О. А. Сарана

Математичні олімпіади: просте і складне поруч

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Житомир - 2002

УДК 510(023)
ББК 22.10

Рецензенти: професор кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук **Ядренко М.Й.**,
завідувач кафедри математичного аналізу Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, доктор фіз.-мат. наук, професор **Шевчук І.О.**,
вчитель-методист Житомирського обласного педагогічного ліцею **Литвинчук П.В.**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник (лист №14/18.2-1239 від 29 серпня 2001 р.)

Сарана О.А.

С 20 Математичні олімпіади: просте і складне поруч : Навчальний посібник. – Житомир: ЖДПУ, 2002.- 298 с., іл.
ISBN 966-7603-52-0

Посібник призначений для використання при проведенні факультативної роботи з математики та для підготовки до участі в математичних олімпіадах.

В посібнику описано основні методи та ідеї розв'язування олімпіадних задач, які недостатньо вивчаються в шкільному курсі математики. Кожен метод супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування. Всього запропоновано понад 900 задач, з них 196 подано з розв'язком, до інших наведено відповіді чи вказівки. Наведено приклади завдань обласних та Всеукраїнських олімпіад юних математиків за 1997-1999 роки.

Посібник адресовано учням старших класів, вчителям, керівникам гуртків, студентам математичних спеціальностей вищих педагогічних закладів. Рекомендується для підготовки до олімпіад.

УДК 510(023)
ББК 22.10

ISBN 966-7603-52-0

Від автора

Даний посібник написано з метою створення книги, за допомогою якої учень школи зміг би самостійно (можливо, без допомоги вчителя) підготуватися до успішного виступу на обласній чи Всеукраїнській математичній олімпіаді. Тому посібник в основному орієнтується на задачі міських, обласних та національних олімпіад. При підборі задач я виходив з досвіду проведення факультативних занять по розв'язуванню олімпіадних завдань в Житомирському педагогічному університеті та Житомирському міському ліцеї при ЖІТІ. При цьому з метою забезпечення достатньої для факультативної роботи кількості задач використано багато задач, які пропонувались на Київських, Всеукраїнських та Соросівських олімпіадах. Також включено деякі задачі, складені автором. Всього в посібнику дано 196 задач з повними розв'язками, більше 700 задач з відповідями та вказівками та 100 задач для самостійного розв'язування (без відповідей та вказівок). Також наведено приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків за 1997-1999 роки.

Засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від учня напруженої, активної та кропіткої самостійної роботи. Хочу нагадати вислів відомого математика Д. Пойа, який учень повинен пам'ятати завжди: "Розв'язування задач – практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах чи грі на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад з кращих зразків та постійно практикуючись… Та пам'ятайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо входьте в воду, а якщо хочете навчитись розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх".

З метою економії часу при проведенні занять математичного гуртка краще, щоб учні опрацювали теоретичний матеріал та задачі з розв'язками вдома, а під час занять – розв'язувати ті задачі, що дані в посібнику без розв'язку. При підготовці до олімпіад роботу з даним посібником також варто поєднувати з роботою над рекомендованою в кінці посібника літературою.

Крім цього, якісну підготовку до олімпіад рівня обласних та національних неможливо проводити без журналу "У світі математики" (передплатний індекс 74581). Це єдиний в Україні науково-популярний математичний журнал для школярів та студентів. Журнал публікує повну інформацію про Міжнародні, Всеукраїнські, Соросівські математичні олімпіади, про математичні олімпіади Київського університету, інформує майбутніх абітурієнтів про задачі вступних екзаменів до вищих навчальних закладів України. В розділі журналу "Математичний гурток" також публікуються статті про специфічні підходи при розв'язуванні олімпіадних задач.

Після номеру кожної задачі даного посібника (в дужках) вказано класи, для яких можна пропонувати дану задачу. Після номерів деяких задач додатково вказано, на якій олімпіаді пропонувалась ця задача і в якому році (при цьому номер класу вказано на час проведення олімпіади). Прийнято такі скорочення: ММО – міжнародна математична олімпіада, УМО – Всеукраїнська математична олімпіада, ОМО – обласна математична олімпіада, КМО – Київська математична олімпіада, СМО – Соросівська математична олімпіада, РМО – Всеросійська математична олімпіада, ВТЮМ – Всеукраїнський турнір юних математиків. Багато задач наведено з повним розв'язком. Часто задача у посібнику подається не лише з розв'язком, а й з коментарями до нього. При цьому в багатьох задачах акцентується увага не на самому розв'язку, а на тому, як до нього можна прийти. До деяких задач на доведення, розв'язання яких не потребує особливих ідей, вказівок не наведено.

Висловлюю вдячність ректору Житомирського державного педагогічного університету імені Івана Франка професору І.М.Кучеруку за допомогу при випуску цієї книги та завідувачу кафедри математичного аналізу О.Ф.Герусу за ідею написання такої книги.

"Кожна розв'язана мною задача ставала зразком, який служив потім для розв'язування інших задач".

Р. Декарт.

Частина І. Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

Розв'язування олімпіадних завдань служить доброю підготовкою до майбутньої наукової діяльності, хоча при розв'язуванні цих задач не потрібно особливих знань, що виходять за межі шкільної програми. Вміння розв'язувати нестандартні задачі свідчить про глибоке володіння математичним апаратом, а володіння предметом набагато важливіше, ніж тільки "чисті знання", які завжди можна поповнити за допомогою хороших довідників.

При розв'язуванні нестандартних задач часто допомагають загальні підходи:

1) перетворити задачу до вигляду, зручного для розв'язування;
2) розглянути частковий, найбільш простий випадок, а потім узагальнити ідею розв'язку;
3) розбити задачу на кілька простих підзадач;
4) узагальнити задачу. Часто дослідження більш зальної проблеми вимагає менших зусиль ніж дослідження її часткового випадку – "парадокс винахідника".

В даній частині книги розглядаються деякі специфічні підходи до розв'язування нестандартних задач. Звичайно, найкращий спосіб засвоєння певного методу розв'язування задач – "відкрити" цей спосіб самостійно. Але "відкривати велосипед" в XXI столітті – не зовсім раціонально, краще відомі методи використовувати для розв'язання нових проблем.

§ 1. Індукція і метод математичної індукції

Що таке *індукція* ? Найпростіша відповідь: перехід від частинного до загального. Розглянемо це на добре відомому прикладі.

Задача 1.1 (9-11). Знайти формулу для суми

$$B_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Розв'язання: Обчислимо B_n при перших значеннях n. Маємо $B_1 = 1$, $B_2 = 5$, $B_3 = 14$, $B_4 = 30$, $B_5 = 55$, $B_6 = 91$. Замітити закономірність дуже важко. Але добре відома формула суми перших n натуральних чисел:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Позначимо $A_n = \dfrac{(n+1)n}{2}$ і порівняємо B_n з A_n. Для цього знайдемо їх відношення. $\dfrac{B_1}{A_1} = 1$, $\dfrac{B_2}{A_2} = \dfrac{5}{3}$, $\dfrac{B_3}{A_3} = \dfrac{7}{3}$, $\dfrac{B_4}{A_4} = \dfrac{9}{3}$, $\dfrac{B_5}{A_5} = \dfrac{11}{3}$, $\dfrac{B_6}{A_6} = \dfrac{13}{3}$. Видно, що при перших n вірно $\dfrac{B_n}{A_n} = \dfrac{2n+1}{3}$. Ця гіпотеза отримана по індукції. Якщо вона вірна, то будемо мати

$$B_n = A_n \frac{(2n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Спробуємо довести нашу гіпотезу. Очевидно, що для її справедливості достатньо виконання рівності $B_{n+1} - B_n = (n+1)^2$, або

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)^2,$$

у чому неважко переконатись. Отже,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1) \; \blacksquare$$

Проаналізуємо, чому для довільного $n \in N$ вірна рівність (1) ?

Цю рівність можна вважати ***рядом пронумерованих тверджень***:

$$T_1: \quad 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

$$T_2: \quad 1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6},$$

....

$$T_n: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$T_{n+1}: \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

....

Чому всі ці твердження вірні?

По перше, твердження T_1, T_2, T_3 ми перевірили (до речі, можна обмежитись T_1, якби рівність (1) була дана в готовому вигляді).

По друге, з істинності твердження T_n випливає істинність твердження T_{n+1}.

Це нагадує ряд кісточок доміно, вишукованих в ряд: ви штовхаєте одну кісточку – вона валить другу, друга – третю і так до тих пір, поки не впадуть всі.

Така схема доведення ряду пронумерованих тверджень називається ***методом математичної індукції.*** При користуванні цим методом потрібно доводити два пункти:

(Б): перше або кілька перших тверджень істинні;

(П): з істинності довільного твердження випливає істинність наступного твердження.

Зауважимо, що при доведенні пункту (П) можна користуватися істинністю кількох (можливо, всіх) попередніх тверджень.

Теорема (Б) називається ***базою індукції***, теорема (П) – ***індукційним переходом***.

Варто відзначити, що з істинності як завгодно великої кількості перших тверджень $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ще не випливає істинність твердження T_n при довільному $n \in N$. Наприклад, розглянувши перші члени послідовності $a_n = n^2 - n + 41$, $n \ge 1$ отримуємо $a_1 = 41, a_2 = 43, a_3 = 47, \ldots$, звідки можна зробити невірний висновок, ніби всі члени цієї послідовності є простими числами. Але це не так: $a_{41} = 41^2$ є складеним числом.

Іноді для перевірки правдоподібних тверджень потрібно докласти серйозних зусиль. Наприклад, довгий час залишалось неперевіреним припущення про те, що числа вигляду $F_n = 2^{2^n} + 1,\ n \in N$ є простими (вперше це припущення сформулював в 17 столітті відомий математик Ферма). Лише через кілька десятків років Ейлер показав, що при $n = 5$ отримуємо складене число $F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Метод математичної індукції в елементарній математиці застосовується до доведення багатьох задач, серед яких можна виділити три важливі групи: ***доведення рівностей, доведення нерівностей, задачі на подільність.*** Також можуть бути комбіновані задачі. Розглянемо кілька прикладів.

Задача 1.2 (9-10). Довести, що для довільного $n \in N$ та довільних чисел $a, b \in R$ виконується рівність

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a(a+nb)} \tag{2}$$

Розв'язання. При $n = 1$ твердження очевидне.

Покажемо, що з істинності рівності (2) (твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1}, тобто що

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)} +$$

$$+ \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}.$$

Перетворимо ліву частину твердження T_{n+1}, використовуючи твердження T_n:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \ldots + \frac{1}{(a+(n+1)b)(a+nb)} +$$

$$+ \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{n}{a(a+nb)} + \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)} =$$

$$= \frac{na + n(n+1)b + a}{a(a+nb)(a+(n+1)b)} = \frac{(n+1)a + n(n+1)b}{a(a+(n+1)b)(a+nb)} = \frac{n+1}{a(a+(n+1)b)}.$$

За математичною індукцією рівність (2) вірна для довільного $n \in N$. ■

Задача 1.3 (9-10). Для довільного $n \in N$ довести нерівність

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 .. (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \tag{3}$$

Розв'язання. При $n = 1$ маємо $\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Покажемо, що з істинності нерівності (3) (твердження T_n) випливає істинність твердження T_{n+1}, тобто нерівність

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Оцінимо ліву частину цієї нерівності, використовуючи оцінку (3). Маємо

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \cdot (2n+2)} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}.$$

Очевидно, що для істинності твердження T_{n+1} достатньо виконання нерівності $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \le \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, що рівносильна при $n \in N$ очевидній нерівності $(2n+1)(2n+3) \le (2n+2)^2$.

За математичною індукцією нерівність (3) вірна для довільного $n \in N$. ■

Задача 1.4 (9). Довести, що при довільному $n \in N$ число $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

Розв'язання. При $n = 1$ маємо $4 + 15 - 1 = 18$, ділиться на 9.

Покажемо, що з твердження T_n: "$4^n + 15n - 1$ ділиться на 9" випливає твердження T_{n+1}: "$4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ділиться на 9". Маємо

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 =$$

$$= (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot 4^n + 15 = (4^n + 15n - 1) + 3 \cdot (4^n + 5).$$

Тому з врахуванням істинності твердження T_n для істинності твердження T_{n+1} достатньо, щоб при довільному $n \in N$ число $(4^n + 5)$ ділилося на 3. Це твердження можна доводити окремо так само методом математичної індукції, але є простіший шлях : $4^n = (3+1)^n$, тому при діленні на 3 дає залишок 1, звідки $(4^n + 5)$ ділиться на 3.

За математичною індукцією твердження задачі вірне для довільного $n \in N$. ■

Задача 1.5 (ОМО-1996, 11). Послідовність $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ побудована таким чином, що $a_0 = 0, a_1 = k, a_{n+2} = k^2 a_{n+1} - a_n$ для всіх $n \geq 0$ (k - деяке натуральне число). Довести, що при довільному $n \geq 0$ число $(a_{n+1}^2 + a_n^2)$ ділиться на число $(a_{n+1} \cdot a_n + 1)$.

Розв'язання. Знайдемо перші члени послідовності та перевіримо при перших значеннях n твердження задачі. Маємо $a_2 = k^3$, $a_3 = k^5 - k$, $a_4 = k^7 - 2k^3$. Результати зручно занести в таблицю:

n	$a_{n+1}^2 + a_n^2$	$a_{n+1} \cdot a_n + 1$
0	$k^2 + 0^2 = k^2$	1
1	$k^6 + k^2 = k^2(k^4 + 1)$	$k^4 + 1$
2	$k^{10} - k^6 + k^2 = k^2(k^8 - k^4 + 1)$	$k^8 - k^4 + 1$

Виникає гіпотеза, що при кожному $n = 0, 1, 2 \dots$ виконується рівність

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = k^2(a_{n+1} \cdot a_n + 1)$$

(твердження T_n). Оскільки твердження T_0, T_1, T_2 вірні, то достатньо довести, що з твердження T_n випливає твердження T_{n+1}, тобто

$$a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 = k^2(a_{n+2} \cdot a_{n+1} + 1).$$

Маємо

$$a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 = (k^2 a_{n+1} - a_n)^2 + a_{n+1}^2 = k^4 a_{n+1}^2 - 2k^2 a_{n+1} a_n +$$
$$+ (a_n^2 + a_{n+1}^2) = k^4 a_{n+1}^2 - 2k^2 a_{n+1} \cdot a_n + k^2(a_{n+1} \cdot a_n + 1) =$$
$$= k^2(k^2 a_{n+1}^2 - a_{n+1} a_n + 1) = k^2(a_{n+1}(k^2 a_{n+1} - a_n) + 1) =$$
$$= k^2(a_{n+1} a_{n+2} + 1).$$

За математичною індукцією твердження T_n вірне при довільному $n = 0, 1, 2, \dots$, що рівносильно твердженню задачі. ■

Задача 1.6 (9-11). Довести, що в опуклому n-кутнику не можна вибрати більше n діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку.

Розв'язання. Доведемо більш загальне твердження: в опуклому n-кутнику не можна вибрати більше n сторін та діагоналей так, щоб будь-які дві з них мали спільну точку. При $n = 3$ твердження очевидне. Припустимо, що це твердження вірне для довільного опуклого n-кутника та, використовуючи це, доведемо його для довільного $(n+1)$-кутника.

Припустимо, що для $(n+1)$-кутника це твердження не вірне. Якщо з кожної вершини $(n+1)$-кутника виходить не більше двох вибраних сторін чи діагоналей, то всього їх вибрано не більше ніж $n+1$. Тому з деякої вершини A виходить хоча б три вибраних сторони чи діагоналі AB, AC, AD. Нехай AC лежить між AB і AD. Оскільки будь-яка сторона чи діагональ, яка виходить з точки C і відмінна від CA, не може одночасно перетинати одночасно AB і AD, то з точки C виходить лише одна вибрана діагональ CA.

Відкинувши точку C разом з діагоналлю CA, отримаємо опуклий n-кутник, в якому вибрано більше n сторін та діагоналей, будь-які дві з них мають спільну точку. Протиріччя з припущенням, що твердження вірне для довільного опуклого n-кутника.

Отже, для $(n+1)$-кутника це твердження вірне. За принципом математичної індукції твердження вірне для довільного опуклого n-кутника. ■

Задача 1.7 (2 СМО-1995, 10). Чи можливо множину натуральних чисел, відмінних від 1, розбити на дві непорожні підмножини таким чином, щоб для будь-яких чисел m і n (можливо рівних) з однієї з підмножин число $mn - 1$ належало тій же підмножині?

Розв'язання. Припустимо, що можна. Нехай A і B - такі підмножини, причому $2 \in A$. Очевидно, що числа m і $m^2 - 1$ належать одній підмножині. Тоді послідовно отримуємо: $2^2 - 1 = 3 \in A, 3^2 - 1 = 8 \in A$, $2 \cdot 8 - 1 = 15 \in A$. Але $15 = 4^2 - 1$, тому $4 \in A$. Аналогічно отримуємо $2 \cdot 3 - 1 = 5 \in A$, $2 \cdot 4 - 1 = 7 \in A$, $4 \cdot 9 - 1 = 35 \in A$, тому $6 \in A$. Виникає припущення, що всі числа належать множині A. Щоб довести це, спочатку методом математичної індукції покажемо, що при довільному

$n \in N$ непарні числа $2^n+1, 2^n+3, 2^n+5, \ldots, 2^{n+1}-1$ та число 2^n належать множині A (твердження T_n).

База індукції доведена.

Покажемо, що з тверджень $T_1, T_2, \ldots, T_n$ випливає твердження T_{n+1}, тобто, що непарні числа $2^{n+1}+1, 2^{n+1}+3, 2^{n+1}+5, \ldots, 2^{n+2}-1$ і число 2^{n+1} також належать множині A.

Нехай a таке непарне число, що $2^{n+1}+1 \le a \le 2^{n+2}-1$. Тоді існують такі натуральне $p \le n$ і непарне k, що $a = 2^p \cdot k - 1$. Якщо $k \ge 3$, то $1 \le p \le n$, $k < 2^{n+1}$ і за припущенням $2^p \in A, k \in A$, тому $a \in A$. Якщо ж $k=1$, то $a = 2^{n+2}-1 = 2^n \cdot 4 - 1 \in A$, тому що $4 \in A$ і за припущенням $2^n \in A$.

Доведемо, що число 2^{n+1} належить множині A.

Якщо n - парне число, то 2^{n+1} при діленні на 3 дає залишок 2, тобто $2^{n+1} = 3k-1$, причому $k < 2^{n+1}$ - деяке непарне число (бо інакше число 2^{n+1} мало б бути непарним). Враховуючи, що $3 \in A$ і за припущенням $k \in A$, отримуємо, що $2^{n+1} \in A$.

Якщо ж n - непарне число, то 2^{n+2} при діленні на 3 дає залишок 2, тобто $2^{n+2} = 3k-1$, причому $k < 2^{n+1}$ - деяке непарне число. Тому аналогічно отримуємо $2^{n+2} \in A$.

Оскільки $2^n \in A$, $2^{n+2} \in A$, то й число $2^{n+2} \cdot 2^n - 1 = \left(2^{n+1}\right)^2 - 1 \in A$, а тому й $2^{n+1} \in A$.

За принципом математичної індукції всі непарні числа, відмінні від 1, та числа вигляду 2^n належать множині A.

Нехай m - парне число. Тоді непарне число $m^2-1 \in A$ за доведеним вище, а тому $m \in A$.

Отже, всі натуральні числа, відмінні від 1, належать множині A і тому B - порожня множина.

Відповідь: вказане розбиття не можливе. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.8 (8-9). З квадрата 128×128 вирізали одну клітинку 1×1. Довести, що отриману фігуру можна замостити фігурами, що є куточками з трьох клітинок 1×1.

Задача 1.9 (9). Довести що число, яке складається з 243 одиниць, ділиться на 243.

Задача 1.10 (9-10) (підсилення задачі 1.3). Довести нерівність

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Задача 1.11 (9-10). Довести, що при всіх додатних x і при довільному натуральному n вірна нерівність

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \ldots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \ge n+1.$$

Задача 1.12 (9-10). Довести, що при довільному натуральному $n \ge 2$ вірна нерівність.

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Задача 1.13* (9-11). Довести, що серед довільних 2^{n+1} натуральних чисел можна вибрати рівно 2^n чисел, сума яких ділиться на 2^n.

Задача 1.14 (9-10). Довести, що $2^{m+n-2} \ge mn$ при всіх натуральних m і n.

Задача 1.15 (9-10). Відомо, що $x + \frac{1}{x}$ - ціле число. Довести, що при довільному $n \in N$ число $x^n + \frac{1}{x^n}$ теж ціле.

Задача 1.16 (9-11). Довести, що при всіх натуральних n виконується нерівність

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Задача 1.17 (9-10). Довести, що число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1995}$ представляється у вигляді $a\sqrt{3} - b\sqrt{2}$, $a, b \in Z$, причому $3a^2 - 2b^2 = 1$.

Задача 1.18 (9-10). Для всіх натуральних n довести нерівність

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Задача 1.19 (ОМО-1995, 10). Про дійсне число k та послідовність дійсних чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots$ відомо, що $u_0=1$, $u_{1995}=100$, $u_1 \cdot u_2>0$, $u_{n+1}\cdot u_{n-1}=k\cdot u_n$ для всіх натуральних n. Знайти k.

Задача 1.20 (УМО-1965, 10). У шаховому турнірі брало участь n шахістів. Кожний шахіст зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась внічию. Довести, що за результатами турніру всіх шахістів можна перенумерувати в такому порядку, щоб кожен попередній був переможцем наступного.

Задача 1.21 (УМО-1967, 10). Довести, що

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

(тут знак кореня зустрічається точно n разів).

Задача 1.22 (КМО-1970, 9). Довести, що при будь-якому натуральному n число $A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ ділиться на 8.

Задача 1.23 (9-10). Обчислити суму $1^3+2^3+3^3+\cdots+2^3$.

Задача 1.24 (9-10). Обчислити суму $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$.

Задача 1.25 (11). На площині дано $2n+1$ точок, які є вершинами деякого опуклого $2n+1$-кутника. Побудуйте $2n+1$-кутник, для якого ці точки є серединами сторін.

Задача 1.26 (9-10). Дано декілька квадратів загальної площі 1. Доведіть, що їх можна розмістити без накладань всередині квадрата з стороною 2.

Задача 1.27 (11). Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентним способом:

$$a_1=a_2=1 \text{ і } a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2^n}$$

для всіх $n\in N$. Доведіть нерівність $a_n<3$ для довільного $n\in N$.

