \subset \{(0, 1, 3)\} \subset \{0, 1, 3, 5\}$.

Тернарне відношення: $\{(x, y, z) \in R \times R \times R;\ x \in N \wedge y = x + 1 \wedge z = y + 1\}$.

Відображення і функції

Бінарне відношення $f \subset A \times B$ називається відображенням із множини A в множину B, якщо для кожного $x \in A$ існує не більше одного $y \in B$ такого, щоб $(x, y) \in f$. Якщо $(x, y) \in f$, то елемент $y \in B$ називається образом відображення f в точці $x \in A$ і записується $y = f(x)$. Область визначення $D(f)$ відображення f є множиною всіх $x \in A$, для котрих існує такий $y \in B$, що $(x, y) \in f$. У випадку, якщо $D(f) = A$, то говоримо про відображення множини A в множину B і записуємо $f: A \to B$.

* Відношення R називають відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне. — *Прим. перекл.*

Область значень $H(f)$ відображення f є множина всіх $y \in B$, для яких існує $x \in A$ такий, що $(x, y) \in f$.

Відображення f з множини A в множину B називається:

а) ін'єктивним, якщо $\forall\ x_1, x_2 \in A$: $(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$;

б) сюр'єктивним (відображенням на множину B), якщо $\forall\ y \in B\ \exists\ x \in A$: $(x, y) \in f$;

в) бієкцією (взаємно однозначним відображенням), якщо воно володіє властивостями *а, б*.

Нехай $f: A \to B$, $g: B \to C$ – відображення. Відображення $g_0 f: A \to C$, задано формулою $g_0 f(x) = g(f(x))$, назвемо складеним відображенням; f є його внутрішньою, а g — зовнішньою частинами.

Приклади:

$$y = \sqrt{x-9},\ D(f) = \{x \in R:\ x - 9 \geqslant 0\} = \{x \in R:\ x \geqslant 9\}$$

$$H(f) = \{y \in R:\ y \geqslant 0 \wedge \exists x \in R: y = \sqrt{x-9}\} = \{y \in R: y \geqslant 0\}$$

$$y = \sin(x-1),\ f(x) = x - 1,\ g(z) = \sin z,\ z = x - 1.$$

Функцією називається відображення в множину R ($\mathbb{C}$).

Операції

n-арною операцією на множині M називається будь-яке відображення f: $M^n \to M$. При $n = 1$ ми говоримо про унарну операцію, при $n = 2$ про бінарну операцію, при $n = 3$ про тернарну операцію і т. д.

Приклади:

$f: R^3 \to R$, $f(x, y, z) = x+y+z$ — тернарна операція на $R \cdot g: Z \to Z$, $g(x) = x-10$ — унарна операція на Z.

Алгебраїчні структури

Якщо на множині M визначена внутрішня операція, яку ми позначимо «о», то ця множина може бути:

групою, якщо:

а) операція є асоціативною: $\forall (a, b, c) \in M^3$; $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c$;

б) множина містить нейтральний елемент: $\exists n \in M \; \forall a \in M$; $\quad n \circ a = a \circ n = a$;

в) множина містить обернений елемент до кожного елемента: $\forall a \in M, \exists a^{-1} \in M$; $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = n$;

група називається абелевою, якщо групова операція є комутативною: $\forall (a, b) \in M^2$; $a \circ b = b \circ a$;

комутативне кільце, якщо крім попереднього:

а) на *абелевій групі* визначається ще друга операція, яку позначимо «$\times$»;

б) і друга операція є асоціативною: $\forall (a, b, c) \in M^3$; $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;

в) і друга операція комутативна: $\forall \; (a, b) \in M^2$; $a \times b = b \times a$;

г) обидві операції пов'язані дистрибутивним законом: $\forall (a, b, c) \in M^3$; $a \times (b \circ c) = (a \times b) \circ (a \times c)$; $(b \circ c) \times a = (b \times a) \circ (c \times a)$;

поле, якщо це комутативне кільце і крім цього:

а) множина містить нейтральний елемент e і другої операції: $\exists \; e \in M \; \forall a \in M$: $e \times a = a \times e = a$;

б) множина містить обернений до кожного елемента $a \neq n$ щодо другої операції:

$$\forall a \in M \wedge a \neq n \; \exists a^{-1} \in M; \; a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e.$$

Приклади:

Абелева група: Z (множина цілих чисел): операція — додавання і замість «о» пишемо «+», додавання асоціативне і комутативне, нейтральним елементом є 0, а взаємно оберненими числами є числа, що відрізняються знаком: $a+0=a$; $a+(-a)=0$

Комутативне кільце: Z з операціями додавання і множення (Z не є полем, бо в цій множині немає для кожного елемента оберненого елемента згідно з операцією множення). Полем є множина всіх раціональних чисел Q.

Ізоморфізм

Дано дві множини: A з операцією «о» і B з операцією «$\times$»: короткий запис: $(A, \circ)$, $(B, \times)$.