Задача 1.28 (11). Доведіть, що коли $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ - дійсні числа, такі, що $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1$, $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_2,\ldots,\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_n$ - раціональні, а суми

$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m$ не дорівнюють $\frac{\pi}{2}+\pi k$ при довільному $m=1,2,\ldots,n$ і довільному $k\in Z$, то число $\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)$ також раціональне.

Задача 1.29 (10-11). Доведіть, що n площин ділять простір не більше ніж на $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ частин.

Задача 1.30 (УМО-1981, 9). Після піднесення до степеня та зведення подібних членів число $\left(\sqrt{13}-1\right)^{1981}$ зводиться до вигляду $a+b\sqrt{13}$, де a,b - цілі числа. Довести, що числа a і b діляться на 2^{1980}.

Задача 1.31 (5 СМО-1998, 9). Нехай $a_1,a_2,\ldots,a_n$ - попарно різні натуральні числа.

1) Доведіть нерівність $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$;

2) знайдіть усі набори $a_1,a_2,\ldots,a_n$, для яких має місце рівність.

Задача 1.32 (5 СМО-1998, 9). У кожній вершині опуклого 1998-кутника розташовані жетони, на кожному з яких написане ціле число (на різних жетонах числа можуть бути і різними, і однаковими). Сума усіх цих чисел дорівнює 1. Вибирають вершину і збирають жетони, рухаючись проти годинникової стрілки доти, доки сума чисел на зібраних жетонах додатна. Чи можна вибрати вершину так, щоб стартуючи з неї, зібрати всі жетони?

Задача 1.33 (5 СМО-1998, 10). Про функцію f, яка визначена на множині всіх дійсних чисел, відомо, що:

1) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ для $0\le x\le 2$;

2) $f(x)=f(x+2)$ для всіх $x\in R$.

Доведіть, що для дійсних чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ таких, що $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, виконується нерівність

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\ge 1.$$

Задача 1.34 (УМО-2000, 11). В деякий нульовий момент часу в початку прямокутної системи координат Oxy знаходиться вірус грипу. Через одну хвилину він розпадається на чотири таких же віруси, кожний з яких переміщується на одиницю довжини: один – вище, один – нижче, один лівіше і один правіше в системі координат. Таке перетворення відбувається через кожну хвилину з кожним вірусом. Якщо в деякий момент часу в одній точці опиняються два або більше вірусів, то всі вони миттєво взаємознищуються. Розглянемо такий процес від початкового (нульового) моменту часу до моменту в 2000 хвилин включно.

1) Скільки раз на протязі інтервалу часу від моменту 1 хвилина включно до моменту 2000 хвилин включно загальна кількість вірусів буде набувати свого мінімального значення на цьому інтервалі часу?
2) Скільки вірусів будуть існувати в момент часу 2000 хвилин (одразу після взаємознищення вірусів в цей момент часу)?

Задача 1.35 (8-9). Довести, що якщо n точок не лежать на одній прямій, то серед прямих, які їх з'єднують, не менше ніж n різних.

Задача 1.36 (9-10). Довести, що при довільному $n \in N$ число $2^{3^n}+1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2}.

Задача 1.37 (2 СМО-1995, 10). На прямій вибрали n різних точок $A_1, A_2, \dots, A_n$. Нехай M - множина середин відрізків $A_iA_j, 1 \le i \le j \le n$. З якої найменшої кількості різних точок може складатись множина M ?

Вказівки та відповіді до задач

1.8. Вказівка: провести індукцію по квадратам $2^n \times 2^n$. **1.9.** Вказівка: $243 = 3^5$, провести індукцію по числам з 3^n одиниць. **1.11.** Вказівка: перевірити нерівність при $n=1$, $n=2$ та провести індукцію від n до $n+2$). **1.13.** Вказівка: індукційний перехід проводиться так: розіб'ємо 2^{n+1} чисел на дві групи по 2^n чисел в кожній. За припущенням в кожній з цих груп можна вибрати по 2^{n-1} чисел, сума яких ділиться на 2^{n-1}. Потім з 2^n чисел, які залишилися, можна вибрати третій набір з 2^{n-1} чисел, сума яких ділиться на 2^{n-1}. Нехай суми чисел у вибраних наборах рівні $2^{n-1}a$, $2^{n-1}b$, $2^{n-1}c$. Серед чисел a,b,c є два числа однакової парності. Відповідні їм набори об'єднуємо в один набір з 2^n чисел, сума яких ділиться на 2^n. **1.17.** Вказівка: провести індукцію по непарним показникам степеня від m до $m+2$. **1.18.** Вказівка: доведіть більш точну нерівність: а саме, що ліва частина нерівності не перевищує $1-\dfrac{1}{n}$. **1.19.** Вказівка: покажіть, що послідовність періодична. **1.20.** Вказівка: поставити $n+1$-го шахіста перед тим шахістом з впорядкованого списку інших n шахістів, який програв цьому $n+1$-му шахісту і має серед таких шахістів мінімальний номер. **1.23.** Відповідь: $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. **1.24.** Відповідь: $n^2(2n^2-1)$. **1.25.** Вказівка: при доведенні кроку індукції від $2n+1$ точки до $2n+3$ точок $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{2n+3}$ використати припущення індукції стосовно точок $A_1, A_2, \dots, A_{2n}, A$, де A - четверта вершина паралелограма $A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{2n+3}, A$. **1.26.** Вказівка: доведіть більш загальне твердження: n квадратів загальної площі S можна розмістити без накладань всередині квадрата з стороною $2\sqrt{S}$. Для цього розгляньте найбільший квадрат. **1.27.** Вказівка: доведіть індукцією від n до $n+2$ більш загальне твердження: $a_n < 3 - \dfrac{12}{2^n}$. **1.30.** Вказівка: розгляньте послідовності цілих чисел a_n, b_n таких, що $\left(\sqrt{13}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{13}$. Тоді $a_{n+1} = 12a_{n-1} - 2a_n$, $b_{n+1} = 12b_{n-1} - 2b_n$. **1.31.** Відповідь: 2) при $a_k = k, k = 1,2,\dots,n$. **1.32.** Вказівка: при доведенні індуктивного переходу деякі дві сусідні вершини (такі, що в першій з них при русі проти годинникової стрілки записано додатне число, сума якого з наступним - додатна) об'єднайте в одну. **1.33.** Вказівка: доведіть більш загальну нерівність $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \ge f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. **1.34.** Відповідь: 4096 вірусів. Вказівка: доведіть, що через $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$ хвилин, $k_1 > k_2 > \dots > k_m \ge 0$, на площині після взаємознищення залишиться 4^m вірусів. **1.37.** Відповідь: $2n-3$. Вказівка: у випадку, коли координати даних точок утворюють арифметичну прогресію, множина M складається з точно $2n-3$ різних точок. Доведіть методом математичної індукції, що з меншої кількості точок множина M складатись не може.

§ 2. Доведення від супротивного

Хоч деякі відомі математики не визнавали цей метод, уявити без цього методу сучасну математику неможливо. Міркування приблизно такі: "Припустимо, що твердження задачі не вірне. Якщо з цього припущення отримаємо протиріччя, то твердження задачі вірне". Як бачимо, цей метод опирається на логічний закон виключеного третього.

Доведення від супротивного використовується при розв'язуванні різноманітних задач.

Задача 2.1 Довести, що простих чисел нескінченно багато.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що простих чисел скінченна кількість, а саме $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ - всі прості числа.

Тоді число $A = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ також просте , бо не ділиться на жодне з чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Протиріччя з припущенням. Отже, простих чисел нескінченно багато. ■

Задача 2.2 (10-11). Довести, що не існує трикутної піраміди, в якої до кожного ребра прилягає тупий кут на одній з граней.

Розв'язання. Припустимо, що така піраміда існує. Оскільки в трикутнику проти тупого кута лежить найдовша сторона, то для кожного ребра знайдеться довше ребро. Це неможливо, оскільки кількість ребер скінченна. Протиріччя. ■

Задача 2.3 (10-11). По колу написано в довільному порядку 4 одиниці та 5 нулів. Над ними виконується наступна операція: між однаковими цифрами пишуть нуль, а між різними – одиницю, після чого попередні цифри витирають. Потім така ж операція виконується над отриманими цифрами і т.д. Довести, що після кількох таких операцій неможливо отримати 9 нулів.

Розв'язання. Припустимо, що після k таких операцій отримано 9 нулів. Тоді після $(k-1)$-ої операції всі цифри на колі повинні були бути рівні одиниці, а тому після $(k-2)$-ої операції довільні дві сусідні цифри на колі повинні були бути різні. Тоді нулів мало бути стільки ж, скільки й одиниць, звідки отримуємо, що загальна кількість цифр є парним числом. Протиріччя з умовою. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 2.4 (8-9). По колу розставлено 100 чисел. Відомо, що кожне число дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх. Довести, що всі числа рівні.

Задача 2.5 (8-9). Чи існує опуклий многокутник, у якого більше трьох гострих кутів ?

Задача 2.6 (8-9). Довести, що якщо $(m-1)!+1$ ділиться на m, то m просте.

Задача 2.7 (7-9). Довести, що серед будь-яких 5 чоловік є двоє з однаковою кількістю знайомих серед цих чоловік. (Можливо, ці двоє ні з ким не знайомі).

Задача 2.8 (УМО-1965, 11). У шаховому турнірі брало участь n шахістів. Кожний шахіст зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась внічию. Відомо, що кожен шахіст знає прізвища учасників турніру, яких він переміг, а також прізвища тих, кого перемогли переможені ним. Довести, що є учасник, який знає прізвища всіх шахістів, що беруть участь у турнірі.

Задача 2.9 (10-11). Довести, що число $\cos\frac{\pi}{2^n}$ при довільному натуральному n $(n \geq 2)$ є числом ірраціональним.

Задача 2.10 (9-10). На площині дано n точок, причому відомо, що кожні чотири з них є вершинами опуклого чотирикутника. Довести, що всі n точок є вершинами опуклого n-кутника.

Задача 2.11 (10-11). В народну дружину входить 50 чоловік, і кожен вечір на чергування виходять троє. Доведіть, що не можна організувати графік чергування так, щоб довільні два чоловіки чергували разом рівно один раз.

Задача 2.12 (УМО-1978, 9). Довести, що при будь-якому натуральному n число $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}}}$ не є цілим.

Задача 2.13 (9-10). Довести, що якщо числа $a, b, c \in R$ задовільняють нерівності

$$a+b+c>0, ab+bc+ca>0, abc>0,$$

то всі ці числа додатні.

Задача 2.14 (12 РМО-1985, 10). Натуральні числа $1, 2, 3, \ldots, 3n$ довільним чином розбили на три групи, по n чисел в кожній. Довести, що з кожної групи можна вибрати по одному числу так, що одне з вибраних чисел дорівнює сумі двох інших.

Задача 2.15 (9). В рівнобедреній трапеції діагоналі перпендикулярні. Довести, що в таку трапецію не можна вписати коло.

Вказівки та відповіді до задач

2.4. Вказівка: розглянути найбільше (або найменше) число. **2.5.** Вказівка: використати формулу суми кутів опуклого многокутника. **2.8.** Вказівка: припустити, що шахіст, який виграв найбільшу кількість партій, не знає прізвища деякого шахіста. **2.11.** Вказівка: розгляньте розподіл чергувань між дружинниками, що мають чергувати разом з даним дружинником. **2.12.** Вказівка: припустивши супротивне, отримуємо $\sqrt[3]{n} = l \in N$, $\sqrt[3]{n+\sqrt[3]{n}} = k \in N, k^3 = l^3 + l \in \left(l^3;(l+1)^3\right)$. **2.14.** Вказівка: припустіть супротивне та розгляньте найменші числа a, b, c таких груп відповідно A, B, C. Тоді $a = 1, b \geq 2, c \geq 4$. Нехай s найменша з різниць чисел групи C. Розгляд випадків $s = 1, s = 2, s \geq 3$ приводить до протиріччя. **2.15.** Вказівка: нехай діагоналі трапеції точкою перетину діляться на відрізки довжинами x і y. Тоді, припустивши супротивне, отримуємо $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, звідки $x = y$.

§ 3. Елементи комбінаторики

Найпростішими поняттями комбінаторики, яких достатньо при розв'язуванні більшості олімпіадних завдань, є розміщення, перестановки, комбінації (без повторень). Кількість ***розміщень, перестановок ,комбінацій*** легко встановлюються за допомогою такого очевидного принципу: якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b після вибору елементу a можна вибрати k способами, то пару (a,b) можна вибрати mk способами.

Наведемо найпростіші означення. Нехай $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ множина, всі елементи якої різні. Спосіб розміщення її елементів у впорядкований ряд назвемо ***перестановкою із n елементів***. Кількість таких перестановок позначають P_n. Неважко показати, що

$$P_n = n!.$$

Різні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів. Тому можна сказати, що P_n це кількість різних способів, якими можна впорядкувати множину з n елементів.

Для перестановки чисел $1,2,3,\ldots,n$ підрахуємо кількість порушень порядку (тобто ситуацій, коли менше число стоїть після більшого). Якщо така кількість парна, то перестановка називається парною (відповідно – непарною).

Спосіб розміщення у впорядкований ряд k елементів з множини, що містить n різних елементів, назвемо ***розміщенням з n елементів по k***. Розміщення можуть відрізнятись як порядком елементів, так і способом їх вибору. Кількість розміщень з n елементів по k позначається A_n^k. Неважко показати, що

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Очевидно, що перестановка з n елементів – це частковий випадок розміщення з n елементів по k при $k = n$.

Спосіб вибору k елементів з множини, що містить n різних елементів, без врахування порядку цих k елементів назвемо ***комбінацією з n елементів по k***. Кількість комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k. Оскільки кожній комбінації з n елементів по k відповідає $k!$ розміщень з n елементів по k (отриманих всіма можливими перестановками), то

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

При обчисленнях зручно користуватись формулами

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \; C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

За допомогою останньої формули будується трикутник Паскаля.

В деяких задачах потрібно обчислити ймовірність певної події. Класичною ***ймовірністю*** $p(A)$ ***випадкової події*** A називають відношення кількості випадків, що сприяють події A, до кількості всіх рівноможливих попарно несумісних випадків, при яких може відбутися подія A.

Задача 3.1 (8-9). Скільки є способів вибрати команду з трьох учнів в класі, в якому навчається 25 чоловік.

Розв'язання. Першого учня можна вибрати 25 способами, другого – 24 способами, третього – 23 способами. Отримуємо $25 \cdot 24 \cdot 23$ варіантів вибору. Але при цьому кожна команда враховується кілька разів, бо одна і та ж трійка учнів A_1, A_2, A_3 може бути вибрана і як A_1, A_3, A_2, і як A_3, A_2, A_1 і т. д., всього $3!=6$ разів. Отже, кількість способів дорівнює $\frac{25\cdot 24\cdot 23}{6}=2300$. (Зауваження: результат можна було отримати як C_{25}^3).■

Задача 3.2 (9-11). Скількома способами можна розфарбувати круг, розбитий на p рівних секторів, за допомогою n фарб, якщо p – просте число і кожний сектор фарбуємо однією фарбою? Два розфарбовування, що співпадають при повороті круга, вважаємо однаковими.

Розв'язання. Оскільки кожен сектор можна пофарбувати будь-яким з n кольорів, то для круга з p секторами маємо n^p-n не однокольорових розфарбувань. Кожне з цих розфарбувань при поворотах переходить в $(p-1)$ однакове з ним (тут важлива умова, що p – просте число. Подумайте!). Тому кількість різних неоднокольорових розфарбувань рівна $\frac{n^p-n}{p}$, а загальна кількість розфарбувань рівна $\left(\frac{n^p-n}{p}+n\right)$. ■

Задача 3.3 (9-11). Довести, що якщо $a_n=1+q+q^2+\ldots+q^n$ та

$$b_n=1+\frac{1+q}{2}+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+q}{2}\right)^n, \text{ то}$$

$$C_{n+1}^1+C_{n+1}^2a_1+C_{n+1}^3a_2+\ldots+C_{n+1}^{n+1}a_n=2^nb_n.$$

Розв'язання. Достатньо показати, що в лівій та правій частині рівності, яку потрібно довести, коефіцієнти при q^k $(k=0,1,2,\ldots,n)$ рівні, тобто $C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n-k}C_k^k+2^{n-k-1}C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k$ (*).

Доведемо рівність (*) методом математичної індукції по $m=n-k$.

При $m=0$ маємо очевидну рівність $C_{n+1}^{n+1}=C_n^n$.

Припустимо, що рівність (*) виконується при всіх $m=0,1,2,\ldots,p-1$, та, виходячи з цього, доведемо рівність (*) при $m=p$. Маємо

$$C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}=(C_n^k+C_n^{k+1})+(C_n^{k+1}+C_n^{k+2})+\ldots+$$
$$+(C_n^{n-1}+C_n^n)+C_n^n=C_n^k+2\left(C_n^{k+1}+C_n^{k+2}+\ldots+C_n^n\right)=$$
$$=C_n^k+2\left(2^{n-1-k}C_k^k+2^{n-k-2}C_{k+1}^k+\ldots+C_{n-1}^k\right)=$$
$$=2^{n-k}C_k^k+2^{n-k-1}C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k. ■$$

Задача 3.4 (10-11). Довести, що при $0\le x\le\frac{1}{n}$ многочлен k-го степеня $1-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\ldots+(-1)^kC_n^kx^k$ приймає додатні значення.

Розв'язання. Розіб'ємо всі члени многочлена на пари, починаючи з вільного члена. При цьому, якщо старший член залишиться без пари, то його степінь парний, і тому він невід'ємний при всіх значеннях змінної x.

Розглянемо два послідовних члени многочлена, які утворюють пару. Маємо при $0\le 2m<k$ та $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

$$C_n^{2m}x^{2m}-C_n^{2m+1}x^{2m+1}=C_n^{2m}x^{2m}\left(1-\frac{n-2m}{2m+1}x\right)=$$
$$=C_n^{2m}x^{2m}\frac{2m+1-nx+2mx}{2m+1}=C_n^{2m}x^{2m}\frac{2m(1+x)+1-nx}{2m+1}\ge 0.$$

Звідси випливає твердження задачі. ■

Задача 3.5 (10-11). Для заданого значення $m\in N$:

1) довести, що число $\frac{C_{2m}^m}{m+1}$ є натуральним;

2) знайти найменше значення $k\in N$, для якого число $\frac{kC_{2n}^{n+m}}{n+m+1}$ є натуральним при кожному значенні $n\ge m$.

Розв'язання. 1) Маємо

$$\frac{C_{2m}^m}{m+1}=C_{2m}^m\left(1-\frac{m}{m+1}\right)=C_{2m}^m-\frac{(2m)!}{(m!)^2}\cdot\frac{m}{m+1}=$$
$$=C_{2m}^m-\frac{(2m)!}{(m+1)!(m-1)!}=C_{2m}^m-C_{2m}^{m+1}.$$

Отже, $\frac{C_{2m}^m}{m+1}$ є натуральним числом як різниця двох натуральних чисел.

2) Оскільки при $n = m$ число $\frac{kC_{2n}^{n+m}}{n+m+1} = \frac{k}{2m+1}$ має бути натуральним, то шукане k повинно ділитись на $(2m+1)$, а тому $k \geq 2m+1$.

Нехай $k = 2m+1$. Тоді при $n > m$ число

$$\frac{kC_{2n}^{n+m}}{n+m+1} = C_{2n}^{n+m}\left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right) = C_{2n}^{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}\frac{n-m}{n+m+1} =$$

$$= C_{2n}^{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!} = C_{2n}^{n+m} - C_{2n}^{n+m+1} > 0,$$

оскільки $n < n+m < n+m+1$, а біноміальні коефіцієнти C_{2n}^p починаючи з $p = n+1$ спадають. Очевидно, що в цьому випадку число $\frac{kC_{2n}^{n+m}}{n+m+1}$ є цілим. ■

Задача 3.6 (ОМО-2000, 11). Множина X складається з шести попарно різних елементів. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_9$ - такі підмножини X, що кожна з них містить по три попарно різних елементи. Доведіть, що існує "пофарбування" елементів множини X в два кольори (тобто, кожному елементу ставиться у відповідність один з двох кольорів) таке, що в кожній множині $A_i, 1 \leq i \leq 9$, буде принаймні два різнокольорових елемента.

Розв'язання. Розглянемо трьохелементні множини $X \setminus A_1, \ldots, X \setminus A_9$. Всього є $C_6^3 = 20$ трьохелементних підмножин X, тому знайдеться трьохелементна множина $B \subset X$, яка не співпадає з жодною з множин $A_i, X \setminus A_i, 1 \leq i \leq 9$. Пофарбувавши елементи множини B в один колір, а елементи множини $X \setminus B$ - в інший, отримуємо потрібне розфарбування. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.7 (8-9). Скількома способами можна вибрати з неповної колоди карт (32 карти) 10 карт так, щоб:
а) серед них був рівно один туз;

б)серед них був хоча б один туз.

Задача 3.8 (9). Обгрунтувати за допомогою комбінацій біном Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Задача 3.9 (9). Довести формулу

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Задача 3.10 (9-10). Є $2m$ однакових білих кульок і $3n$ однакових чорних кульок. Скількома способами з них можна вибрати $m+n$ кульок.

Задача 3.11 (9). Є 20 гирьок, кожна з яких має по цілому числу грамів, сумарна маса яких не перевищує однієї тони. Доведіть, що з них можна вибрати дві групи (які не перетинаються) однакової маси.

Задача 3.12 (10-11). Дано правильний $(2n+1)$-кутник. Знайти кількість трикутників, вершини яких співпадають з вершинами даного $(2n+1)$-кутника і які містять його центр.

Задача 3.13 (9-11). 239 автомобілів цілий день їздили по круговій дорозі в одному напрямку, а ввечері опинились на тих же місцях, звідки починали рухатись вранці. Доведіть, що вони здійснили парну кількість обгонів.

Задача 3.14 (7-8). Скільки існує семизначних чисел, сума цифр яких парна?

Задача 3.15 (11). Проводиться випадковий вибір одного з дев'яти чисел 1, 2, ..., 9. Вибір кожного з чисел рівноможливий. Визначити ймовірність того, що після n виборів ($n > 1$) добуток чисел буде ділитись на 10.

Задача 3.16 (11). З вершин заданого правильного $(2n+1)$-кутника випадково вибираються три різні вершини. Вважаючи такі вибори рівноможливими, знайти ймовірність того, що центр даного многокутника буде лежати всередині трикутника з вершинами у вибраних точках.

Задача 3.17 (8-9). З групи, в яку входять 7 хлопчиків і 4 дівчини, потрібно скласти команду з 6 чоловік так, щоб вона містила не менше двох дівчат. Скільки є способів так зробити?

Задача 3.18 (9-11). На площині дано три точки A, B, C. Проведемо m прямих через точку A, n прямих через точку B, k прямих через точку C так, щоб в сукупності ці прямі були прямими загального положення (тобто жодні дві з них не паралельні та жодні три з них не перетинаються в одній точці, відмінній від точок A, B, C) та такі, що жодна з прямих не проходить через дві з даних точок. Знайти число трикутників, вершини яких є точками перетину цих прямих та не співпадають з точками A, B, C.

Задача 3.19 (9-10). Розв'язати рівняння

$$C_{x+2}^4 = x^2 - 1.$$

Задача 3.20 (9-10). Довести тотожність

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

Задача 3.21 (9-11). В ящику лежать декілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульку разом можна 120 способами, а дві білі та дві чорні разом – 2970 способами. Скільки в ящику білих кульок і скільки чорних?

Задача 3.22 (9-11). В ящику лежать білі, чорні та червоні пронумеровані кульки. Відомо, що взяти по одній кульці кожного кольору разом можна 64 способами, по дві кульки кожного кольору разом – 216 способами і по три кульки кожного кольору разом – 64 способами. Скільки кульк кожного кольору в ящику?

Задача 3.23 (9-11). Знайти всі натуральні числа n, для яких при деякому $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ виконується рівність $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$.

Задача 3.24 (8-9). Скількома способами можна розставити 8 білих і 8 чорних шашок на чорних полях шахової дошки 8×8.

Задача 3.25 (7-8). Скількома способами можна розбити 18 чоловік на пари?

Задача 3.26 (10-11). На площині дано $n > 4$ точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Показати, що можна знайти не менше ніж $\frac{C_n^5}{n-4}$ опуклих чотирикутники з вершинами в даних точках.

Задача 3.27 (9-11). Знайти коефіцієнт при x^4 в розкладі виразу

$$\left(1 + 2x + 3x^2\right)^{10}.$$

Задача 3.28 (9-11). Довести тотожність

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{n-1}^2 + C_n^2 = C_{n+1}^3.$$

Задача 3.29 (9-11). Спростити вираз

$$C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n.$$

Задача 3.30 (9-11). Спростити вираз

$$C_n^0 \cdot 2^{3n} + C_n^1 \cdot 2^{3n-2} + C_n^2 \cdot 2^{3n-4} + \ldots + C_n^n \cdot 2^{2n}.$$

Задача 3.31 (10-11). З 10 книг, що стоять на книжковій полиці – 3 з математики. Знайти ймовірність того, що вони стоять всі поруч.

Задача 3.32 (КМО-1953, 9). Скількома способами можна розставити на шахматній дошці дві тури так, щоб вони не загрожували одна одній?

Задача 3.33 (КМО-1953, 10). Місто має вигляд прямокутника, розділеного вулицями на квадрати. Таких квадратів у напрямку північ – південь m, а у напрямку схід – захід n. Скільки різних найкоротших доріг з'єднують одну з вершин прямокутника з протилежною?

Задача 3.34 (КМО-1956, 10). В деякому місті сітка доріг складається з прямих, які паралельні координатним осям. З початку системи координат O виходять 2^x людей. Половина з них іде в напрямку осі Ox, а інша половина – в напрямку осі Oy. На кожному перехресті кожна група розділюється на дві частини: одна половина іде в напрямку осі Ox, а інша половина – в напрямку осі Oy. Відомо, що в точку перетину k-ої та l-ої доріг прийшли n людей. Скільки людей вийшли з точки O?

Задача 3.35 (КМО-1960, 10). Оргкомітет по проведенню олімпіади складається з 9 чоловік. Матеріали олімпіади зберігаються в сейфі. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключей до них потрібно виготовити і як їх роздати членам комітету, щоб доступ до сейфу був можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше 2/3 членів комітету?

Задача 3.36 (УМО-2000, 9). Визначіть, яку максимальну кількість трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне з них не містило однакових цифр, та будь-які два з них мали не більше однієї спільної цифри.

Задача 3.37 (УМО-2000, 8). Нехай $k_1, k_2, ..., k_n$ - довільна перестановка чисел $1, 2, ..., n$. Доведіть, що якщо n є непарним числом, то добуток

$$(k_1 - 1)(k_2 - 2)\ldots(k_n - n)$$

є парним числом.

Задача 3.38 (УМО-2001, 8). Скількома різними способами із цифр від 1 до 9 можна утворити три трицифрових числа таким чином, щоб сума найбільшого та найменшого з цих чисел була найбільшою можливою? (Кожну цифру можна використовувати тільки один раз).

Задача 3.39 (9-10). В опуклому n-кутнику $(n \geq 4)$ проведено всі діагоналі, причому жодні три з них не перетинаються в одній точці. Знайти число точок перетину діагоналей.

Задача 3.40 (УМО-2000, 9). Визначіть, яку максимальну кількість трицифрових чисел можна отримати з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, щоб кожне з них не містило однакових цифр, та будь-які два з утворених чисел мали не більше однієї спільної цифри.

Задача 3.41 (10-11). Довести, що для довільних натуральних значень $n \geq k$ найбільший спільний дільник чисел $C_n^k, C_{n+1}^k, ..., C_{n+k}^k$ дорівнює одиниці.

3.7. Відповідь: а) $C_4^1 \cdot C_{28}^9$; б) $C_{32}^{10} - C_{28}^{10}$. **3.10.** Відповідь: $3n+1$ при $n < \frac{m}{2}$; $m+n+1$ при $\frac{m}{2} \le n \le m$; $2m+1$ при $m < n$. **3.11.** Вказівка: підрахуйте загальну можливу кількість таких наборів. **3.12.** Відповідь: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **3.13.** Вказівка: розріжемо дорогу в деякому місці. Тоді автомобілі (точніше, їх номери) утворюють деяку перестановку, парність якої співпадає з парністю кількості обгонів. **3.14.** Відповідь: $9 \cdot 10^5 \cdot 5 = 4500000$. Вказівка: перші шість цифр можна записати довільні. **3.15.** Відповідь: $1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}$. **3.16.** Відповідь: $\frac{n+1}{2(2n-1)}$. **3.17.** Відповідь: $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$. **3.18.** Відповідь: $C_{mn+mk+nk}^2 - mC_{n+k}^3 - nC_{m+k}^3 - kC_{m+n}^3$. **3.19.** Відповідь: $x = 4$. **3.21.** Відповідь: 10 білих та 12 чорних (або навпаки). **3.22.** Відповідь: кожного кольору – по 4. **3.23.** Відповідь: $n = m^2 - 2, m = 2,3,4,\ldots$. **3.24.** Відповідь: $C_{32}^8 \cdot C_{24}^8$.**3.25.** Відповідь: $17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 34459425$ способів. **3.26.** Вказівка: скористайтесь лемою: серед п'яти точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій, знайдуться чотири, які утворюють опуклий чотирикутник. **3.27.** Відповідь: $C_{10}^4 \cdot 2^4 + 30 \cdot C_9^2 \cdot 2^2 + 45 \cdot 9 = 8085$. **3.29.** Відповідь: $2^n(n+1)$. **3.30.** Відповідь: 10^n. **3.31.** Відповідь: $p(A) = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{15}$. **3.32.** Відповідь: $n^2(n-1)^2$ для дошки $n \times n$. **3.33.** Відповідь: $C_{m+n}^m \; (= C_{m+n}^n)$. **3.34.** Відповідь: $2^x = \frac{2^{k+l}n}{C_{k+l}^k}$ (за умови, що число $\frac{2^{k+l}n}{C_{k+l}^k}$ є степенем двійки). **3.35.** Відповідь: сейф повинен мати не менше $C_9^5 = 126$ замків, ключів має бути по чотири до кожного замка – 504; ключі повинні бути роздані так, щоб різним замкам відповідали різні четвірки ключів. **3.36.** Відповідь: 8 чисел.

3.38. Відповідь: 8 способів. **3.39.** Відповідь: C_n^4. **3.40.** Відповідь: 8. Вказівка: доведіть, що кількість чисел не перевищує 8 та наведіть приклад такого набору з 8 чисел. **3.41.** Вказівка: скористайтесь алгоритмом Евкліда знаходження НСД двох чисел.

§ 4. Підрахунок двома способами

Цей метод часто зустрічається при розв'язуванні не лише олімпіадних задач. За допомогою цього методу, як правило, складається рівняння, в яке входить невідома величина.

Задача 4.1. Знайти кількість діагоналей опуклого n – кутника.

Розв'язання. З кожної вершини виходить $(n-3)$ діагоналі. Помножимо їх на кількість вершин, отримаємо $n(n-3)$. Але при такому підрахунку кожна діагональ рахується двічі. Тому кількість діагоналей рівна $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Задача 4.2. (ОМО-1997, 10). За круглим столом сидить 30 учнів. Кожен з них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 учнів сказали, що рівно один з їх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди брехуни. Скільки брехунів сидить за столом?

Розв'язання. Проаналізуємо відповіді учнів. Відповіді залежать від того, хто сам учень і хто його сусіди. Взагалі то, можливі такі розміщення по трійкам: 1 - БПБ, 2 - БПП, 3 - ППБ, 4 - ППП, 5 - БББ, 6 - ПБП, 7 - ББП, 8 - ПББ. Але розміщення 5 та 6 неможливі внаслідок умови, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун, а розміщення 4 не було, тому що не було відповіді: «Нема жодного брехуна». При п'яти можливих розміщеннях відповіді були такі: БПБ - 2, БПП - 1, ППБ - 1, ББП - 2, ПББ - 2. Неважко помітити, що в кожному випадку опитуваний учень правильно називав кількість брехунів у трійці учнів, всередині, якої він сидить. При цьому кожен брехун згадувався 3 рази - собою та своїми двома сусідами. В усіх відповідях згадувалося 12 · 1 + 18 · 2 = 48 брехунів. Отже, загальна кількість брехунів 48 : 3 = 16. ■

Задача 4.3. (ОМО-2001, 10-11). Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на протилежний (білий – на чорний, а чорний – на білий) у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин. Чи можливо за декілька зазначених кроків перефарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

Розв'язання. Припустимо, що таке перефарбування можливе. Помічаємо, що після кожного кроку чорних вершин або змінюється на 1, або зменшується на 3. Оскільки на спочатку є 1 чорна вершина, а в кінці – жодної, то кількість таких кроків має бути непарним числом.

Позначимо вершини вихідного многокутника за $A_1, A_2, ..., A_{2001}$. Нехай в процесі перефарбовування вершина A_k $(k = 1,2,...,2001)$ обиралася a_k разів за "центральну. Тоді загальна кількість кроків $S = a_1 + a_2 + ... + a_{2001}$ має бути непарним числом.

Нехай на початку описаного процесу вершину A_1 пофарбовано в чорний колір. Тоді вершина A_1 змінювала свій колір непарну кількість раз, а всі інші вершини змінювали свій колір – парну кількість раз. З іншого боку, сума $a_1 + a_2 + a_3$ рівна кількості змін кольору вершини A_2, сума $a_4 + a_5 + a_6$ рівна кількості змін кольору вершини $A_5, ...,$ сума $a_{1999} + a_{2000} + a_{2001}$ рівна кількості змін кольору вершини A_{2000}. Тому загальна кількість кроків

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + ... + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001})$$

має бути парним числом. Прийшли до протиріччя.

Отже, перефарбування за допомогою описаного процесу неможливе. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 4.4. (7-8). Чи можна з'єднати 5 міст дорогами так, щоб кожне місто було з'єднано з трьома іншими?

Задача 4.5. (7-8). В кожній клітинці прямокутної таблиці розміром $m \times k$ клітинок написано число. Сума чисел в кожній стрічці і в кожному стовпчику дорівнює 1. Чи обов'язково $m = k$?

Задача 4.6 (8-9). Знайти суму коефіцієнтів многочлена

$$\left(x^3 - 2x^2 + x + 1\right)^{30}.$$

Задача 4.7. (7-9). В місті відмінників від кожної площі відходить рівно 5 вулиць. Довести, що число площ парне, а число вулиць ділиться на 5.

Задача 4.8 (7-8). В класі 21 лижник, 14 баскетболістів та 11 плавців. Відомо, що кожен спортсмен займається двома видами спорту. Скільки в класі спортсменів?

Задача 4.9 (ОМО-2001, 8). Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B - зі швидкістю 6 км/год. На зворотньому шляху від B до A він 2/3 цього шляху пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від A до B, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A і B, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від A до B. (Вказана середня швидкість дорівнює відношенню відстані від A до B до всього часу руху в напрямі від A до B).

Задача 4.10 (ОМО-2000, 8). На дні озера б'ють з постійною потужністю джерела. Стадо з 12 слонів випиває озеро за 4 хвилини, а стадо з 9 слонів – за 6 хвилин. Певного дня до озера підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють всю воду з цього озера? (Об'єм води в озері на початку водопою є завжди одним і тим же.)

Задача 4.11 (ОМО-2000, 10). Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків і курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони – кури, а десята частина курей вважає, що вони – індики. Якщо брати загалом, то п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індиками. А якою є частка індиків у його пташнику насправді?

Задача 4.12 (9-10). Від залізничної станції до пляжу 4,5 км. Хлопчик вирушив від станції до пляжу одночасно з рейсовим автобусом. Через 15 хвилин хлопчик зустрів автобус, який повертався від пляжу, і встиг ще пройти 9/28 км від місця першої зустрічі з автобусом, коли його наздогнав той самий автобус, який доїхав до станції і знову повертався до пляжу. Знайти швидкості хлопчика і автобуса, вважаючи їх постійними і що ні хлопчик, ні автобус не зупинялись, але біля пляжу і на станції автобус зупинявся на 4 хвилини щоразу.

Задача 4.13 (9-10). Кілька робітників виконують роботу за 14 днів. Якби їх було на 4 більше і кожний працював щодня на 1 год довше, то ту саму роботу було б виконано за 10 днів. Якби їх було ще на 6 чоловік більше і кожний працював би щодня на 1 год довше, то цю роботу було б виконано за 7 днів. Скільки було робітників та скільки годин протягом дня вони працювали?

Задача 4.14 (8-9). В пробірці знаходяться марсіанські амеби трьох типів: A, B, C. Дві амеби будь-яких двох різних типів можуть злитись в одну амебу третього типу. Після деякої кількості таких зливань в пробірці виявилась одна амеба. Який її тип, якщо відомо, що спочатку амеб типу A було 20, типу B – 21 та типу C – 22?

Задача 4.15 (8). Турист вийшов з табору о 3-ій годині дня і повернувся о 9-ій годині вечора по тому ж шляху. Яку відстань він пройшов, якщо він не зупинявся, а його швидкість по рівній дорозі рівна 4 км/год, при русі вгору – 3 км/год, при русі вниз – 6 км/год?

Вказівки та відповіді до задач

4.4. Відповідь: ні. **4.5.** Відповідь: так. **4.6.** Відповідь: 1. **4.8.** Відповідь: 23. **4.9.** Відповідь: 12 км. **4.10.** Відповідь: 12 хвилин. **4.11.** Відповідь: індики складають восьму частину птахів. **4.12.** Відповідь: 3 км/год і 45 км/год. **4.13.** Відповідь: 20 робітників і 6 год. **4.14.** Відповідь: тип B. **4.15.** Відповідь: 24 км.

§ 5. Парність

Деякі задачі легко розв'язуються, якщо замітити, що певна величина зберігає свою ***парність***, а тому ситуація, коли ця величина має іншу парність, неможлива. В більшості задач цю величину потрібно сконструювати.

Задача 5.1. (8-9). Чи існує замкнена ламана з 15 ланок, яка перетинає кожну свою ланку рівно один раз?

Розв'язання. Припустимо, що така ламана існує. Тоді ланки, що перетинаються, утворюють пари, тобто кількість ланок має бути парною. Протиріччя.■

Задача 5.2 (2 СМО, 9). На координатній площині намальовано коло з центром у точці $(0,0)$ та радіусом 1995. У кожній з точок площини, що лежать всередині кола та обидві координати яких є цілі числа, сидить павук. У якийсь момент часу кожен з павуків переповзає на одиничну відстань праворуч, ліворуч, вгору або вниз, залишаючись всередині кола (різні павуки можуть рухатись у різні боки). Чи обов'язково після переповзання два павуки зустрінуться в одній точці?

Розв'язання. Кількість павуків всередині кола є непарним числом, бо кожній точці $\Pi(m,n)$, в якій сидить павук, відповідає симетрична відносно початку координат точка $\Pi_1(-m,-n)$, лише точці $(0,0)$ немає пари. При вказаному в умові переповзанні кожен павук змінює на одиницю одну з своїх координат, або, що теж саме, змінює парність суми своїх координат. Розіб'ємо павуків на дві групи: M_1 - павуки з парною сумою координат, M_2 - павуки з непарною сумою координат. Припустимо, що після переповзання в кожній точці знову сидить рівно один павук. Це означає, що при переповзанні кожен павук групи M_1 зайняв місце одного павука з групи M_2 і навпаки, тобто в групах M_1 та M_2 однакова кількість павуків. Протиріччя з тим, що їх загальна кількість непарна.

Отже, в якійсь точці після переповзання буде два чи більше павуків.■

Задача 5.3 (8-9). Чи можна всі натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших?

Розв'язання. Припустимо, що можна. Тоді в кожній групі сума чисел є парним числом, тому сума всіх чисел від 1 до 65 теж має бути парна. Але сума $1+2+\ldots+65=65\cdot 33$ – непарна. Протиріччя. Отже, не можна.■

Задача 5.4 (5 СМО-1998, 8). Зграя мавп розташувалася по колу. Кожна мавпа має певну кількість бананів і певну кількість ананасів. Відомо, що жодні дві мавпи, які не знаходяться поруч, не в змозі відразу поділити загальну кількість бананів і ананасів (окремо тих та інших), які вони мають, порівну між собою, залишивши ласощі цілими. Скільки мавп може бути в цій зграї?

Розв'язання. З умови одразу випливає, що в довільних двох мавп, які не знаходяться поруч, або сума кількостей бананів непарна, або сума кількостей ананасів непарна. Існує лише 4 різні за парністю способи надання одній мавпі бананів та ананасів: (п,п) – парна кількість бананів і парна кількість ананасів, (п,н) – парна кількість бананів і непарна кількість ананасів, (н,п) – непарна кількість бананів і парна кількість ананасів, (н,н) – непарна кількість бананів і непарна кількість ананасів. Оскільки в довільних двох мавп, які не знаходяться поруч, такі способи повинні різні, то отримуємо, що мавп може бути не більше 8 (у двох (але не в трьох) мавп, які знаходяться поруч, можуть бути однакові способи). Приклад 8 мавп легко сконструювати: (п,п), (п,п), (п,н), (п,н), (н,п), (н,п), (н,н), (н,н). Зрозуміло, що з такого набору можна викреслити будь-яку кількість мавп. Отже, мавп може бути не більше восьми. ■

Задача 5.5 (8-9). Коло розбите точками на $3k$ дуг: по k дуг довжиною $1, 2$ і 3. Довести, що знайдуться дві діаметрально протилежні точки.

Розв'язання. Припустимо супротивне, тобто, що таких діаметрально протилежних точок розбиття немає. Тоді отримуємо, що проти дуг довжиною 1 лежать дуги довжиною 3. Вилучивши дві такі діаметрально протилежні дуги довжиною 1 та 3, отримаємо дві рівні «великі» дуги довжиною $\frac{6k-4}{2}=3k-2$.

Нехай одна з них містить m дуг довжиною 1 та n дуг довжиною 3, тоді протилежна містить n дуг довжиною 1 та m дуг довжиною 3, причому $m+n=k-1$. Оскільки крім цих дуг, кожна з «великих» дуг містить лише дуги довжиною 2, то парність довжини «великих» дуг співпадає з парністю числа $k-1$. Але $(3k-2)-(k-1)=2k-1$, тобто числа $3k-2$ та $k-1$ мають різну парність. Прийшли до протиріччя.

Отже, обов'язково знайдуться дві діаметрально протилежні точки розбиття. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 5.6.(6-7). На столі стоїть 7 перевернутих стаканів (вверх дном). Дозволяється одночасно перевертати будь-які два стакани. Чи можна добитись того, щоб всі стакани стояли правильно?

Задача 5.7.(6-7). Дано шість чисел: $1,2,3,4,5,6$. Дозволяється до будь-яких двох з них додавати 1. Чи можна зробити всі числа рівними?

Задача 5.8. (9-10). На колі відмічено 20 точок, які є вершинами правильного 20-кутника. Після цього вони розбиті на 10 пар і в кожній парі точки з'єднано хордою. Довести, що якісь дві хорди мають однакову довжину.

Задача 5.9. (7-9). Чи можна виписати в ряд по одному разу цифри від 1 до 9 так, щоб між 1 та 2, між 2 та 3,..., між 8 та 9 була непарна кількість цифр?

Задача 5.10 (4 СМО-1997, 10). У будинку живе 200 чоловік. Деякі з них дружать між собою. Кількість пар друзів в кожній трійці чоловік є непарною. Знайти найменшу можливу кількість пар друзів серед мешканців будинку.

Задача 5.11.(7-8). 100 фішок поставлено в ряд. Дозволяється міняти місцями будь-які дві фішки, що стоять через одну. Чи можна таким способом переставити всі фішки в оберненому порядку?

Задача 5.12 (7-9). Чи можна пофарбувати на папері в клітинку 25 клітинок так, щоб у кожної з них була непарна кількість пофарбованих сусідніх клітинок? (Сусідніми вважаються ті клітинки, які мають спільну сторону).

Задача 5.13 (7-9). Коник-стрибунець стрибає вздовж прямої: першого разу він стрибнув на 1 см в якусь сторону, другого разу – на 2 см і т.д.

Довести, що після 2001 стрибка він не може опинитися там, звідки він починав стрибати.

Задача 5.14 (8-9). 15 хлопчиків та 15 дівчаток сидять за круглим столом. Довести, що у когось з тих, що сидять за столом, обидва сусіди – хлопчики.

Задача 5.15 (7-8). На прямій розміщено 5 різнокольорових фішок. Дозволяється міняти місцями будь-які дві сусідні фішки. Чи можна за допомогою 2001 такої операції виставити фішки у зворотньому порядку?

Задача 5.16 (8-9). В трьох вершинах квадрата сидять коники-стрибунці. Вони стали грати в таку гру: кожен з коників може стрибнути в точку, симетричну відносно одного з двох інших коників. Чи може хоча б один коник-стрибунець потрапити в четверту вершину квадрата?