Нехай f — бієктивне відображення множини A на множину B. Тоді f є ізоморфізм алгебраїчних структур $(A, \circ)$ і $(B, \times)$, якщо

$$\forall \; (x, y) \in A^2: f(x \circ y) = f(x) \times f(y).$$

Приклад:

$(A, \circ)$ надамо структуру $(R^+, \cdot)$ і $(B, \times)$ надамо структуру $(R, +)$. Логарифмічна функція відобразить структуру $(R^+, \cdot)$ на структуру $(R, +)$ ізоморфно, бо має місце

$$\log_z ab = \log_z a + \log_z b.$$

34. ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Α	α	альфа	Ν	ν	ню
Β	β	бета	Ξ	ξ	ксі
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омікрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пі
Ε	ε	епсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	зета	Σ	σ	сигма
Η	η	ета	Τ	τ	тау
Θ	ϑ	тета	Υ	υ	іпсилон
Ι	ι	йота	Φ	φ	фі
Κ	ϰ	каппа	Χ	χ	хі
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	псі
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

35. ОДИНИЦІ МІРИ

Одиниці довжини

1 км = 1000 м = 10 000 дм = 100 000 см = 1000 000 мм
1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм
1 дм = 10 см = 100 мм
1 см = 10 мм = 10 000 мкм
1 мм = 1000 мкм = 1000 000 нм

1 миля = 1 760 ярдів = 5 280 футів
1 ярд = 3 фути = 36 дюймів
1 фут = 12 дюймів
1 дюйм 1″, 3/4″, 1/2″, 1/4″, 1/8″...

1 миля = 1609,34 м
1 морська миля = 1 852 м
1 верста = 500 сажнів = 1 066,8 м
1 ярд = 91,44 см; 1 фут = 30,48 см; 1 дюйм = = 2,54 см.

Одиниці площі

1 км^2 = 100 га = 10 000 а = 1 000 000 м^2
1 га = 100 а = 10 000 м^2 = 1 000 000 дм^2
1 а = 100 м^2 = 10 000 дм^2 = 1 000 000 см^2
1 м^2 = 100 дм^2 = 10 000 см^2 = = 1 000 000 мм^2
1 дм^2 = 100 см^2 = 10 000 мм^2
1 см^2 = 100 мм^2

1 кв. миля (aq. mi) = 640 акрів (ac) = 3 097 600 кв. ярдів (sq. yd)
1 акр (ac) = 4840 кв. ярдів (sq. yd)
1 кв ярд (sq. yd) = 9 кв. футів (sq. ft)
1 кв. фут (sq. ft) = 144 кв. дюйми (sq. in)

1 кв. миля = 2,58999 км^2
1 кв. верста = 250 000 кв. сажнів = 1,13806 км^2
1 акр = 0,404686 га; 1 кв. ярд = 0,836127 м^2
1 кв. фут = 0,092903 м^2; 1 кв. дюйм (sq. in) = = 6,6516 см^2

Одиниці об'єму

1 м^3 = 1 000 дм^3 = 1 000 000 см^3 = 1 000 000 000 мм^3
1 дм^3 = 1 000 см^3 = 1 000 000 мм^3
1 см^3 = 1 000 мм^3

1 гл = 100 л
1 л = 10 дкл = 100 сл = 1 000 мл
1 дкл = 10 сл = 100 мл
1 сл = 10 мл

1 реєстрова тонна (BRT) = 2,832 м^3
1 кубічний сажень = 9,71268 м^3
1 куб. ярд (cu. yd) = 27 куб. футів (cu. ft) = 0,764555 м^3
1 куб. фут (cu. ft) = 28,3168 дм^3; 1 куб. дюйм (cu. in) = = 16,387 см^3

1 бушель (bu) = 8 галонів (gal) = 36,368 л;
1 галон (англ.) = 4,546 л;
1 галон (США) = 3,785 л;
1 барель нафти = 42 галони = 159 дм³;
1 барель сухий (dry) = 31,5 гал = 119,2 дм³

Одиниці маси

1 т = 10 ц = 1000 кг = 100 000 дкг = 1 000 000 г
1 ц = 100 кг = 10 000 дкг = 1 000 000 г
1 кг = 100 дкг = 1000 г
1 дкг = 10 г = 100 дцг = 1000 сг = = 10 000 мг
1 г = 10 дцг = 100 сг = = 1000 мг = 1 000 000 мкг
1 дцг = 10 сг = 100 мг = = 100 000 мкг
1 сг = 10 мг = = 10 000 мкг
1 мг = = 1000 мкг

1 long ton = 20 cwt = 80 quartes = 2240 lbav
1 cwt = 4 quartes = 112 lbav
1 quartes = 28 lbav
1 lbav = 16 ozav = 256 drav
1 ozav = 16 drav
1 long ton = 1016,047 кг
1 short ton = 2 000 lb av (pound avoirdupois) = = 907,185 кг
1 cwt = 50,802352 кг; 1 lb av = 0,4536 кг
1 oz av (ounce avoirdupois) = 28,3495 г
1 dr av (dram avoirdupois) = 1,7718 г
1 пуд = 16,3805 кг
1 карат (дорогоцінне каміння) = 0,2 г = 200 мг
1 карат (в ювелірному виробництві) = доля 1/24 ваги золота
(14-каратне золото = 14/24 золота + 10/24 іншого металу).

ЗМІСТ

Справочное издание

ЛАТКА ФРАНТИШЕК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИНИЛЕКСИКОН

Перевели со словацкого
М. И. Панив, И.-П., П. Сыроид

Львов. Издательство «Свит»
при Львовском госуниверситете

(На украинском языке)

Художній редактор *О. М. Козак*
Технічний редактор *С. Д. Довба*
Коректори *Г. В. Кармінська,*
Р. Р. Гамада

ІБ № 14116

Здано до набору 03. 12. 89. Підп. до друку 26. 01. 90.
Формат набору 70Х1001/32. Папір друк. № 1. Літ. гарн.
Вис. рук.. Умовн. друк. арк. 4,19. Умовн. фарб.-відб. 4,42.
Обл.-вид. арк. 3,45. Тираж 10 000 Вид. № 2001. Зам. 300.

Видавництво «СВІТ»
при Львівському держуніверситеті
290000 Львів, вул. Університетська, 1.

Друк. ПТУ № 58. Львів. Зам. 300—10 000. 1998 р.