Вказівки та відповіді до задач

5.6. Відповідь: ні. **5.7.** Відповідь: ні. **5.8.** Вказівка. Занумеруйте вершини 20-кутника числами від 1 до 20 та довжину кожної хорди, що з'єднує точки A_k, A_m вимірюйте як $\min\{|m-k|, |20-(m-k)|\}$. **5.9.** Вказівка: в такому випадку всі цифри стояли б на позиціях однієї парності. Відповідь: ні. **5.10.** Відповідь: 9900. **5.11.** Вказівка: кожна фішка не змінює своєї парності. Відповідь: ні. **5.12.** Вказівка: спробуйте підрахувати кількість спільних сторін пофарбованих клітинок. **5.13.** Вказівка: підрахуйте кількість «непарних» стрибків. **5.14.** Вказівка: припустіть супротивне та розбийте хлопчиків і дівчат на групи хлопчиків, що сидять поруч (в кожній такій групі їх не більше двох), та дівчат, що сидять поруч (в кожній такій групі їх не менше двох). Таких груп хлопчиків і груп дівчат однакова кількість. **5.15.** Відповідь: ні. Вказівка: занумеруйте фішки та прослідкуйте за зміною кількості порушень порядку під час таких операцій. **5.16.** Відповідь: ні. Вказівка: введіть систему координат, в якій вершини квадрата мають координати (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) та розгляньте, як змінюються координати коника-стрибунця при стрибку.

§ 6. Принцип Діріхле

Цей принцип настільки простий та очевидний, що можна користуватись ним, не знаючи його формулювання. Але знаючи цей принцип, легше здогадатись, в яких випадках його застосовувати. Найпростіше принцип Діріхле виражається в такій жартівливій формі: ***"Якщо в N клітках сидить не менше $N+1$ кроликів, то в якійсь з кліток сидить не менше двох кроликів"***. Якщо ж кроликів замінити на елементи, клітки - на підмножини, то, узагальнивши попереднє твердження, отримаємо таке формулювання: ***"Якщо множину, що складається з $Nk+1$ елементів, розбити на k підмножин, то хоча б в одній підмножині виявиться не менше $N+1$ елементів"***; або ще більш загальне: ***"Якщо множину, що складається з m елементів, розбити на k підмножин, то хоча б в одній підмножині виявиться не менше $\frac{m}{k}$ елементів"***. При цьому в останньому формулюванні вас не повинно "лякати" дробове число $\frac{m}{k}$ – якщо отримаєте, що в якійсь підмножині не менше $\frac{17}{4}$ елементів, значить їх не менше 5.

Доведення принципу Діріхле просте, проводиться припущенням супротивного - кожен з читачів може провести його самостійно. Принцип Діріхле має ***геометричне формулювання***. Наприклад:

а) Якщо відрізок довжиною l розбито на n відрізків (що не мають спільних внутрішніх точок), то довжина найбільшого відрізка не менша $\frac{l}{n}$, а довжина найменшого відрізка не більша $\frac{l}{n}$;

б) Якщо фігуру площею S розбито на n частин (що не мають спільних внутрішніх точок), то площа найбільшої фігури не менша ніж $\frac{S}{n}$, а площа найменшої фігури не більша ніж $\frac{S}{n}$.

Незважаючи на свою простоту, принцип Діріхле дуже ефективний при доведенні багатьох класичних теорем вищої математики. Почнемо з відомої задачі.

Задача 6.1 (7-9). На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Будь-які дві точки з'єднано відрізком, кожен відрізок пофарбовано або в червоний, або в синій колір. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

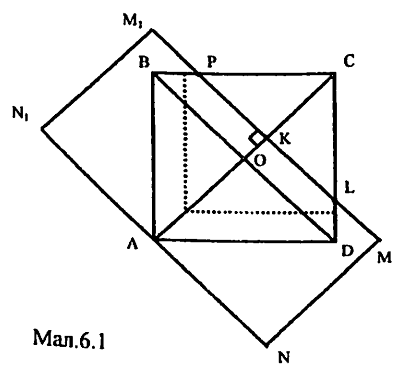
Розв'язання. Позначимо дані точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. З точки A_1 виходить 5 відрізків двох кольорів. По принципу Діріхле серед цих відрізків є 3 відрізки одного кольору. Нехай для конкретності, це відрізки A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 червоного кольору. Розглянемо відрізки A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Можливі випадки:

а) серед цих відрізків є червоний, наприклад A_2A_3. Тоді в трикутнику $A_1A_2A_3$ всі сторони червоні;

б) серед цих відрізків нема червоних. Тоді в трикутнику $A_2A_3A_4$ всі сторони сині. ■

Задача 6.2 (8-9). У квадраті, сторона якого дорівнює $6\,см$, розташована 1991 точка. Довести, що квадратом, сторона якого дорівнює $5\,см$, можна покрити хоча б 664 з цих точок.

Розв'язання. Неважко замітити, що 664 складає приблизно третину від 1991, а саме $1991 = 3\cdot 663+2$. Тому при будь-якому розбитті множини, що складається з 1991 точки, на три підмножини, хоча б в одну з цих підмножин попаде 664 чи більше точок. Отже, для розв'язування задачі достатньо показати, що квадрат із стороною $6\,см$ можна розбити на три частини, кожну з яких можна покрити квадратом із стороною $5\,см$. Це видно з малюнку 6.1, в якому



Мал.6.1

$$AK = 5\,см,\ BO = 3\sqrt{2}\ см < M_1K = 5\ см,\ PC = CL = CK\cdot\sqrt{2} =$$
$$= \left(6\sqrt{2}-5\right)\sqrt{2}\ см = \left(12-5\sqrt{2}\right)см < 5\ см.\ ■$$

Задача 6.3 (9-11). Довести, що в довільному опуклому $2n$-кутнику знайдеться діагональ, яка не паралельна жодній з сторін.

Розв'язання. Припустимо, що в деякому опуклому $2n$-кутнику кожна діагональ паралельна деякій стороні. Ідея отримання протиріччя така: виберемо найбільшу групу взаємно паралельних діагоналей і покажемо, що таку кількість діагоналей не можна розмістити всередині опуклого 2n-кутника. Отже, розіб'ємо всі діагоналі на групи взаємно паралельних діагоналей. Таких груп не більше ніж $2n$ (деякі сторони можуть бути паралельні між собою). Кількість всіх діагоналей рівна $\frac{2n(2n-3)}{2} = 2n\cdot(n-1{,}5)$, тому в деякій групі є не менше ніж $(n-1)$ діагоналей. Ці $(n-1)$ діагоналі паралельні деякій стороні A_1A_2 і лежать відносно неї в одній півплощині. Але тоді на цю сторону та на ці $(n-1)$ діагоналей припадає $2n$ вершин, тобто та з діагоналей, яка лежить найдальше від сторони A_1A_2, має бути стороною $2n$-кутника. Протиріччя.

Отже, припущення неправильне, тому знайдеться діагональ, яка не паралельна жодній з сторін.■

Задача 6.4 (9-10). Всередину квадрата з стороною 10 см «кинуто» 101 точку (жодні три не лежать на одній прямій). Довести, що серед цих точок є три, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує $1\ cm^2$.

Розв'язання. Розіб'ємо квадрат на 50 прямокутників з сторонами 1 см та 2 см. Тоді хоча б в один з цих прямокутників попаде не менше 3 точок. Ці три точки утворюють трикутник, площа якого не перевищує половини площі прямокутника, в якому міститься цей трикутник.■

Задача 6.5 (З СМО-1997, 11). Довести, що для будь-якого натурального числа m знайдуться цілі числа a та b такі, що $|a|\le m, |b|\le m$ та

$$0 < a + b\sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}.$$

Розв'язання. Розглянемо множину чисел

$$S = \{a + b\sqrt{2}, 0\le a\le m, 0\le b\le m, a,b\in Z\}.$$

Всі числа множини S різні (припустивши супротивне, отримуємо, що $\sqrt{2}$ представляється у вигляді відношення цілих чисел), їх кількість $(m+1)^2$. Всі вони лежать на сегменті $[0; m+m\sqrt{2}]$ і розбивають цей самий сегмент на $(m+1)^2-1=m^2+2m$ частин, причому серед цих частин є різні. Тому

довжина найменшої з цих частин строго менша ніж $\frac{m+m\sqrt{2}}{m^2+2m} = \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$.

Нехай цей найменший проміжок утворений числами $a_1+b_1\sqrt{2}$ та $a_2+b_2\sqrt{2}$, $a_1+b_1\sqrt{2} < a_2+b_2\sqrt{2}$. Тоді,

$$0 < a_2+b_2\sqrt{2} - a_1 - b_1\sqrt{2} = (a_2-b_1)+(b_2-b_1)\sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{2}}{m+2},$$

і числа $a=a_2-a_1, b=b_2-b_1$ задовільняють умову задачі.■

В деяких випадках допомагають міркування, аналогічні до доведення принципу Діріхле.

Задача 6.6. (9-11). Обмежена фігура на площині має площу $S>1$. Довести, що її можна "пересунути" на вектор з цілими координатами так, щоб початкова фігура та її образ перетинались.

Розв'язання. Нехай дана фігура F міститься в квадраті з стороною d. Виберемо систему координат так, щоб точка $O(0,0)$ була внутрішньою точкою даної фігури. При довільному $k\in N$ розглянемо всі можливі образи фігури F при паралельних перенесеннях на вектор $\vec{a}(m,n)$, де $m,n\in N, 0\le m\le k, 0\le n\le k$. Очевидно, що кожен з таких образів міститься всередині квадрата $A=\{(x,y): -d\le x\le k+d, -d\le y\le k+d\}$.

Припустимо, що жодні два таких образи не перетинаються. Тоді їх загальна площа не перевищує площі квадрата A, тобто $(k+1)^2S\le(k+2d)^2$, або

$$(S-1)k^2+2(S-2d)k+S-4d^2\le 0.$$

Але внаслідок умови $S-1>0$ та властивостей квадратичної функції це неможливо при достатньо великих k. Отже, деякі два образи F_1 та F_2 фігури F (при паралельних перенесеннях відповідно на вектори $\vec{a_1}$ та $\vec{a_2}$) перетинаються. Очевидно, що паралельне перенесення на вектор $\vec{a}=\vec{a_2}-\vec{a_1}$ відображає фігуру F_1 в фігуру F_2.■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 6.7 (8-9). Довести, що з довільних 52 цілих чисел завжди можна вибрати два, сума чи різниця яких ділиться на 100.

Задача 6.8 (8-10). Довести що існує натуральне число, останні чотири цифри якого 1972 і яке ділиться на 1971.

Задача 6.9 (8-10). Чи можна знайти такий натуральний показник степеня числа 3, який закінчується на 0001?

Задача 6.10 (7). В ящику лежать шкарпетки: 10 чорних, 10 синіх, 10 білих. Яку найменшу кількість шкарпеток потрібно витягнути, не дивлячись, щоб серед витягнутих виявилось дві шкарпетки: а) одного кольору; б) різних кольорів; в) чорного кольору?

Задача 6.11 (7-8). В класі 25 учнів. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є двоє друзів. Довести, що є учень, у якого не менше 12 друзів.

Задача 6.12 (8-9). Комісія з 60 чоловік провела 40 засідань, причому на кожному були присутні рівно 10 членів комісії. Довести що якісь два члени комісії зустрічались на засіданнях хоча б двічі.

Задача 6.13 (9-10). Всередині правильного шестикутника з стороною 3 *см* довільним чином розміщено 55 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що серед них знайдуться три точки, що утворюють трикутник, площа якого не перевищує $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $см^2$.

Задача 6.14 (8-10). Дано $n+1$ різне натуральне число, кожне з яких менше ніж $2n$. Довести, що з них можна вибрати три таких числа, що одне з них дорівнює сумі двох інших.

Задача 6.15 (8-9). Довести, що з 52 цілих чисел завжди знайдуться два, різниця квадратів яких ділиться на 100.

Задача 6.16 (9-10). 11 учнів займаються в п'яти гуртках будинку культури. Довести, що знайдеться два учні A та B такі, що всі гуртки, які відвідує A, також відвідує і B.

Задача 6.17 (8-9). Довести, що серед будь-яких 10 цілих чисел знайдеться кілька (можливо одне), сума яких ділиться на 10.

Задача 6.18 (8-9). На площині дано 17 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Будь які дві точки з'єднано відрізком. Кожен відрізок пофарбовано або в червоний, або в синій, або в зелений колір. Довести, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, всі сторони якого мають один колір.

Задача 6.19 (ОМО-1996, 11). Кожна точка площини пофарбована в білий або чорний колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами $30°, 60°, 90°$ і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.

Задача 6.20 (10-11). Доведіть, що з будь-яких різних 13 чисел завжди можна вибрати два числа x і y такі, що

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<2-\sqrt{3}.$$

Задача 6.21 (9-10). У квадраті, сторона якого дорівнює 1, взято 51 точку. Довести, що деякі три з цих точок обов'язково містяться всередині круга радіуса $\frac{1}{7}$.

Задача 6.22 (8-9). На площині дано 25 точок, причому серед довільних трьох з них знайдуться дві на відстані меншій за 1. Довести, що існує круг радіуса 1, який містить не менше ніж 13 даних точок.

Задача 6.23 (9). Всередині квадрата із стороною 1 розміщено кілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Довести, що знайдеться пряма, яка перетинає хоча б чотири з даних кіл.

Задача 6.24 (8-9). На відрізку довжиною 1 зафарбовано кілька відрізків так, що відстань між довільними двома зафарбованими точками не дорівнює 0,1. Довести, що сума довжин всіх зафарбованих відрізків не перевищує 0,5.

Задача 6.25 (9-10). Дано нескінченний папір в клітинку та фігура, площа якої менша за площу клітинки. Довести, що цю фігуру можна покласти на папір так, щоб вона не накрила жодної вершини клітинок.

Задача 6.26 (6 РМО-1980, 11). Дано числа $2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots, 2^{n-1}-1$, де $n \geq 3$ - непарне число. Довести, що хоча б одне з даних чисел ділиться на n.

Вказівки та відповіді до задач

6.7. Вказівка: квадрати цілих чисел при діленні на 100 можуть давати 51 залишок. **6.8.** Вказівка: розглянути числа вигляду 1972, 19721972,....**6.9.** Вказівка: розглянути числа вигляду 3^n, $n=1,2,3,\ldots,10000$ та залишки при їх діленні на 10000. **6.10.** Відповідь: а) 4; б) 11; в) 22. **6.11.** Вказівка: розгляньте такі 2 учні, які не дружать один з одним. **6.12.** Вказівка: хоча б один член журі був на 7 засіданнях, на які серед 59 інших членів журі вибирались ще по 9 чоловік. **6.13.** Вказівка: розбийте шестикутник на правильні трикутники з стороною 1 см. **6.14.** Вказівка: занумеруйте числа в порядку зростання та додатково розгляньте числа $a_2-a_1; a_3-a_1; \ldots; a_{n+1}-a_1$. **6.15.** Вказівка: квадрати цілих чисел при діленні на 100 можуть давати 51 залишок. **6.16.** Вказівка: розбийте всі різні можливі набори з 1, 2, 3, 4, 5 гуртків (їх 31) на 10 груп, в кожній з яких кожен набір входить до іншого набору з цієї групи, або містить інший набір цієї групи. **6.17.** Вказівка: розгляньте 10 сум $a_1; a_1+a_2; \ldots; a_1+a_2+\ldots+a_{10}$ та їх залишки при діленні на 10. **6.18.** Вказівка: скористайтесь результатом задачі 6.1. **6.19.** Вказівка: розгляньте всі такі трикутники з спільною гіпотенузою. **6.20.** Вказівка: дані числа можна розглядати як тангенси деяких кутів з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. **6.21.** Вказівка: круг радіуса $\frac{1}{7}$ покриває квадрат з стороною $\frac{1}{5}$. **6.22.** Вказівка: розгляньте два круги радіуса 1 з центрами в даних точках, відстань між якими не менша за 1 (якщо таких точок нема, то твердження задачі очевидне). **6.23.** Вказівка: спроектуйте кола на сторону квадрата, тоді деяка точка сторони належить хоча б чотирьом проекціям цих кіл. **6.24.** Вказівка: розбийте відрізок на 10 рівних та спроектуйте їх на паралельну їм пряму, при цьому дві зафарбовані точки сусідніх відрізків не можуть спроектуватись в одну точку. **6.26.** Вказівка: розгляньте числа $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$. Серед них є хоча б два, які мають один залишок при діленні на n, розгляньте тоді їх різницю.

§ 7. Правило крайнього

Часто розв'язання задачі зручно починати з розгляду ***особливого, крайнього об'єкту***. Таким об'єктом може бути, наприклад, найбільше число, найближча точка, граничний випадок. За крайній може бути прийнято також геометричний елемент, на якому певна величина (наприклад, довжина сторони, величина кута) приймає найменше чи найбільше значення.

Задача 7.1 (10-11). Довести, що у многогранника є дві грані з однаковою кількістю сторін.

Розв'язання. Розглянемо грань з найбільшою кількістю сторін. Позначимо її G, число її сторін n. До кожної сторони грані G прилягає грань многогранника, всього n. Якщо в многограннику є ще одна грань з кількістю сторін n, то твердження задачі доведене. Якщо ж більше такої грані нема, то в граней, які прилягають до G, кількість сторін міститься між 3 та $(n-1)$, всього $(n-3)$ можливості. Оскільки число можливостей менше n, то якась з можливостей повториться, тобто серед граней, що прилягають до грані G, знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.■

Задача 7.2 (7-9). В тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більше ніж по двом дорогам.

Розв'язання. Розглянемо місто A, з якого виходить найбільша кількість доріг, а саме точно n доріг. Припустимо, що існує місто B, в яке не можна проїхати з A по одній чи двом дорогам. Тоді з міста B обов'язково виходять дороги до міста A та до всіх міст, до яких виходить дорога з міста A, всього хоча б $n+1$ дорога. Протиріччя з тим, що з міста A виходить найбільша кількість доріг. Отже, з міста A в будь-яке інше місто можна проїхати не більше ніж по двом дорогам. ■

Задача 7.3 (9-10). Протягом дня в бібліотеці побувало 100 читачів. Кожен читач побував рівно один раз в бібліотеці. Виявилось, що в цей день з будь-яких трьох читачів принаймні двоє зустрілись в бібліотеці. Довести, що працівник бібліотеки міг зробити повідомлення в такі два моменти часу, щоб усі 100 читачів його почули.

Розв'язання. Нехай A - той читач, який першим вийшов з бібліотеки, B - той читач, який першим після виходу читача A зайшов до бібліотеки, C - довільний з читачів, які зайшли до бібліотеки після читача B. Оскільки читач A не зустрівся ні з B, ні з C, то читачі B і C обов'язково зустрілись, а тому читач B знаходився в бібліотеці до тих пір, поки всі читачі не прийшли в бібліотеку. Розглянувши читачів A, C та довільного відмінного від C читача D, що прийшов в бібліотеку після B, отримуємо з умови задачі, що читачі C і D обов'язково зустрілись. Тому жоден з читачів, які прийшли в бібліотеку після B, не вийшли з бібліотеки раніше за нього.

Отже, потрібні моменти часу такі: перший момент – безпосередньо перед виходом читача A, другий момент – безпосередньо перед виходом читача B. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 7.4 (9). На шаховій дошці розставлено числа, кожне з яких дорівнює середньому арифметичному своїх сусідів (по вертикалі та горизонталі). Довести, що всі числа рівні.

Задача 7.5 (8-9). На колі розміщено 30 чисел, кожне з яких дорівнює модулю різниці двох наступних за ним за годинниковою стрілкою. Сума всіх чисел рівна 1. Що це за числа і як вони розміщені по колу?

Задача 7.6 (УМО-2001, 10). В кожній з трьох країн живуть по n математиків. Відомо, що кожний з них листується не менше ніж з $n+1$

іноземним математиком. Доведіть, що існує три математики, які попарно листуються між собою.

Задача 7.7 (5 СМО-1998, 9). Декілька мафіозі зібралися на переговори за круглий стіл. Не дійшовши згоди, усі вони одночасно вихопили зброю і кожен єдиним пострілом застрелив когось з інших. Балістична експертиза виявила, що кожні два мафіозі, які сиділи за столом поруч, застрелили якихось двох мафіозі, що теж сиділи поруч. Доведіть, що якісь два мафіозі застрелили один одного, якщо відомо, що принаймні в одного із застрелених влучила більш ніж одна куля.

Задача 7.8 (8-9). В деякій країні 100 аеродромів, причому всі попарні відстані між ними різні. З кожного аеродрому піднімається літак і летить на найближчий до нього аеродром. Довести, що на жоден з аеродромів не може прилетіти більше ніж п'ять літаків.

Задача 7.9 (8-9). Шість кругів розміщені на площині так, що деяка точка O лежить всередині кожного з них. Довести, що хоча б один з цих кругів містить центр деякого іншого.

Задача 7.10 (8-9). На площині дано скінченну кількість точок, причому довільна пряма, яка проходить через дві з даних точок, містить ще хоча б одну з даних точок. Довести, що всі дані точки лежать на одній прямій.

Задача 7.11 (8-9). Чи можна розмістити на площині 1000 відрізків так, щоб кінці кожного відрізка були внутрішніми точками деяких інших відрізків?

Задача 7.12 (8-9). На колі розміщено 8 чисел, кожне з яких дорівнює сумі трьох наступних за ним (за годинниковою стрілкою). Знайти ці числа.

Вказівки та відповіді до задач

7.4. Вказівка: розглянути найбільше число. **7.5.** Відповідь: $\frac{1}{20},\frac{1}{20},0,\frac{1}{20},\frac{1}{20},0,\frac{1}{20},\ldots$ **7.6.** Вказівка: розгляньте математика, який листується з найбільшою кількістю k математиків із однієї країни. **7.7.** Вказівка: пронумеруйте бандитів, починаючи з того, що залишився живий, та розгляньте бандита з найменшим номером серед тих, хто застрелив бандита з номером, меншим за власний номер. **7.8.** Вказівка: припустіть, що такий аеродром A_0 існує. Нехай на нього прилетіли літаки з аеродромів $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Тоді в кожному з трикутників $A_0A_iA_k$ сторона A_iA_k, $(i \neq k, i,k = 1,2,\ldots,6)$ є найбільшою. **7.9.** Вказівка: розгляньте найменший з кутів між відрізками, що з'єднують точку O з центрами кругів. **7.10.** Вказівка: проведіть через кожну пару даних точок пряму та розгляньте деяку точку A і пряму BC (A, B, C - дані точки) такі, що

$A \notin BC$ та відстань від A до BC є найменшою з усіх таких відстаней. **7.11.** Відповідь: ні. Вказівка: спроектуйте дані відрізки на пряму, яка не перпендикулярна жодному з відрізків. **7.12.** Відповідь: всі числа рівні нулю. Вказівка: розглянувши найбільше число, покажіть, що всі числа рівні. Після цього знайдіть суму всіх чисел.

§ 8. Відповідність

В деяких задачах доцільно ***розглянути відповідну величину*** або ***ввести відповідність*** між деякими об'єктами задачі.

Задача 8.1 (7-9). Астролог царя Гороха називає час доби добрим, якщо на годиннику з центральною секундною стрілкою при миттєвому обході циферблату по ходу годинника хвилинна стрілка зустрічається після годинникової і перед секундною. Якого часу протягом доби більш: доброго чи поганого?

Розв'язання. Основна ідея: якщо стрілки показують добрий час, то їх відображення відносно вертикалі 12-6 показує поганий час, і навпаки.

Опівночі стрілки співпадають. Якщо пустити годинник назад, то стрілки будуть показувати якийсь вчорашній час, а їх відображення відносно вертикалі 12-6 сьогоднішній час. При цьому доброму моменту сьогодні відповідає поганий момент вчора і навпаки. Значить, доброго часу сьогодні стільки ж, скільки було поганого вчора. Тому доброго і поганого часу протягом доби порівну. ▣

Задача 8.2 (9-10). Довести, що число $\left(\sqrt{2}-1\right)^n$ представляється у вигляді $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, де $m \in N$.

Розв'язання. Розглянемо число $\left(\sqrt{2}+1\right)^n$. Використовуючи біном Ньютона, отримаємо таке.

При непарних n маємо: $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_1\sqrt{2}-b_1$, тоді $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = a_1\sqrt{2}+b_1$, де $a_1, b_1 \in N$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)^n = 1 = 2a_1^2 - b_1^2$. Позначивши $b_1^2 = m$, маємо $2a_1^2 = m+1$, а тому $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{2a_1^2}-\sqrt{b_1^2} = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}$.

При парних n маємо $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_2 - b_2\sqrt{2}$, $\left(\sqrt{2}+1\right)^n = a_2 + b_2\sqrt{2}$, де $a_2, b_2 \in N$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n\left(\sqrt{2}+1\right)^n = 1 = a_2^2 - 2b_2^2$.

Позначивши $2b_2^2 = m$, маємо $a_2^2 = m+1$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{a_2^2} - \sqrt{2b_2^2} = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$. ■

Задача 8.3 (4 СМО-1997, 11). Нехай A - кількість 5-елементних множин натуральних чисел з сумою чисел, не більшою за 100, B – кількість 10-елементних множин натуральних чисел з сумою чисел, не більшою за 150. (В кожній множині всі числа різні. Множини, що відрізняються лише порядком елементів, вважаємо однаковими). Довести, що $\frac{B}{A} > 2$.

Розв'язання: Нехай $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ - набір натуральних чисел, сума яких не перевищує 100, тобто набір з кількості A. Поставимо йому у відповідність два набори з кількості B: $1,2,3,4,5,a_1+5,a_2+5,a_3+5,a_4+5,a_5+5$ та $2,3,4,5,6,a_1+6,a_2+6,a_3+6,a_4+6,a_5+6$. Очевидно, що при такій відповідності різним наборам з кількості A відповідають різні набори з кількості B. Тому $\frac{B}{A} \geq 2$. Оскільки при цьому враховані не всі набори з кількості B (наприклад, не враховані ті, які починаються з цифри 3), то отримуємо, що $\frac{B}{A} > 2$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 8.4 (9-10). Довести, що в числі $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ перші 999 цифр справа після коми – нулі.

Задача 8.5 (8-9). На колі дано 1987 точок, одна з них відмічена. Розглядаються всі можливі опуклі многокутники з вершинами в цих точках. Яких многокутників більше: тих, що містять відмічену точку, чи тих, які її не містять?

Задача 8.6 (7-8). Всі натуральні числа від 1 до 100 розбили на дві групи: парні та непарні числа. Визначіть, в якій групі сума всіх цифр, що використовуються для запису їх чисел, більша і наскільки?

Задача 8.7 (8-9). Довести, що в опуклого многокутника не може бути більше трьох гострих кутів.

Задача 8.8 (8-9). Довести, що опуклий 15-кутник не можна розбити на скінченну кількість паралелограмів.

Вказівки та відповіді до задач

8.4. Вказівка: розгляньте число $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999} + \left(6-\sqrt{37}\right)^{999}$. **8.5.** Відповідь: тих, які містять відмічену точку. **8.6.** Вказівка: розбийте всі числа на 50 пар. Відповідь: сума цифр в групі непарних чисел на 49 більша, ніж в групі парних чисел. **8.7.** Вказівка: розгляньте зовнішні кути многокутника. **8.8.** Вказівка: покажіть, що кожній стороні 15-кутника відповідає інша паралельна їй сторона та використайте опуклість многокутника.

§ 9. Графи

Часто при розв'язуванні нестандартних задач (чи різних ломиголовок) зручно зображати об'єкти точками, а зв'язки між цими об'єктами – лініями або стрілками. Такий спосіб зображення ситуації називається графом. Графи широко застосовуються в багатьох розділах прикладної математики, в програмуванні, в теорії планування та управління. Різноманітність застосувань графів зумовила виділення теорії графів як окремої математичної дисципліни.

Дамо більш точне (математичне) означення графа та деяких основних понять теорії графів. Наведені нижче теореми доцільно розібрати разом з доведеннями, оскільки аналогічні цим доведенням міркування можуть бути використані при розв'язуванні інших задач.

Графом називається непорожня множина точок та множина відрізків, обидва кінці яких належать цій множині точок. Ці точки ще називають ***вершинами*** графа, а відрізки - ***ребрами*** графа. Деякі вершини графа можуть бути не сполучені ребрами. Точки перетину ребер на зображенні графа не завжди вважаються його вершинами, а тому вершини графа часто виділяють кружечками. Вершини, які не належать жодному ребру, називаються ***ізольованими***.

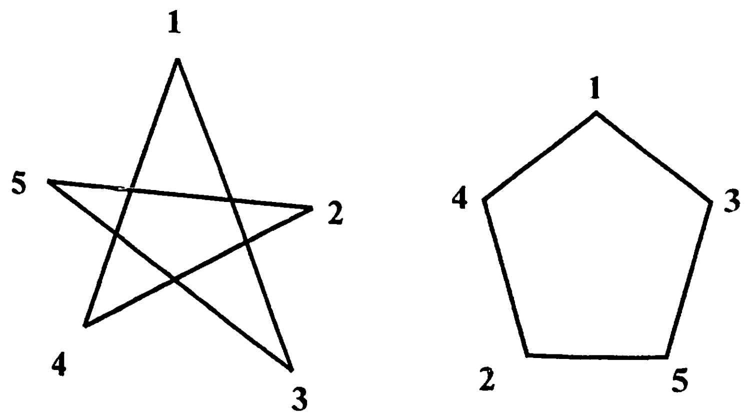
При зображенні графів його ребра можуть бути прямолінійними або криволінійними, а довжини ребер і розташування вершин – довільними. Тому одна і та ж ситуація може зображатися графами, які з геометричної точки зору, виглядають різними.

Два графи називаються ***ізоморфними***, якщо у них однакова кількість вершин (наприклад, по n) і вершини кожного графа можна занумерувати числами від 1 до n так, щоб вершини першого графу були сполучені ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні (тобто занумеровані тими ж числами) вершини другого графа також сполучені ребром.

Розгляд ізоморфних графів може бути корисним при розв'язуванні задач.

Задача 9.1 (7-9). В трьох вершинах правильного п'ятикутника розмістили по фішці. Дозволяється пересувати їх по діагоналі в будь-яку вільну вершину. Чи можна таким способом добитись, щоб одна з фішок повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями?

Розв'язання. Послідовно занумеруємо вершини п'ятикутної зірки (отриманої в результаті можливих переміщень) числами 1, 2, 3, 4, 5. Бачимо, що з вершини 1 можна за один хід попасти або в вершину 3, або в вершину 4; з вершини 2 - або в вершину 4, або в вершину 5; з вершини 3 - або в вершину 5, або в вершину 1; з вершини 4 - або в вершину 1, або в вершину 2; з вершини 5 - або в вершину 2, або в вершину 3. Ці переміщення "стають більш закономірними", якщо вершини такої п'ятикутної зірки "розвернути"



Мал. 9.1

на п'ятикутнику у такому порядку: 1, 3, 5, 2, 4 (малюнок 9.1). Тоді переміщенням по сторонам зірки відповідають переміщення фішок по п'ятикутнику у сусідню вершину (якщо вона не занята). Очевидно, що за допомогою таких переміщень по п'ятикутнику не можна змінити порядок розміщення фішок, а отже не можна добитись, щоб одна з фішок повернулась на своє місце, а дві інші помінялись місцями. ■

Граф називається ***повним***, якщо кожні дві його вершини сполучені одним і тільки одним ребром.

Доповненням графа Γ називається граф $\overline{\Gamma}$ з тими ж вершинами, що й граф Γ, та з тими і тільки тими ребрами, які потрібно додати до графа Γ, щоб отримати повний граф.

Степенем вершини називається кількість ребер графа, яким належить ця вершина. Вершина називається ***парною***, якщо її степінь – парне число, та ***непарною***, якщо її степінь – непарне число. Граф називається парним, якщо всі його вершини парні.

Додавши степені всіх вершин графа, отримаємо кількість ребер графа, підраховану двічі. Тому справедливе таке твердження.

Теорема 9.1. Число непарних вершин будь-якого графа – парне.

Задача 9.2. Чи можна намалювати на площині 25 відрізків так, щоб кожен з них перетинав рівно 5 інших відрізків?

Розв'язання. Поставимо у взаємнооднозначну відповідність кожному відрізку деяку точку на площині. Довільну пару таких точок з'єднаємо ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні їм відрізки перетинаються. У отриманого графа кількість непарних вершин – парне число, а тому відповідь: ні. ■

Послідовність різних ребер графа, кожне наступне з яких починається в кінці попереднього, називається ***шляхом***. Шлях, в якому ніяке ребро не зустрічається двічі, називається ***простим***. Простий замкнений (тобто такий, початок і кінець якого співпадають) шлях ще називають ***циклом***. Цикл, який містить всі ребра графа, називається ***обходом*** графа. Обхід, при якому кожне ребро графа проходиться рівно один раз, називається ***правильним***. Граф, який допускає правильний обхід, називається ***ейлеровим*** (вперше такі графи були досліджені Леонардом Ейлером в 1736 році в зв'язку з задачею про кенігсбергські мости). Шлях, по якому можна обійти всі вершини графа, побувавши при цьому в кожній вершині по одному разу, називається ***гамільтоновим***.

Граф називається ***зв'язним***, якщо будь-які дві його вершини можуть бути з'єднані шляхом. Будь-який незв'язний граф складається з кількох частин, кожна з яких є зв'язним графом. Ці частини називаються ***компонентами зв'язності*** графа.

Зв'язний граф, який не має циклів, називається ***деревом***. З означення дерева випливає таке твердження.

Теорема 9.2. Граф є деревом тоді і тільки тоді, коли будь-які дві його вершини сполучені рівно одним простим шляхом.

Вершина графа, з якої виходить рівно одне ребро, називається "***висячою***".

Розглянемо довільну вершину дерева і підемо по будь-якому ребру, що виходить з неї, до іншої вершини, з нової вершини – до іншої, відмінної від попередніх, і так далі. При цьому в жодній вершині ми не зможемо побувати двічі (бо інакше дерево буде містити цикл). Оскільки у графа кількість вершин скінченна, то така подорож обов'язково закінчиться. Але закінчитись вона може лише у "висячій" вершині. Здійснивши ще одну подорож, вже починаючи з цієї "висячої" вершини, прийдемо ще до однієї "висячої" вершини.

Отже, доведена потрібна при розв'язуванні багатьох задач *лема про "висячу" вершину*: кожне дерево, яке має не менше двох вершин, має хоча б дві "висячі" вершини.

Вилучивши з дерева ребро, яке виходить з "висячої" вершини, разом з цією вершиною, знову отримуємо граф, який є деревом. Виконавши цю операцію стільки раз, скільки ребер має граф, отримаємо граф, який складається з однієї точки. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 9.3. В дереві кількість вершин на 1 більша за кількість ребер.

Задача 9.3 (8-9). Розбита на клітинки площина пофарбована десятьма фарбами так, що сусідні (тобто ті, які мають спільну сторону) клітинки мають різний колір, причому використано всі 10 фарб. Назвемо сусідніми дві фарби, якими пофарбовані дві сусідні клітинки. Яка мінімальна можлива кількість пар сусідніх фарб?

Розв'язання. Кожному розфарбуванню площини поставимо у відповідність граф таким способом. Зобразимо фарби точками з номерами 1, 2, 3,..., 10. Якщо фарби сусідні, то з'єднуємо відповідні точки ребром. Тоді кожній парі сусідніх фарб відповідатиме ребро графа. Очевидно, що з кожної вершини графа виходить хоча б одне ребро. Отриманий граф має бути зв'язним, бо інакше площина розіб'ється на кілька відокремлених одна від одної частин, що неможливо. Найменша кількість ребер у зв'язних графах з однаковою кількістю вершин – у дерева. Отже, кількість пар сусідніх фарб не може бути меншою за 9. Залишається вказати таке розфарбування площини, при якому кількість пар сусідніх фарб рівна точно 9. Це можна зробити, наприклад, так: розфарбовувати кожну діагональ однією фарбою, причому фарби чередувати в такому порядку – ...,2, 1, 2, 3,..., 9, 10, 9, 8,..., 2, 1, 2, 3,... ■

Стосовно правильного обходу графа справедливі наступні твердження, які часто використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач.

Теорема 9.4. Для довільного зв'язного парного графа існує правильний обхід, який можна розпочати з будь-якої вершини і який обов'язково закінчується в цій же вершині.

Доведення. Проведемо доведення методом математичної індукції по кількості ребер графа. База індукції (граф без ребер) – очевидна.

Припустимо тепер, що для всіх зв'язних парних графів з кількістю ребер, що не перевищує n, можливий правильний обхід. Розглянемо довільний зв'язний парний граф з кількістю ребер $n+1$. Оскільки цей граф не має "висячих" вершин, то він не є деревом, а тому має цикл. Тимчасово вилучимо всі ребра цього циклу. При цьому з кожної вершини циклу буде вилучено точно два ребра, а тому кожна з компонент зв'язності отриманого графу є парним графом, для якого справедливе припущення індукції. Тепер зрозуміло, як побудувати правильний обхід для початкового графа: при обході циклу, потрапивши в вершину, яка належить деякій з отриманих компонент, обходимо цю компоненту, а повернувшись в ту ж вершину, продовжуємо рух по циклу.

Для доведення другої частини твердження зауважимо, що вказаний на початку доведення цикл може проходити через будь-яку вершину графа. ■

Теорема 9.5. Якщо в зв'язному графі є точно дві непарні вершини, то можливий його правильний обхід, причому цей обхід починається в одній непарній вершині та закінчується в другій непарній вершині.

Доведення. Вилучимо з графа деякий шлях, що з'єднує дві непарні вершини. Кожна з компонент зв'язності отриманого графу є парним графом, для якого справедливе твердження попередньої теореми. Правильний обхід початкового графу полягає у проходженні вилученого шляху з почерговим обходом кожної з таких компонент.

Правильний обхід зв'язного графа, що має дві непарні вершини, з початком у парній вершині неможливий, оскільки при такому обході хоча б у одній з непарних вершин кількість входів має дорівнювати кількості виходів. ■

Оскільки за наявності непарних вершин при правильному обході початок та кінець такого обходу можуть бути лише у непарних вершинах, то справедливе таке твердження.

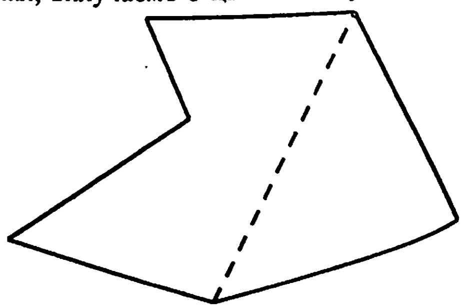
Теорема 9.6. Якщо в графі більше двох непарних вершин, то його правильний обхід неможливий.

Граф, який можна намалювати так, щоб його ребра не перетинались (ніде, крім вершин), називається ***плоским***. Позначимо кількість частин (граней), на які плоский граф розбиває площину, через Γ, кількість ребер цього графа – через P та кількість його вершин – через B. Справедливе наступне твердження.

Теорема 9.7 (Ейлера). Для правильно намальованого зв'язного плоского графа виконується рівність

$$B+\Gamma-P=2.$$

Доведення. Знайшовши у графі цикл, вилучаємо з цього циклу довільне одне ребро. При цьому кількість вершин не змінюється, а дві частини площини, що прилягають до вилученого ребра, зливаються в одну (малюнок 9.2). Тому за кожен такий крок кількості ребер та частин, на які площина розбивається графом, зменшуються на 1, а величина $B+\Gamma-P$ залишається постійною. Через деяку кількість таких кроків отримаємо граф, який не містить циклів, тобто є деревом. Для довільного дерева маємо $B-P=1, \Gamma=1$, звідки випливає твердження теореми. ■



Мал. 9.2

(Зауваження: формула Ейлера справедлива також для довільного опуклого просторового многогранника. Подумайте, чому?)

Задача 9.4 (8-10). Довести, що для плоского зв'язного графа справедлива нерівність $\frac{3}{2}\Gamma \le P \le 3B-6$.

Розв'язання. Кожна "грань" обмежена хоча б трьома ребрами, тому очевидна нерівність $3\Gamma \le 2P$. Звідси отримуємо $2=B-P+\Gamma \le B-P+\frac{2}{3}P=B-\frac{P}{3}$, звідки $P \le 3B-6$. ■

Граф, на кожному ребрі якого задано напрям, називається ***орієнтованим***. Залежно від напряму ребра, які мають спільну вершину, назвемо вхідними або вихідними (відносно цієї вершини), а кількість вхідних та вихідних ребер цієї вершини називається відповідно ***степенем входу*** та ***степенем виходу*** вершини. Оскільки кожне ребро орієнтованого графа точно для однієї вершини є вхідним та точно для однієї вершини є вихідним, то справедливе таке твердження.

Теорема 9.8. Сума степенів входу всіх вершин орієнтованого графа дорівнює сумі степенів виходу всіх його вершин.

Задача 9.5 (9-10). В тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Доведіть, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більше ніж по двом дорогам.

Розв'язання. Позначимо за A – місто, з якого виходить найбільша кількість доріг. Доведемо методом математичної індукції по кількості n міст королівства, що з міста A можна проїхати не більше ніж по двом дорогам в будь-яке інше місто.

База індукції при $n=1,2,3$ очевидна.

Припустимо, що при кількості міст n при будь-якому виборі напрямків доріг між містами з міста A можна проїхати не більше ніж по двом дорогам в будь-яке інше місто королівства.

Нехай тепер кількість міст рівна $n+1$. Якщо з A є пряма дорога в усі міста королівства, то нічого доводити не потрібно. В протилежному випадку нехай B - місто, дорога з якого веде в A. Тоді за припущенням з міста A можна проїхати не більше ніж по двом дорогам в будь-яке інше місто королівства, крім міста B. Можливі випадки:

1) існує місто C, відмінне від міст A, B, дорога з якого веде в місто A. Тоді, відкинувши з розгляду місто C, отримуємо за припущенням, що з міста A в місто B можна проїхати не більше ніж по двом дорогам;

2) такого міста C не існує. Тоді в місто A входить лише дорога з міста B, а тому, навіть відкинувши з розгляду довільне місто $P \ne C$, залишається справедливим твердження про те, що з міста A виходить найбільша кількість доріг. Тоді за припущенням з міста A в місто B можна проїхати не більше ніж по двом дорогам. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 9.6 (8-9). В країні Озерна є 7 озер, з'єднаних між собою 10 каналами, причому від кожного озера можна доплисти до будь-якого іншого. Скільки в цій країні островів?

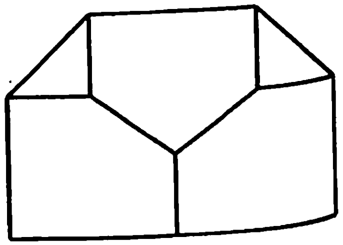
Задача 9.7 (7-8). Джон приїхав з Діснейленду і розказує, що там на зачарованому озері є 7 островів, з кожного з яких відходить 1, 3 або 5 мостів. Чи вірно, що хоча б один з мостів веде на берег озера?

Задача 9.8 (9-10). Дано правильний 45-кутник. Чи можна так розставити в його вершинах цифри від 0 до 9, щоб для довільної пари різних цифр знайшлась сторона, кінці якої пронумеровані цими цифрами?

Задача 9.9 (10-11). Послідовність з 36 нулів та одиниць починається з п'яти нулів. Серед п'ятірок цифр, що стоять підряд, зустрічаються всі 32 можливі комбінації. Знайти п'ять останніх цифр послідовності.

Задача 9.10 (10-11). Довести, що можна так розмістити по кругу символи 0 та 1, щоб зустрічався будь-який можливий набір з n символів, які йдуть підряд.

Задача 9.11 (8-9). Чи можна прогулятись по парку (схема парку зображена на малюнку 9.3) та його околицям так, щоб при цьому перелізти через кожен тин рівно один раз?



Мал. 9.3

Задача 9.12 (8-9). Дано кусок дроту довжиною 120 см. Чи можна, не ламаючи дроту, виготовити каркас куба з ребром 10 см?

Задача 9.13 (9-10). Довести, що в будь-якому зв'язному графі можна вилучити вершину так з усіма ребрами, які виходять з неї, щоб він залишився зв'язним.

Задача 9.14 (9-10). В країні 30 міст, причому кожне з'єднане з будь-яким іншим дорогою. Яку найбільшу кількість доріг можна закрити на ремонт так, щоб з будь-якого міста можна було проїхати в будь-яке інше?

Задача 9.15 (8-9). В квадраті відмітили 20 точок і з'єднали їх відрізками, які не перетинаються, один з одним і з вершинами квадрата так, що квадрат розбився на трикутники. Скільки при цьому отрималось трикутників?

Задача 9.16 (8-9). Довести, що граф, який має 5 вершин, кожна з яких з'єднана ребром з будь-якою іншою, не є плоским.

Задача 9.17 (8-9). Довести, що в плоскому графі є вершина, степінь якої не перевищує 5.

Задача 9.18 (8-9). Семикутник розбито на опуклі п'ятикутники та шестикутники так, що кожна його вершина є вершиною хоча б двох многокутників розбиття. Довести, що число п'ятикутників розбиття не менше ніж 13.

Задача 9.19 (8-9). На конференції присутні 50 учених, кожен з яких знайомий хоча б з 25 учасниками конференції. Довести, що знайдуться четверо з них, яких можна посадити за круглий стіл так, щоб кожен з них сидів біля знайомих йому людей.

Задача 9.20 (8-9). Кожен з 102 учнів однієї школи знайомий не менше ніж з 68 іншими учнями. Довести, що серед них знайдеться четверо учнів, які мають однакову кількість знайомих.

Задача 9.21 (9-11). Кожне ребро повного графа з 9 вершинами пофарбовано в синій або червоний колір. Довести, що є або чотири вершини, всі ребра між якими – одного кольору, або три вершини, всі ребра між якими – іншого кольору.

Задача 9.22 (9-11). Кожне ребро повного графа з 18 вершинами пофарбовано в синій або червоний колір. Довести, що є чотири вершини, всі ребра між якими – одного кольору.

Задача 9.23 (8-9). В деякій країні кожне місто з'єднане з кожним іншим дорогою з одностороннім рухом. Довести, що знайдеться місто, з якого можна доїхати в будь-яке інше.

Задача 9.24 (8-9). 20 команд зіграли між собою круговий турнір з волейболу (нічиєї бути не може). Довести, що команди можна пронумерувати числами від 1 до 20 так, що 1-а команда виграла у 2-ої, 2-а – у 3-ої,…, 19-а – у 20-ої.

Задача 9.25 (8-10). В деякій країні є 101 місто.

а) Кожне місто з'єднане з кожним іншим дорогою з одностороннім рухом, причому в кожне місто входить 50 доріг і з кожного міста виходить 50 доріг. Довести, що з будь-якого міста можна доїхати до будь-якого іншого, проїхавши при цьому не більше ніж по двом дорогам;

б) деякі міста з'єднані між собою дорогами з одностороннім рухом, причому в кожне місто входить 40 доріг і з кожного міста виходить 40 доріг. Довести, що з будь-якого міста можна доїхати до будь-якого іншого, проїхавши при цьому не більше ніж по трьом дорогам.

Задача 9.26 (8-9). Тенісна сітка є прямокутником розмірами 20×600 кліток. Яке максимальне число мутузок, з яких вона сплетена, можна розрізати так, щоб сітка не розсипалась?

Задача 9.27 (8-9). 20 школярів розв'язували 20 задач. Кожний розв'язав рівно дві задачі, і кожну задачу розв'язали рівно двоє. Доведіть, що можна влаштувати розбір задач так, щоб кожен учень розповів одну, розв'язану ним задачу.

Задача 9.28 (УМО-2001, 9). В місті є 13 станцій метро, через них проходять три кільцеві лінії. Кожна кільцева лінія проходить через всі станції рівно по одному разу. Рух по кожній лінії двохсторонній. Будь-які дві станції безпосередньо з'єднані щонайбільше однією ділянкою підземної колії. На всіх станціях дозволено робити пересадки.

Доведіть, що таке метро існує.

Доведіть, що з будь-якої станції можна доїхати до будь-якої іншої, побувавши щонайбільше на одній проміжній станції.

Задача 9.29 (УМО-2001, 11). Про залізницю Тернополії відомо, що з кожної її станції до будь-якої іншої можна дістатися, проїхавши не більше ніж через дві інші станції. Крім того, з кожної станції можна виїхати не більше ніж по трьох різних коліях. Яка найбільша кількість залізничних станцій може бути в Тернополії, якщо відомо, що ця кількість непарна?

Задача 9.30 (8-9). У графа 20 вершин, степінь яких не менший ніж 10. Довести, що в ньому є гамільтоновий шлях.

Задача 9.31 (7-8). У царя Гвидона було 3 сини, з його нащадків 100 мали по 3 сина, а інші померли бездітними. Скільки нащадків у царя Гвидона.

Вказівки та відповіді до задач

9.6. Відповідь: 4 острови. **9.7.** Відповідь: так. **9.8.** Вказівка: розгляньте повний граф, вершинами якого є цифри від 0 до 9. Твердження задачі рівносильне можливості його правильного обходу. **9.9.** Відповідь: 5 одиниць. **9.10.** Вказівка: розгляньте граф, вершинами якого є слова довжини $n-1$. Дві вершини A і B з'єднуються стрілкою, якщо існує слово довжини n, у якого A є початком, а B - кінцем. **9.11.** Відповідь: не можна. Вказівка: побудуте граф, вершини якого відповідають ділянкам парку та околиці. **9.12.** Відповідь: не можна. Вказівка: підрахуйте кількість непарних вершин. **9.13.** Вказівка: з максимального дерева вилучіть висячу вершину. **9.14.** Відповідь: $30\cdot 29/2-29=406$. **9.15.** Відповідь: 42 трикутники. **9.16.** Вказівка: скористайтесь результатом задачі 9.4. **9.17.** Вказівка: припустіть супротивне та скористайтесь результатом задачі 9.4. **9.18.** Вказівка: нехай a - кількість п'ятикутників, b - кількість шести-кутників. Доведіть, що $2P=5a+6b+7\le 6Г-12=6(a+b+1)-12$. **9.19.** Вказівка: розгляньте двох незнайомих вчених та їх знайомих. **9.20.** Вказівка: припустіть супротивне та розгляньте можливі кількості знайомих. **9.21.** Вказівка: для вершини, з якої виходить 6 ребер одного кольору, використайте результат задачі 6.1. **9.22.** Вказівка: з довільної вершини виходить хоча б 9 ребер одного кольору. **9.23.** Вказівка: скористайтесь методом математичної індукції. **9.24.** Вказівка: використайте метод математичної індукції. **9.25.** Вказівка: а) нехай з міста A не можна доїхати до міста B. Розгляньте міста, в які входять дороги з A, та міста, з яких виходять дороги в B; б) обчисліть кількість доріг, які виходять з першої групи міст. **9.26.** Відповідь: $601\cdot 20+600\cdot 21-(21\cdot 601-1)=12000$. Вказівка: можна вилучати ребра графа до тих пір, поки не отримаємо дерево. **9.27.** Вказівка: доведіть, що якщо у графа степінь кожної вершини дорівнює 2, то він розбивається на цикли. **9.28.** 1) Відповідь: наприклад,

перша лінія - $1\leftrightarrow 2\leftrightarrow 3\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 13\leftrightarrow 1$;

друга лінія – $1\leftrightarrow 3\leftrightarrow 5\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 13\leftrightarrow 2\leftrightarrow 4\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 12\leftrightarrow 1$;

третя лінія - $1\leftrightarrow 4\leftrightarrow 7\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow 11\leftrightarrow 1$. 2) Вказівка: припустіть супротивне відносно деяких станцій A і B. **9.29.** Відповідь: 15 станцій (обов'язково побудуйте схему такої залізниці). Вказівка: розгляньте станцію, з якої виходить парна кількість колій (така станція існує, бо кількість непарних вершин будь-якого графа є парним числом). **9.30.** Вказівка: припустіть супротивне, а саме, що найдовший шлях, в якому вершини не повторюються, не містить всіх вершин. **9.31.** Відповідь: 303.

§ 10. Інваріанти

Інваріант – величина, яка не змінюється в результаті деякої операції. З поняттям інваріанту учні знайомі з курсу фізики – закони збереження енергії, імпульсу. Визначивши інваріант деякого процесу, в багатьох випадках можна вияснити ***питання про можливість певного результату*** цього процесу. При цьому рівність інваріанту на початку та в кінці процесу ще не забезпечує цієї можливості. Тому як правило, в таких задачах відповідь на це запитання негативна. В ролі інваріанта може використовуватись парність, залишок від ділення на деяке число та інше.

Півінваріант – величина, яка може тільки збільшуватись або тільки зменшуватись.

Задача 10.1 (9-10). Дано три числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Дозволяється будь-які два з них замінити двома такими: сумою, поділеною на $\sqrt{2}$, та різницею, поділеною на $\sqrt{2}$. Чи можна, виконавши цю процедуру декілька разів, дістати трійку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

Розв'язання. Неважко замітити, що $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2+b^2$, тобто при виконанні такої процедури не змінюється сума квадратів трійки чисел. Початкова сума квадратів рівна $\frac{13}{2}$, а кінцева має бути $6+2\sqrt{2}$. Отже, відповідь: не можна.■

Задача 10.2 (7-8). В одній клітинці квадратної таблиці $8\cdot 8$ стоїть знак мінус, а в інших стоять плюси. Дозволяється за один хід в якомусь з квадратів $2\cdot 2$ змінювати знаки на протилежні. Довести, що за допомогою таких ходів не можна отримати таблицю з одних плюсів.

Розв'язання. При заміні знаків у квадраті $2\cdot 2$ на протилежні, кількість мінусів може змінитись лише на 2 або на 4, тобто в усій таблиці кількість мінусів зберігає свою парність, а тому змінитись з 1 на 0 не може.■

Задача 10.3 (7-8). На кожному з 44 дерев, що розміщені по колу, сидить один горобець. Час від часу якісь два горобці перелітають на сусіднє дерево – один за годинниковою стрілкою, а другий – проти. Чи можуть всі горобці зібратись на одному дереві?

Розв'язання. Пронумеруємо дерева по колу з 1-го по 44-е. Сума номерів дерев, на яких сидять горобці, при їх перелітанні або не змінюється, або змінюється на 44, тобто залишок від ділення цієї суми на 44 не змінюється. Спочатку цей залишок був рівний 22, а якщо всі горобці сядуть на одне дерево, цей залишок стане рівний нулю. Отже, горобці не можуть зібратися на одному дереві. ■

Задача 10.4 (9). На координатній площині є чотири точки з цілими координатами. Дозволяється замінити будь-яку з цих точок на точку, симетричну їй відносно будь-якої іншої з цих точок. Чи можна за декілька операцій перейти від точок (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) до точок з координатами (0,0), (1,1), (3,0), (2,-1).

Розв'язання. Очевидно, що можливість переходу від першої четвірки точок до другої рівносильна можливості переходу від другої четвірки точок до першої.

В другої четвірки точок різниця координат кожної точки рівна 0 або 3, тобто ділиться на 3. Якщо точка $M_2(x_2,y_2)$ симетрична точці $M_1(x_1,y_1)$ відносно точки $M_0(x_0,y_0)$, то їхні координати зв'язані рівностями $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}, y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, звідки отримуємо

$$x_2=2x_0-x_1,\ y_2=2y_0-y_1,\ x_2-y_2=2(x_0-y_0)-(x_1-y_1).$$

Звідси видно, що коли різниці координат $x-y$ якихось двох точок діляться на 3, то й різниця координат третьої точки теж ділиться на 3. Тому виходячи з другої четвірки точок, не можна отримати точки (0,1), (1,0).

Отже, відповідь: ні. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 10.5 (7-8). На дошці написано числа 1, 2, 3, ..., 19, 20. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b і замість них написати число $(a+b-1)$. Яке число може залишитись на дошці після 19 таких операцій?

Задача 10.6 (7-9). На дошці записано числа 1, 2, ..., 20. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b і замінити їх на число $ab+a+b$. Яке число може залишитись на дошці після 19 таких операцій?

Задача 10.7 (7-8). На дошці написано числа 1, 2, 3, ...,1989. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати замість них різницю. Чи можна добитись того, щоб на дошці всі числа стали рівні нулю?

Задача 10.8 (7-8). Обмінний автомат міняє одну монету на п'ять інших. Чи можна за його допомогою розміняти металеву гривню на 26 монет?

Задача 10.9 (7-8). В вершинах куба розставлено числа: 7 нулів і одна одиниця. За один хід дозволяється додавати по одиниці до чисел в кінцях будь-якого ребра куба. Чи можна добитись того, щоб всі числа стали рівними? А чи можна добитись того, щоб всі числа ділились на 3?

Задача 10.10 (7-9). У кожній клітинці таблиці 8×8 записано по одиниці. Дозволяється за один хід додати по одиниці до всіх чисел будь-якого квадрату 3×3. Чи можна за допомогою скінченної кількості таких ходів отримати у вершинах деякого квадрату 4×4 суму чисел, рівну 2001?

Задача 10.11 (8-9). На столі лежить купа з 1001 каменя. Хід полягає в тому, що з якоїсь купи, що містить більше одного каменя, викидають камінь, а потім одну з цих куп ділять на дві. Чи можна через кілька ходів залишити на столі лише купки, що складаються з трьох камінців?

Задача 10.12 (8-9). Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з цих частин розрізали знову на 8 частин і т. д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилось, що їх всього 1986. Довести, що підрахунок був неправильний.

Задача 10.13 (9-11). На дошці записані числа від 1 до 20. За один крок дозволяється пару чисел x,y замінити на число $x+y+5xy$. Чи можна наприкінці отримати число 20002002?

Задача 10.14 (10-11). Автомат працює з картками, на яких написані пари чисел. Із картки (a,b) він може зробити картку $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$, якщо a і b парні, або картку $(a+1,b+1)$. Із карток (a,b) і (b,c) він може зробити картку (a,c). Попередні картки він також повертає. Спочатку є картка $(3,10)$.

а) Чи можна отримати картку (1,100)?

б) Чи можна отримати картку (1,50)?

в) Для яких натуральних n можна отримати картку $(1,n)$?

Задача 10.15 (7-8). Матч між двома футбольними командами закінчився з рахунком 7:4. Довести, що був момент, коли перша команда забила стільки м'ячів, скільки другій залишалось забити.

Задача 10.16 (10-11). Число x замінили на x^2-210, з одержаним числом зробили те ж саме і так 100 разів. Одержали знову число x. Знайти число x.

Задача 10.17 (УМО-2000, 10). На дошці записано n одиниць. Із записаними на дошці числами дозволяється проводити наступну дію: витерти будь-які два з них, нехай це a і b, і замість них написати число

$\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Цю операцію повторюють, поки на дошці не залишиться одне число. Доведіть, що це число буде не меншим за $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Задача 10.18 (ОМО-2001, 8). Дано одну купу з 2001 сірника. Двоє грають в наступну гру. Вони по черзі роблять такі ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника і ділиться на дві менші. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві записується добуток чисел сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, який ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

Задача 10.19 (8-9). Квадратне поле розбито на 100 однакових квадратних ділянок, 9 з яких заросли бур'яном. Відомо, що бур'ян за рік поширюється на ті і тільки ті ділянки, у яких не менше двох сусідніх ділянок заросли бур'яном (сусідніми вважаються ті ділянки, які мають спільну сторону). Довести, що поле ніколи не заросте бур'яном повністю.

Задача 10.20 (8-9). 1) Є 4 картки, на яких записані числа 1, 2, 3, 4. Дозволяється виконувати таку операцію: взяти довільні дві картки і помножити записані на них числа на деяке натуральне число (це число може бути різним для різних операцій). Чи можна за допомогою кількох таких операцій добитись того, щоб всі числа стали рівні?

2) Та ж задача для карток, на яких записані числа 1, 2, 3, 6.

3) Та ж задача для карток, на яких записані числа 1, 2, 3, 4, 5.

Задача 10.21 (7-9). В таблиці $(2n+1)\times(2n+1)$ в кожну клітинку записано по одному плюсу чи мінусу. Можна одночасно змінювати знаки в будь-якому рядку чи стовпчику. Довести, що за скінченну кількість таких операцій можна добитись того, щоб у кожному рядку і у кожному стовпчику плюсів було більше ніж мінусів.

Вказівки та відповіді до задач

10.5. Відповідь: 191. **10.6.** Відповідь: $(21)!-1$. Вказівка: розгляньте числа, збільшені на 1. **10.7.** Відповідь: ні. Вказівка: інваріантом є парність суми чисел. **10.8.** Відповідь: ні. **10.9.** Відповідь: ні. Вказівка: відмітьте 4 вершини куба, жодні дві з яких не з'єднані ребром та розгляньте різницю між сумою чисел у відмічених вершинах та сумою чисел у невідмічених вершинах. **10.10.** Відповідь: так. Вказівка: розгляньте квадрат з вершинами (3,3), (3,6), (6,3), (6,6). **10.11.** Відповідь: ні. Вказівка: розгляньте суму кількості каменів та кількості куп. **10.13.** Відповідь: ні. Вказівка: сума чисел завжди буде ділитися на 5. **10.14.** Відповідь: в) для всіх n вигляду $7k+1$,

де k - натуральне число. **10.16.** Відповідь: 15 або –14. **10.17.** Вказівка: покажіть, що сума квадратів величин, обернених до записаних чисел, не збільшується при такій операції. **10.18.** Відповідь: ні. Вказівка: розгляньте півсуму квадратів чисел сірників в купках. **10.19.** Вказівка: розгляньте довжину межі частини поля, яка заросла бур'яном. **10.20.** Відповідь: 1) ні; 2) так; 3) так. Вказівка: 1) розклад добутку записаних чисел на прості множники повинен містити кожен степінь простого числа з парним показником. **10.21.** Вказівка: під час кожної операції змінюємо знаки в тому рядку чи стовпчику, в якому мінусів більше, при цьому кількість мінусів зменшується на 1, на 3, на 5, ..., чи на $(2n+1)$ (тут важливо, що $2n+1$ непарне число). Оскільки кількість мінусів скінченна, то й кількість таких операцій скінченна.

§ 11. Подільність та залишки, алгоритм Евкліда

Серед олімпіадних завдань дуже часто зустрічаються задачі, зв'язані з подільністю чисел. При їх розв'язуванні варто знати такі означення та факти.

Натуральне число $n\neq 1$ називається ***складеним***, якщо воно дорівнює добутку двох менших, відмінних від одиниці, натуральних чисел. В протилежному випадку це число називається ***простим***. Одиниця не є ні простим, ні складеним числом. Два числа називають ***взаємно простими***, якщо вони не мають спільних дільників, відмінних від одиниці.

Простих чисел є нескінченно багато (див. задачу 2.1). Проте існують як завгодно великі відрізки натурального ряду, які не містять жодного простого числа. Це можна показати, якщо узагальнити наступну задачу.

Задача 11.1 (9-10). Чи існують 1997 послідовних натуральних чисел, серед яких нема жодного простого?

Розв'язання. Число $n!$ ділиться на кожне з чисел $2,3,\ldots,n$. Тому при таких натуральних k, для яких $2\le k\le n$, число $n!+k$ буде ділитись на k. Отже, при всіх $k=2,3,\ldots,1998$ число $1998!+k$ ділиться на k, тобто всі ці 1997 чисел є складеними. ■

З огляду на твердження попередньої задачі парадоксальним здається наступний факт, доведений ще в 1837 році.

Теорема 11.1 (Діріхле). Якщо натуральні числа a та b взаємно прості, то арифметична прогресія $a+bn,\ n \in N$ містить нескінченно багато простих чисел.

Щодо розподілу простих чисел у натуральному ряді досить цікавим є наступне твердження, вперше доведене П.Л.Чебишовим.

Постулат Бертрана. Для довільного дійсного числа $x > 1$ існує хоча б одне просте число p таке, що

$$x < p < 2x.$$

Питання розподілу простих чисел навіть в сучасній математиці містить багато нерозв'язаних проблем. Зокрема, не розв'язана ***проблема простих чисел-"близнят"***, яка полягає в тому, щоб довести або спростувати твердження про те, що невизначене рівняння $x - y = 2$ має безліч розв'язків у простих числах x та y. Не доведена та не спростована ***проблема Гольдбаха***: будь-яке парне число, більше двох, може бути представлене у вигляді суми двох простих чисел. Детальніше про проблеми сучасної теорії чисел можна дізнатись з книги [2] (списку додаткової літератури).

Кожне натуральне число, за винятком одиниці, єдиним способом розкладається в добуток простих чисел (***основна теорема арифметики***).

Використовуючи розклади натуральних чисел a і b на прості множники, зручно знаходити їх найбільший спільний дільник $(\text{НСД}(a,b))$ та найменше спільне кратне $(\text{НСК}(a,b))$.

Наприклад: $24 = 2^3 \cdot 3$, $270 = 5 \cdot 2 \cdot 3^3$, $\text{НСД}(24,270) = 6$, $\text{НСК}(24,270) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$.

Справедливі такі твердження (доведіть їх самостійно).

Твердження 11.1. Якщо деяке число ділиться на два взаємно прості числа m і n, то це число ділиться на їх добуток mn.

Твердження 11.2. Якщо число pA ділиться на q, де p і q взаємно прості, то й A ділиться на q.

Часто при розв'язуванні задач використовують ***залишки*** при діленні. Говорять, що натуральне число n при діленні на натуральне число m дає залишок r, $(0 \le r \le m-1)$, якщо виконується рівність $n = km + r$, де k деяке натуральне число. Вірні наступні твердження, які просто доводяться.

Твердження 11.3. Сума будь-яких натуральних чисел a і b та сума їх залишків мають однаковий залишок при діленні на будь-яке натуральне число.

Твердження 11.4. Добуток будь-яких натуральних чисел a і b та добуток їх залишків мають однаковий залишок при діленні на будь-яке натуральне число.

Очевидно, що ці твердження можна поширити на будь-яку скінченну кількість натуральних доданків чи множників.

Виходячи з цих тверджень, розв'язування багатьох задач зводиться до перебору можливих залишків при діленні на деяке число, причому такий перебір є повним розв'язком.

Задача 11.2 (7-8). Знайти залишок від ділення числа $9^{1999} + 1997 \cdot 1998 \cdot 1999$ на 8.

Розв'язання. 9^{1999} та $1^{1999} = 1$ при діленні на 8 дають один і той же залишок 1. Числа 1997, 1998, 1999 при діленні на 8 дають відповідно залишки 5, 6, 7, тому їх добуток дає такий же залишок, як і число $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, тобто 2.

Отже, залишок рівний 1+2=3.■

Задача 11.3 (8-9). Довести, що $n^5 + 4n$ ділиться на 5 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання. Якщо n при діленні на 5 дає залишок 1, то n^5 теж дає залишок 1, $4n$ дає залишок 4, $1 + 4 = 5$, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає залишок 2, то n^5 дає залишок 2, $4n$ дає залишок 3, $2 + 3 = 5$, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає залишок 3, то n^5 теж дає залишок 3, $4n$ дає залишок 2, $3 + 2 = 5$, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо n при діленні на 5 дає залишок 4, то n^5 теж дає залишок 4, $4n$ дає залишок 1, $4 + 1 = 5$, тому $n^5 + 4n$ ділиться на 5.

Якщо ж n ділиться на 5, то твердження задачі очевидне.■

Задача 11.4 (9-11). Показати, що для довільного натурального k існують числа вигляду $7^n - 1$, що діляться на 10^k.

Розв'язання. Число $7^4 - 1 = 2400$ ділиться на 100.

Запишемо очевидну рівність

$$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+\ldots+x+1).$$

Якщо число x має останню цифру 1, то число x^n також має останню цифру 1. Тоді число $(x^9+x^8+\ldots+x+1)$ має останню цифру 0, тобто ділиться на 10. Отже, якщо число $(x-1)$ ділиться на 10, то число $(x^{10}-1)$ ділиться на 10^2 і т.д. Тому число $(7^{4\cdot10^{k-1}}-1)$ ділиться на 10^k. ■

Задача 11.5 (8-9). Відомо, що $p, p+10, p+14$ - прості числа. Знайти число p.

Розв'язання. Число p при діленні на 3 може давати залишки 0, 1, 2. Якщо $p=3k+1$, то $p+14=3k+15=3(k+5)$ – складене число. Якщо $p=3k+2$, то $p+10=3k+12=3(k+4)$ – складене число. Отже, може бути лише $p=3k$.

Враховуючи, що p просте число, отримуємо $p=3$. ■

При розв'язуванні складніших задач варто знати знати деякі класичні теореми теорії чисел. Більшість таких теорем формулюються в термінах наступних означень.

Якщо число x при діленні на m дає такий же залишок, як і число a, то говорять, що числа x і a ***порівнянні за модулем*** m. Це записують у вигляді рівності

$$x\equiv a\,(\mathrm{mod}\,m),$$

яку ще називають конгруенцією (чи порівнянням).

При розв'язуванні задач на знаходження залишку при діленні двох чисел можна використовувати ***малу теорему Ферма.***

Теорема 11.2. Нехай p - просте число і $a\in N$. Тоді $a^p\equiv a\,(\mathrm{mod}\,p)$. Якщо при цьому a не ділиться на p, то $a^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$.

Мала теорема Ферма є частинним випадком ***теореми Ейлера***.

Теорема 11.3. Якщо натуральні числа a і $m\ (m>1)$ взаємно прості, то

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,m)$$

(тут $\varphi(m)$ - кількість натуральних чисел, які не перевищують m і взаємно прості з m).

При розв'язуванні задач на доведення існування числа, що ділиться на деякі наперед задані числа, іноді зручно користуватись так званою ***"китайською теоремою про залишки"***.

Теорема 11.4. Якщо $m_1, m_2, \ldots, m_n$ - більші за одиницю, попарно взаємно прості числа, то система конгруенцій

$$\begin{cases} x\equiv a_1\,(\mathrm{mod}\,m_1); \\ x\equiv a_2\,(\mathrm{mod}\,m_2); \\ \ldots\ldots \\ x\equiv a_n\,(\mathrm{mod}\,m_n) \end{cases}$$

при довільних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ має розв'язки, які утворюють єдиний клас лишків

$$x\equiv x_0\,(\mathrm{mod}(m_1m_2\ldots m_n)),$$

де $x_0=\sum_{i=1}^{n}M_iy_ia_i$, причому числа M_i, y_i визначаються з умов:

$$M_i=\frac{m_1m_2\ldots m_n}{m_i},\quad M_iy_i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,m_i).$$

Довести "китайську теорему про залишки" можна методом математичної індукції.

Задача 11.6 (УМО-2001, 11). Про натуральні числа a і n відомо, що число a^2+1 ділиться на n. Доведіть, що існує таке натуральне число b, що b^2+1 ділиться на $n(n^2+1)$.

Розв'язання. Перший спосіб. Числа n та n^2+1 взаємно прості, тому за "китайською теоремою про залишки" існує розв'язок системи конгруенцій

$$\begin{cases} x\equiv a\,(\mathrm{mod}\,n); \\ x\equiv n\,(\mathrm{mod}(n^2+1)). \end{cases}$$

Тоді $x^2+1\equiv a^2+1\,(\mathrm{mod}\,n)$, $x^2+1\equiv n^2+1\,(\mathrm{mod}(n^2+1))$, тобто число x^2+1 ділиться на $n(n^2+1)$.

Другий спосіб. Таке число b можна підібрати, наприклад: $b=a(n^2+1)\pm n$. ■

Залишки при діленні на 3 і 4 особливо зручно застосовувати при розв'язуванні задач, що містять квадрати натуральних чисел. Справа в тому, що при діленні на 3 чи 4 натуральні квадрати можуть давати залишки лише 0 або 1.

Задача 11.7 (8-9). Чи може квадратне рівняння ax^2+bx+c з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, рівний 23 ?

Розв'язання. Число b^2-4ac при діленні на 4 може давати залишок 0 або 1, а число 23 дає залишок 3. Отже не може.■

В задачах, в яких зустрічаються куби цілих чисел, іноді зручно перебрати залишки від ділення на 7 (можливі залишки 0, 1 і 6) та на 9 (можливі залишки 0, 1 і 8).

Задача 11.8 (8-9). Довести, що число $6n^3+3$ не може бути шостим степенем цілого числа ні при якому натуральному n.

Розв'язання. Число $6n^3+3$ при діленні на 7 може давати залишки 3, 2, та 4, а шостий степінь при діленні на 7 може давати залишки 0, 1.■

Очевидні такі факти.

Твердження 11.5. Якщо цілі числа a і b діляться на d, то їх різниця $a-b$ також ділиться на d.

Твердження 11.6. Якщо ціле число b та різниця $a-b$ діляться на d, то й число $a=b+(a-b)$ також ділиться на d.

Твердження 11.7. Якщо цілі числа a і b діляться на d, то при будь-яких цілих x і y число $ax+by$ також ділиться на d.

Ці факти покладені в основу ***алгоритму Евкліда***: найбільший спільний дільник чисел a і b $(a<b)$ дорівнює найбільшому спільному дільнику числа a та залишку від ділення b на a.

Наприклад НСД(368,161)= НСД(161,46)= НСД(46,23)=23.

Задача 11.9 (8-9). Довести, що при довільному натуральному n дріб $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний.

Розв'язання. НСД$(30n+2, 12n+1)$ = НСД$(12n+1, 6n)$ = НСД$(6n, 1)$ =1.■

Звичайно, при розв'язуванні багатьох задач можна використовувати добре відомі ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9.

Задача 11.10 (ОМО-1999, 9). Довести, що десятковий запис числа 1999^6 містить три однакові цифри.

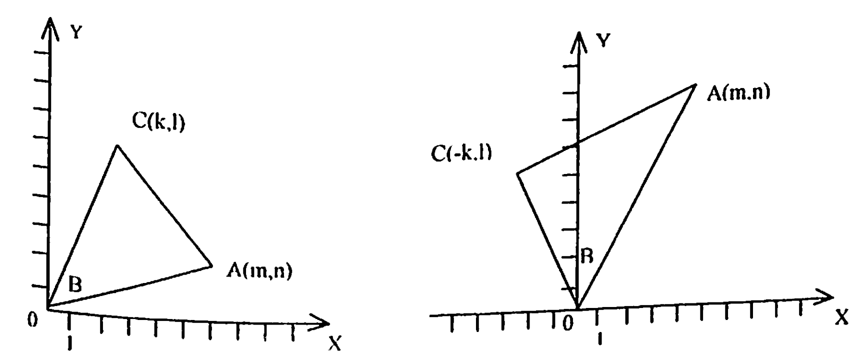
Розв'язання. Неважко впевнитись в тому, що десятковий запис числа 1999^6 містить точно 20 цифр. (Для цього, наприклад, достатньо розписати за допомогою бінома Ньютона $1999^6=(2000-1)^6$). Припустимо супротивне, тобто, що трьох однакових цифр нема. Тоді всі цифри 0, 1, 2, … ,9 є по два рази, сума цифр десяткового запису числа 1999^6 має бути рівна 90, що неможливо, оскільки 1999, а значить і 1999^6 не ділиться на 9.■

Використання подільності чисел може бути засобом розв'язання задач, на перший погляд не схожих з попередніми.

Задача 11.11 (ОМО-1996, 10) На координатній площині відмічено точки A,B,C з цілими координатами. Відомо, що $\angle ABC=45^0$ та що на відрізках AB та BC не має точок з цілими координатами, крім точок A,B,C. Довести, що трикутник ABC є прямокутним.

Розв'язання. Оскільки умови задачі не змінюються при паралельному перенесенні на вектор з цілими координатами та осьової симетрії відносно осей координат, то можна звести задачу до розгляду двох таких положень:

а) б)



Мал. 11.1

де k,l,m,n – деякі натуральні числа.

Розглянемо положення а), у випадку б) розв'язок аналогічний, тому пропонуємо провести його самостійно.

Умова про те, що на відрізку AB немає точок з цілими координатами крім точок A та B, рівносильна тому, що числа m,n взаємно прості, тобто НСД(m,n) = 1. Аналогічно НСД(k,l) = 1.

Маємо $\mathrm{tg}\angle ABX = \frac{n}{m}$, $\mathrm{tg}\angle CBX = \frac{l}{k}$, $\angle CBX = \angle ABX + 45^0$,

тому $\mathrm{tg}\angle CBX = \dfrac{\mathrm{tg}\angle ABX + \mathrm{tg}\,45^0}{1-\mathrm{tg}\angle ABX \cdot \mathrm{tg}\,45^0} = \dfrac{\frac{n}{m}+1}{1-\frac{n}{m}} = \dfrac{m+n}{m-n}$. Отже,

маємо рівність $\frac{m+n}{m-n} = \frac{l}{k}$. Можливі випадки:

1) дріб $\frac{m+n}{m-n}$ нескоротний, тоді $l = m+n$, $k = m-n$.

$\overrightarrow{BC}(m-n,m+n)$, $\overrightarrow{CA}(n,-m)$, $\overrightarrow{BA}(m,n)$, тобто $AB = AC$. Оскільки проти рівних сторін у трикутнику лежать рівні кути, то $\angle BCA = 45^0$, а $\angle BAC = 90^0$.

2) дріб $\frac{m+n}{m-n}$ скоротний, тоді НСД($m+n,m-n$) = НСД($m-n,2n$) = НСД($2m,2n$) = 2, оскільки m і n взаємно прості. Тому $l = \frac{m+n}{2}$, $k = \frac{m-n}{2}$. В цьому випадку $\overrightarrow{BC}(\frac{m-n}{2},\frac{m+n}{2})$, $\overrightarrow{CA}(\frac{m+n}{2},\frac{n-m}{2})$, $\overrightarrow{BA}(m,n)$, тобто $BC = CA$, $\angle BAC = \angle CBA = 45^0$, а $\angle ACB = 90^0$. ■

Задача 11.12 (9). Доведіть, що число $\sqrt{5}$ ірраціональне.

Розв'язання. Припустимо, що число $\sqrt{5}$ раціональне. Тоді за означенням раціонального числа існують натуральні взаємно прості p,q такі, що $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, звідки отримуємо $p^2 = 5q^2$. Враховуючи, що числа p і q взаємно прості, отримуємо, що p^2, а значить і p ділиться на 5. Тоді $p = 5k$, де k - деяке натуральне число. Звідси $q = 5k^2$. Аналогічно

отримуємо, що q ділиться на 5. Протиріччя з тим, що числа p,q взаємно прості. ■

Задача 11.13 (11). Доведіть, що число $\log_4 18$ ірраціональне.

Розв'язання. Неважко показати, що $\log_4 18 > 2$. Припустимо, що число $\log_4 18$ раціональне. Тоді за означенням раціонального числа існують натуральні p,q такі, що $\log_4 18 = \frac{p}{q}$, звідки отримуємо $2^{2p-q} = 3^{2q}$. Враховуючи, що числа 2 і 3 взаємно прості, отримуємо, що ця рівність можлива лише за виконання умов $2p-q=0$, $2q=0$. Звідси $p=q=0$. Протиріччя з тим, що числа p,q натуральні. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 11.14 (8-9). Довести, що n^3+2 не ділиться на 9 при жодному натуральному n.

Задача 11.15 (8-9). Числа a і b – натуральні, причому a^2+b^2 ділиться на 21. Довести, що a^2+b^2 ділиться також на 441.

Задача 11.16 (7-9). Чи може сума цифр точного квадрату дорівнювати 2000 ?

Задача 11.17 (8-10). Довести, що жодне з чисел $(p-1)$ та $(p+1)$, де p – добуток перших n простих чисел $(n>1)$, не є повним квадратом.

Задача 11.18 (7-9). Знайти всі цілі n, при яких $\frac{19n+7}{7n+11}$ є цілим числом.

Задача 11.19 (8-9). Довести, що a^3+b^3+4 не є кубом цілого числа при будь-яких натуральних a і b.

Задача 11.20 (УМО-2000, 11). Чи існують натуральні числа m і n такі, що число $\frac{m^2+1}{n^2-1}$ - ціле?

Задача 11.21 (УМО-1969, 9). З чисел, утворених перестановками перших 12 цифр деякого 120-цифрового числа, взято будь-які 120 чисел. Довести, що їх сума ділиться на 120.

Задача 11.22 (8-9). Довести, що не існує натуральних чисел a і b таких, що $a^2-3b^2=8$.

Задача 11.23 (8-9). Числа p і $8p^2+1$ - прості. Знайти p.

Задача 11.24 (8-9). Числа p і p^2+2 - прості. Довести, що p^3+ також просте число.

Задача 11.25 (8-9). Числа p, $2p+1$, $4p+1$ - прості. Знайти p.

Задача 11.26 (8-9). Відомо, що сума кількох натуральних чисел ділиться на 6. Довести, що сума кубів цих чисел також ділиться на 6.

Задача 11.27 (9-10). При яких натуральних n число 2^n-1 ділиться на 7?

Задача 11.28 (9-11). Показати, що для довільного натурального існують числа:

а) вигляду 7^n+1, що діляться на 5^k;

б) вигляду 13^n-1, що діляться на 10^k;

в) вигляду 13^n+1, що діляться на 5^k;

г) вигляду 8^n+1, що діляться на 5^k.

Задача 11.29 (8-9). Довести, що існує нескінченно багато трійок цілих чисел, квадрати яких утворюють арифметичну прогресію.

Задача 11.30 (8-10). Довести, що існує нескінченно багато натуральних чисел, які не представляються у вигляді суми двох квадратів.

Задача 11.31 (теорема Вільсона). Довести, що якщо p – просте число, то $(p-1)!+1$ ділиться на p.

Задача 11.32. Знайти найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає залишок 1, при діленні на 3 дає залишок 2, при діленні на 4 дає залишок 3, при діленні на 5 дає залишок 4, при діленні на 6 дає залишок 5, при діленні на 7 дає залишок 6, при діленні на 8 дає залишок 7.

Задача 11.33. Довести, що число p^2-1 ($p>3$ - просте число) ділиться на 24.

Задача 11.34 (КМО-1993, 10). Довести, що не існує трицифрового числа $\overline{abc}$ такого, що сума $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ є точним квадратом.

Задача 11.35 (9). Довести, що число $(1+\sqrt{2})^{2000}$ можна подати у вигляді $a+b\sqrt{2}$, де a і b - взаємно прості цілі числа.

Задача 11.36 (9). Знайти всі натуральні числа n такі, що число n^3+ ділиться на $n+3$.

Задача 11.37 (10). Знайти всі цілі числа n такі, що число n^5+ ділиться на n^2+1.

Задача 11.38 (10). Довести, що при цілих x, y, z число $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ділиться на число $x+y+z$.

Задача 11.39 (7-8). Чи може $n!$ закінчуватись рівно на 5 нулів?

Задача 11.40 (7-8). Чи може число, яке записується за допомогою 100 нулів, 200 одиниць і 100 двійок, бути точним квадратом ?

Задача 11.41 (9). Натуральні числа a і b такі, що $56a=65b$. Довести, що $a+b$ – складене число.

Задача 11.42 (УМО-2000, 10). Доведіть, що для будь-якого цілого $n \geq 0$ число $1\underbrace{00\ldots00}_{3n+2}\underbrace{199\ldots99}_{2n+2}$ ділиться на $1\underbrace{0\ldots}_{n}01$.

Задача 11.43 (11 РМО-1985, 9). На дошці в стрічку записані числа

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12}.$$

1) Довести, що при довільній розстановці знаків “+” та “-“ між цими числами отримана алгебраїчна сума не буде рівна нулю.

2) Яку найменшу кількість написаних чисел необхідно витерти з дошки для того, щоб після деякої розстановки знаків “+” і “-“ між числами, які залишились, отримати суму, яка рівна нулю?

Задача 11.44 (15 РМО-1989, 9). Довести, що число $4^{545}+545^4$ є складеним.

Задача 11.45 (12 РМО-1985, 10). Довести, що серед чисел вигляду 2^n+n^2, де $n \in N$, є нескінченно багато чисел, які діляться на 100.

Вказівки та відповіді до задач

11.14. Вказівка: розгляньте залишки при діленні на 9. **11.15.** Вказівка: перевірте, що дані числа діляться на 3 і 7. **11.16.** Вказівка: розгляньте залишки при діленні на 3. **11.17.** Вказівка: розгляньте залишки при діленні на 4 та 3. **11.18.** Вказівка: виділіть цілу частину. Відповідь: $n \in \{-3;-2;1\}$. **11.19.** Вказівка: розгляньте залишки при діленні на 9. **11.20.** Відповідь: не існує. Вказівка: розгляньте залишки при діленні цих чисел на 4. **11.22.** Вказівка: розгляньте залишки при діленні на 3. **11.23.** Відповідь: $p=3$. **11.24.** Вказівка: доведіть, що $p=3$. **11.25.** Відповідь: $p=3$. **11.26.** Вказівка: натуральне число та його куб при діленні на 6 дають однаковий залишок. **11.27.** Відповідь. $n=3k, k \in N$. **11.28.** Відповідь: наприклад, числа вигляду: а) $7^{2\cdot5^{k-2}}+1$; б) $13^{4\cdot10^{k-1}}-1$; в) $13^{2\cdot5^{k-1}}+1$, г) $8^{2\cdot5^{k-1}}+1$). **11.29.** Відповідь: наприклад, $m, 5m, 7m$ $(m \in N)$. **11.30.** Вказівка:

розглянути залишки при діленні на 4. Відповідь: наприклад, числа вигляд $4k+3$. **11.31.** Вказівка: розбийте числа $2,3,4,\dots,p-2$ на пари чисел добуток яких при діленні на p дає залишок 1. **11.32.** Вказівка: розгляньт число, яке на 1 більше від шуканого. **11.34.** Вказівка: використа твердження: якщо квадрат натурального числа n^2 ділиться на просте числ $p\,(=3)$, то n^2 ділиться на p^2. **11.35.** Вказівка: для послідовностей чисел a_n, b_n таких, що $(1+\sqrt{2})^{2000}=a_n+b_n\sqrt{2}$, доведіть, що $a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ та скористайтесь алгоритмом Евклі

11.36. Вказівка: виділіть цілу частину дробу $\frac{n^3+3}{n+3}$. Відповід $n\in\{1;3;5;9;21\}$. **11.37.** Вказівка: виділіть цілу частину дробу $\frac{n^5+3}{n^2+1}$. Відповідь: $n\in\{-3;-1;0;1;2\}$. **11.38.** Вказівка: розділивш $x^3+y^3+z^3-3xyz$ на $x+y+z$ (як многочлени змінної x), отримаєм рівність

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

11.39. Відповідь: ні, $24!$ закінчується на 4 нулі, а $25!$ - на 6 нулів. **11.40** Відповідь: ні. Вказівка: перевірити ознаки подільності на 3 та 9. **11.41** Вказівка: $65(a+b)=121a$. **11.42.** Вказівка: позначте $k=10^{n+1}$ т виразіть через k дані числа. **11.43.** Вказівка: чисельник отриманого дробу н може ділитись на 11. Відповідь: необхідно витерти шість дробі $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$.

11.44. Вказівка: $4^{545}+545^4=\left(2^{545}+545^2\right)^2-\left(2^{273}\cdot 545\right)^2$.

11.45. Відповідь: $n=100m+6,\ m\in N$.

§ 12. Рівняння в цілих числах

Як правило, такі рівняння містять дві або три невідомі змінні; потрібно знайти всі пари чи трійки цілих чисел, що задовільняють це рівняння.

Такі рівняння ще називають ***діофантовими*** на честь давньогрецького математика Діофанта Александрійського, який дослідив деякі їх типи ще до нашої ери.

В деяких випадках розв'язування рівняння можна звести до дуже простого і популярного методу - ***перебору***.

Задача 12.1 (8-9). Знайти всі пари цілих чисел (x, y), що задовільняють рівняння

$$x^2 - xy - 2y^2 = 7.$$

Розв'язання . Запишемо рівняння у вигляді

$$(x-2y)(x+y)=7.$$

Оскільки x, y - цілі числа , то можливі такі випадки:

а) $\begin{cases} x-2y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+y=7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=-7 \\ x+y=-1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=-7 \end{cases}$

Розв'язавши ці системи, маємо розв'язки (3,-2), (5,2), (-3,2), (-5,-2). ■

Проте в багатьох випадках рівняння може мати безліч розв'язків, тому ідея перебору не спрацьовує.

Задача 12.2 (8-9). Розв'язати рівняння $5x+7y=19$ в цілих числах.

Розв'язання. Підберемо спочатку якийсь конкретний розв'язок. Це легко зробити, наприклад $x_0=1$, $y_0=2$. Тоді $5x_0+7y_0=19$, звідки $5(x-x_0)+7(y-y_0)=0$, $5(x-x_0)=-7(y-y_0)$. Оскільки числа 5 і 7 взаємно прості, то $x-x_0=7k$, $y-y_0=-5k$. Отже, загальний розв'язок: $x=1+7k$, $y=2-5k$, $k\in Z$. ■

Задача 12.3 (8-9). Розв'язати рівняння $6x+4y=11$ в цілих числах.

Розв'язання. Оскільки при будь-яких цілих числах x, y ліва частина ділиться на 2, а права є непарним числом, то рівняння розв'язків в цілих числах немає. ■

Задача 12.4 (8-9). Розв'язати в цілих числах рівняння

$$201x-1999y=12.$$

Розв'язання. Знайти конкретний розв'язок в даному випадку підбором досить важко. Запишемо алгоритм Евкліда для чисел 201 та 1999: НСД(1999,201) = НСД(201,190) = НСД(190,11) = НСД(11,3) = НСД(3,2) = = НСД(2,1) = 1. Запишемо цей процес в оберненому напрямку:

$$1=2-1=2-(3-2)=2\cdot2-3=2\cdot(11-3\cdot3)-3=2\cdot11-7\cdot3=$$
$$=2\cdot11-7(190-11\cdot7)=121\cdot11-7\cdot190=121(201-190)-7\cdot190=$$
$$=121\cdot201-128\cdot190=121\cdot201-128(1999-9\cdot201)=1273\cdot201-128\cdot1999.$$

Отже, пара (1273,128) є розв'язком рівняння $201x-1999y=1$. Тоді пара чисел $x_0=1273\cdot12=15276$, $y_0=128\cdot12=1536$ є розв'язком рівняння $201x-1999y=12$.

Загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді $x=15276+1999k$, $y=1536+201k$, $k\in Z$. ■

Проаналізувавши розв'язки задач 12.2-12.4, робимо висновок, що рівняння $ax+by=c$ (a,b,c - цілі) у випадку, коли c не ділиться на НСД(a,b), не має розв'язків в цілих числах; а у випадку, коли a і b взаємно прості загальний розв'язок можна знайти так, як у задачах 12.2, 12.4 (або з допомогою підхідних дробів, див. [2] списку додаткової літератури).

За допомогою часткового розв'язку в деяких випадках також вдається знайти загальний розв'язок рівнянь другого степеня в цілих числах.

Задача 12.5 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2+2y^2=z^2.$$

Розв'язання. Позначимо $\frac{x}{z}=u,\ \frac{y}{z}=v$. Тоді достатньо розв'язати в раціональних числах рівняння

$$u^2+2v^2=1 \qquad (*)$$

(подумайте, чому?). Очевидним розв'язком цього рівняння є пара чисел $u_1=1$, $v_1=0$. Нехай (u,v) - його інший розв'язок такий, що $u\neq u_1$. Тоді

відношення $\frac{v-v_1}{u-u_1}=\frac{v}{u-1}=k$ є раціональним числом. З іншого боку, якщо $v=k(u-1)$ (де k - деяке раціональне число), то з системи рівнянь

$$\begin{cases}u^2+2v^2=1,\\ v=k(u-1)\end{cases}$$

приходимо до рівняння $u^2+2k^2(u-1)^2=1$, або

$$(2k^2+1)u^2-2k^2u+2k^2-1=0. \qquad (**)$$

Це квадратне відносно u рівняння з раціональними коефіцієнтами, один з коренів якого $u_1=1$, а тому за теоремою Вієта і другий корінь є раціональним числом.

Отже, для того щоб числа u,v були раціональним розв'язком рівняння (*), необхідно та достатньо, щоб існувало таке раціональне число k, що $v=k(u-1)$, а число u при цьому було розв'язком рівняння (**).

Знаходимо $u_2=\frac{2k^2-1}{2k^2+1}$, тоді $v_2=k\left(\frac{2k^2-1}{2k^2+1}-1\right)=-\frac{2k}{2k^2+1}$.

Нехай $k=\frac{m}{n}$, де $m\in Z, n\in Z\setminus\{0\}$. Тоді $u_2=\frac{2m^2-n^2}{2m^2+n^2}$, $v_2=\frac{-2mn}{2m^2+n^2}$. Тому розв'язками даного рівняння є всі (і лише) трійки чисел вигляду $\left(\pm(2m^2-n^2),\pm2mn,\pm(2m^2+n^2)\right)$ та трійки чисел $(\pm m,0,\pm m)$, де $m,n\in Z$, а вибір знаків "+" та "-" може бути довільним. ■

Розглянемо деякі рівняння, що містять вищі степені невідомих змінних. Часто при розв'язуванні таких рівнянь достатньо розглянути залишки при діленні на якесь число.

Задача 12.6 (8-9). Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2-7y=10.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^2+4=7(y+2)$. Отже, x^2+4 має ділитись на 7, тобто x^2 при діленні на 7 має давати залишок 3. Але x^2 при діленні на 7 може давати лише залишки 0, 1, 4, 2.

Отже, рівняння розв'язків в цілих числах немає. ▣

Метод розгляду залишків при діленні на деяке число, як правило, можна використовувати лише для доведення того, що дане рівняння не має розв'язків в цілих числах.

Часто при розв'язуванні рівнянь в цілих числах використовують ***властивості подільності***.

Задача 12.7 (ОМО-1997, 10). Для фіксованого простого числа p знайти всі пари (x, y) цілих чисел, що задовільняють співвідношення

$$p(x+y)=xy.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $y=\frac{xp}{x-p}$. Спочатку розглянемо найпростіші випадки, коли права частина є цілим числом.

$x-p=1$, тоді $x=p+1$, $y=p(p+1)$.

$x-p=-1$, тоді $x=p-1$, $y=(1-p)\cdot p$.

В інших випадках права частина має бути скоротним дробом. Але НСД(x, $x-p$) = НСД(x, p) = НСД(p, $x-p$). Тому цей дріб може бути скоротним лише на p, тобто $x = kp$. Тоді $y=\frac{kp}{k-1}$. Але НСД(k, $k-1$) = НСД(k,1) = 1, тому p має ділитись на $k-1$.

Це можливо лише у випадках:

$k-1=1, k=2, x=2p, y=2p$;

$k-1=-1, k=0, x=0, y=0$;

$k-1=p, k=p+1, x=p(p+1), y=p+1$;

$k-1=-p, k=1-p, x=p(1-p), y=p-1$. ▣

При розв'язуванні деяких рівнянь часто бувають корисними різні нерівності та оцінки.

Задача 12.8 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Розв'язання. Серед чисел z, y, z обов'язково є хоча б одне натуральне, бо інакше ліва частина рівняння має бути від'ємною. Нехай це число x. Розглянемо випадки:

а) $x=1$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $y=-z=k\in N$.

Маємо трійку $(1, k, -k)$, та всі трійки, отримані з неї за допомогою перестановок.

б) $x=2$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{y}$; $\frac{1}{z}=\frac{y-2}{2y}$;

$z=\frac{2y}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}$.

Оскільки z - ціле число, то маємо: $y-2=1$, трійка (2,3,6);

$y-2=-1$, трійка (2,1,-2); $y-2=2$, трійка (2,4,4);

$y-2=-2$, але $y\neq 0$; $y-2=4$, трійка (2,6,3);

$y-2=-4$, трійка (2,-2,1).

в) $x\geq 3$. Тоді $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1-\frac{1}{x}\geq\frac{2}{3}$, тому серед чисел y і z є хоч одне натуральне, нехай це y.

Випадки, коли серед чисел x, y, z є 1 чи 2 вже розглянуті. Тому будемо вважати, що $y\geq 3$.

Тоді $\frac{1}{z}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{y}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, звідки $1\leq z\leq 3$.

Знову ж випадки $z=1$ чи $z=2$ вже розглянуті, тому $z=3$.

Отже, маємо $x\geq 3$, $y\geq 3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$, звідки $x=y=z=3$.

Відповідь: трійки $((1,k,-k), (2,3,6), (2,4,4), (3,3,3)$ та отримані з них перестановки. ▣

Задача 12.9 (4 СМО-1997, 11). Довести, що коли натуральні числа m і n задовільняють рівність $m^2+n^2-2(1996+1997)mn=4n$, то число $(1997m+1)$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Запишемо дану рівність у вигляді квадратного рівняння відносно змінної n. Отримаємо $n^2-2((1996+1997)m+2)n+m^2=0$, $D=16(1996m+1)(1997m+1)$. Враховуючи, що розв'язками цього

рівняння мають бути натуральні числа, отримуємо, що його дискримінант точним квадратом. Але $НСД(1996m+1;1997m+1) =$
$= НСД(1996m+1;m) = НСД(m;1) = 1$. Тому числа $1996m+1$ і $1997m+1$ – точні квадрати. ■

Задача 12.10 (10-11). Довести, що рівняння

$$x^2-5y^2=1$$

має безліч розв'язків в цілих числах.

Розв'язання. Неважко замітити, що пара чисел $x=\pm9,\ y=\pm4$ задовільняє дане рівняння.

Позначимо за x_k, y_k пару цілих чисел, що задовільняє дане рівняння, і підберемо цілі коефіцієнти a,b,c,d так, щоб числа $x_{k+1}=ax_k+by_k$ $y_{k+1}=cx_k+dy_k$ також були розв'язками даного рівняння. Для цього достатньо виконання умови $x_{k+1}^2-5y_{k+1}^2=x_k^2-5y_k^2=1$, або

$$a^2x_k^2+2abx_ky_k+b^2y_k^2-5\left(c^2x_k^2+2cdx_ky_k+d^2y_k^2\right)=x_k^2-5y_k^2.$$

Звідси отримуємо, що коефіцієнти a,b,c,d задовільняють систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2-5c^2=1; \\ b^2-5d^2=-5; \\ ab=5cd. \end{cases}$$

Одним з розв'язків цієї системи є четвірка чисел $a=9, b=20$, $c=4, d=9$.

Отже, всі пари чисел x_k, y_k, що задовільняють умови $x_1=\pm9, y_1=\pm4$, $x_{k+1}=9x_k+20y_k$, $y_{k+1}=4x_k+9y_k$, $(k\in N)$, є розв'язками даного рівняння. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 12.11 (8-9). Розв'язати в цілих числах рівняння:

1) $(2x+y)(5x+3y)=7$;

2) $xy=x+y+3$;

3) $x^2=14+y^2$;

4) $x^2+y^2=x+y+2$.

Задача 12.12 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння:

1) $x^3+21y^2+5=0$;

2) $x^2+y^2=4z-1$;

3) $15x^2-7y^2=9$;

4) $x^2+y^2+z^2=8t-1$;

5) $3^m+7=2^n$.

Задача 12.13 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння:

1) $3\cdot2^m+1=n^2$;

2) $x^2-y^2=1988$.

Задача 12.14 (9-10). Розв'язати в натуральних числах рівняння:

$$x+y+z=xyz.$$

Задача 12.15 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння:

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3.$$

Задача 12.16 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння:

1) $13x-16y=7$;

2) $7x+19y=35$;

3) $2x+3y+5z=18$.

Задача 12.17 (8-9). Знайти цілі розв'язки системи:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

Задача 12.18 (9-10) На факультет від школярів подано на 600 заяв більше, ніж від виробничників. Дівчат серед школярів в 5 раз більше, ніж серед виробничників, а хлопців серед школярів більше, ніж хлопців серед виробничників, в n раз $(6\le n\le 12, n\in N)$. Визначте загальне число заяв, якщо серед виробничників хлопців на 20 більше, ніж дівчат.

Задача 12.19 (КМО-1992, 8). Чи існують такі натуральні числа m і n, щоб виконувалась рівність $2^n-2^m=1992$?

Задача 12.20 (УМО-1994, 8). Знайти всі раціональні розв'язки рівняння

$$x^2+y^2+5x=7.$$

Задача 12.21 (10-11). Розв'язати в цілих числах рівняння:

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2.$$

Задача 12.22 (10-11). Розв'язати в раціональних числах рівняння

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}.$$

Задача 12.23 (2 СМО-1996, 9). Натуральне число n називається крихким, якщо існують натуральні числа a,b,x,y такі, що $a+b=n$ і $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Знайдіть усі крихкі натуральні числа.

Задача 12.24 (КМО, 1971-8). Довести, що при будь-якому цілому n число $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ - ціле.

Задача 12.25. Упаковуючи деталі, їх вирішили розкласти по 12 у ящик, але при цьому залишилась одна деталь. Тоді з одного ящика забрали всі деталі і розклали порівну в решту ящиків. Скільки було деталей, якщо в один ящик можна покласти не більше як 20 деталей?

Задача 12.26 (5 СМО-1998, 10). Доведіть, що дана система не має розв'язків в цілих числах:

$$\begin{cases} k^2+2l=19; \\ l^2+2m=9; \\ m^2+2k=8. \end{cases}$$

Задача 12.27 (5 СМО-1998, 11). Відомо, що для даного натурального n існують раціональні числа p і q такі, що $\sqrt[3]{n}=p+q\sqrt[3]{3}$. Доведіть, що $n=k^3$ або $n=3k^3$ для деякого натурального k.

Задача 12.28 (УМО-2000, 9). Знайти всі цілі числа n, при яких число $n^2+19n+99$ є квадратом цілого числа.

Задача 12.29 (УМО-2000, 8). Знайти всі четвірки натуральних чисел k,l,m,n, які задовільняють рівняння

$$k^l+k^m-k^n=2000.$$

Задача 12.30 (9-10). Розв'язати в простих числах рівняння:

$$x^y+1=z.$$

Задача 12.31 (10-11). Розв'язати в цілих числах рівняння:

$$x^6+3x^3+1=y^4.$$

Задача 12.32 (11). Доведіть, що якщо цілі числа x,y,z задовільняють рівність

$$x^3+y^3=z^3,$$

то хоча б одне з цих чисел ділиться на 3.

Задача 12.33 (9-10). Чотири різних дійсних числа утворюють арифметичну прогресію, різниця якої є цілим числом. Сума квадратів даних чисел рівна 70. Знайти цю прогресію.

Задача 12.34 (10-11). При яких цілих $n\in Z$ число 5π є періодом функції

$$f(x)=\cos(nx)\cdot\sin\left(\frac{15}{n^2}x\right)?$$

Задача 12.35 (11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin\frac{2\pi}{x^2+2x+a}=0$$

має точно 6 розв'язків?

Задача 12.36 (11). При яких додатних значеннях параметра a невід'ємні корені рівняння

$$\cos((5a-9)x)=\cos((9a+17)x),$$

розміщені в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію?

Задача 12.37 (7 СМО-2000, 9). Знайдіть усі прості числа p, для яких існують такі натуральні числа m і n, що $p^m-n^3=1$.

Задача 12.38 (13 РМО-1986, 9). Відновіть цифри в рівності

$$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850.$$

Задача 12.39 (3 РМО-1978, 10). Скінченна чи нескінченна множина розв'язків в натуральних числах рівняння

$$x^2+y^3=z^2?$$

Задача 12.40 (13 РМО-1987, 10). Знайти всі значення n, при яких число $\underbrace{1444...4}_{n}$ є квадратом натурального числа.

Задача 12.41 (9 РМО-1982, 11). Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^2-y^3=7; \\ z^2-2y^2=1 \end{cases}$$

не має цілих розв'язків (x,y,z).

Задача 12.42 (14 РМО-1987, 11). Знайти чоча б одну трійку чисел x,y,z, які задовільняють рівняння

$$x^3 + y^4 = z^5.$$

Скінченна чи нескінченна множина його розв'язків в натуральних числах?

Задача 12.43 (8-9). Розв'язати в цілих числах рівняння:

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

Задача 12.44 (9-10). Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Задача 12.45 (10-11). Розв'язати рівняння

$$5\cos\left(2\pi\sqrt[3]{x}\right) + 2\cos\left(2\pi\sqrt[3]{x-1}\right) = 7.$$

Задача 12.46 (10-11). Розв'язати рівняння

$$3\sin^2\left(\pi\sqrt{x}\right) + 2\sin^2\left(\pi\sqrt{x-15}\right) = 0.$$

Задача 12.47 (9-10). Чотири різних дійсних числа утворюють ариф-метичну прогресію, різниця якої $d \in Z$. Якщо до подвоєного квадрата першого з цих чисел додати квадрати всіх інших, то отримаємо число 1... Знайти серед всіх таких прогресій таку, у якої сума всіх членів найбільша.

Вказівки та відповіді до задач

12.11. Відповідь: 1) (-4;9), (14;-21), (4;-9), (-14;21); 2) (-3;0), (-1;-1), (0;-3), (5;2), (3;3), (2;5); 3) не має розв'язків; 4) (0;-1), (-1;0), (1;-1), (-1;1), (0;2), (2;0), (1;2), (2;1). **12.12.** Відповідь: 1) – 4) розв'язків в цілих числах нема... Вказівка: розгляньте залишки при діленні відповідно на 7, 4, 5, 8. ... $m = 0, n = 3$ або $m = 2, n = 4$. **12.13.** Відповідь: 1); $n = \pm 2, m = 0$ аб... $n = \pm 5, m = 3$ або $n = \pm 7, m = 4$; 2) $x = \pm 498, y = \pm 496$ ... $x = \pm 78, y = \pm 64$. **12.14.** Відповідь: (1;2;3) та всі можливі перестановк... **12.15.** Відповідь: (1;1;1), (-1;1;1), (1;-1;1), (1;1;-1). Вказівка: розв'яжіт... спочатку рівняння в натуральних числах, при цьому оцініть ліву частину ... допомогою нерівності Коші. **12.16.** Відповідь: ... $x = 3 + 16k, y = 2 + 13k, k \in Z$; 2) $x = 5 + 19k$, $y = -7k, k \in Z$; ... $x = 3k - m, y = 6 - 2k - m$, $z = m$, $k, m \in Z$. **12.17.** Відповід... $x = y = 1, z = 0$. **12.18.** Відповідь: 832 заяви, $n = 7$. **12.19.** Відповідь: н... існують. Вказівка: розкладіть число 1992 в добуток простих множникі... **12.20.** Відповідь: $x_1 = 1, y_1 = -1$ ... $x_2 = \dfrac{k^2 - 2k - 6}{1 + k^2}, y_2 = \dfrac{1 - k^2 - 7k}{1 + k^2}$, $k \in Q$. Вказівка: точка $(1;1)$ належить колу $x^2 + y^2 + 5x = 7$. Використовуючи це, покажіть, що в...

інші розв'язки (такі, що $x \neq 1$), можна знайти як точки перетину з колом $x^2 + y^2 + 5x = 7$ прямої $y - 1 = k(x - 1), k \in Q$. **12.21.** Відповідь: (-9;12), (-9;-12), (-8;0), (-7;0), (-4;12), (-4;-12), (-1;0), (0;0), (1;12), (1;-12). Вказівка: покажіть, що при цілих $z > 9$ вираз $z^2 + 7z$ не може бути точним квадратом, бо міститься між двома послідовними точними квадратами. **12.22.** Відповідь: $x = \dfrac{3}{2}, y = \dfrac{1}{2}$. **12.23.** Відповідь: всі складені числа. Якщо $n = pq, p > 1, q > 1$, $p, q \in N$, то можна покласти $a = p, b = (q-1)p, x = 1$, $y = (p-1)(q-1)$. Самостійно доведіть, що число n не може бути простим. **12.24.** Вказівка: перетворіть даний вираз до вигляду $n^3 + \dfrac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5} + \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$. **12.25.** Відповідь: 169 деталей. **12.26.** Вказівка: додайте всі три рівності. **12.28.** Відповідь: $n = -18, n = -10, n = -9, n = -4$. Вказівка: дослідіть, коли число $n^2 + 19n + 99$ належить інтервалу $\left((n+9)^2;(n+10)^2\right)$ (при $n \geq 0$ чи інтервалу $\left((n+10)^2;(n+9)^2\right)$ при $n \leq -10$). **12.29.** Відповідь: $k = 2, l = 4, m = 11, n = 6$ або $k = 2, l = 11, m = 4, n = 6$. **12.30.** Відповідь: $x = 2, y = 2, z = 5$. **12.31.** Відповідь: (0;1), (0;-1). Вказівка: покажіть, що при $x > 0$ виконується $\left(x^3 + 1\right)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < \left(x^3 + 2\right)^2$ та при $x \leq -2$ виконується $\left(x^3 + 2\right)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < \left(x^3 + 1\right)^2$. **12.32.** Вказівка: припустіть супротивне та позначте $x = 3k \pm 1$, $y = 3m \pm 1, z = 3n \pm 1$, де k, m, n - деякі цілі числа, а вибір знаків довільний. **12.33.** Відповідь: $-2; 1; 4; 7$ або $-7; -4; -1; 2$. **12.34.** Відповідь: $n \in \{\pm 1; \pm 5\}$. **12.35.** Відповідь: при $a \in \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{3}\right)$. **12.36.** Відповідь: при $a \in \left\{\dfrac{1}{19}; \dfrac{5}{12}; \dfrac{9}{5}; \dfrac{22}{3}; 35\right\}$. Вказівка: корені даного рівняння $x_1 = \dfrac{\pi k}{7a + 4}, x_2 = \dfrac{\pi m}{2a + 13}$ $(k, m \in Z)$. Тоді для того, щоб вони утворювали арифметичну прогресію, необхідно, щоб існувало таке $n \in N$, що $\frac{n}{7a+4}=\frac{1}{2a+13}$ або $\frac{1}{7a+4}=\frac{n}{2a+13}$. **12.37.** Відповід $p=2, m=n=1$ або $p=3, m=n=2$. **12.38.** Відповід $x=2, y=1, z=4$. **12.39.** Відповідь: нескінченна, наприк $\left(\frac{y^3-1}{2}; y; \frac{y^3+1}{2}\right)$, де $y>1$ - непарне число або $\left(13k^3; 3k^2; 14k^3\right)$, $k\in N$. **12.40.** Відповідь: $n=2$ та $n=3$. Вказівка: при $n\ge 4$ має $\underbrace{1444...4}_{n}=4k^2$, тоді $k^2=36\underbrace{11...1}_{n-2}$, але точні квадрати не можуть дават залишок 3 при діленні на 4. **12.41.** Вказівка: припустивши супроти отримуємо, що z непарне, y парне, x - непарне. Потім розгляну залишки при діленні на 4. **12.42.** Відповідь: нескінченна, наприк $x=2^8k^{20}, y=2^6k^{15}$, $z=2^5k^{12}$, де $k\in N$. **12.43.** Відповідь: (3;2), (3;-2), (-3;2), (-3;-2). **12.44.** Відповідь: $x=\pm(m^2-n^2)$, $y=\pm 2mn$, $z=\pm(m^2+n^2)$, де $m,n\in Z$, а вибір знаків "+" та "-" може бу довільним. **12.45.** Відповідь: $x_1=0, x_2=1$. **12.46.** Відповід $x_1=16, x_2=64$. **12.47.** Відповідь: $a_1=-1, d=1$.

§ 13. Методи доведення нерівностей

Без задач, в яких вимагається довести певну нерівність, не обходиться жодна олімпіада. Розглянемо лише деякі, найбільш "популярні" методи розв'язування таких задач.

При доведенні багатьох нерівностей достатньо знати та вміти користуватися основними властивостями нерівностей:

$$\left.\begin{array}{l} a>b \\ b>c \end{array}\right\} \Rightarrow a>c;$$

$$a>b \Rightarrow a+m>b+m;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \ge b_1, \\ a_2 \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ a_n \ge b_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n \ge b_1+b_2+\ldots+b_n,$$

причому, якщо хоча б в одній з даних нерівностей знак $\ge$ замінити на $>$, то і в нерівності-наслідку також потрібно змінити з $\ge$ на $>$;

$$\left.\begin{array}{l} a\ge b \\ m>0 \end{array}\right\} \Rightarrow am\ge bm; \qquad \left.\begin{array}{l} a>b \\ m>0 \end{array}\right\} \Rightarrow am>bm;$$

$$\left.\begin{array}{l} a\ge b \\ m<0 \end{array}\right\} \Rightarrow am\le bm; \qquad \left.\begin{array}{l} a>b \\ m<0 \end{array}\right\} \Rightarrow am<bm;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1>b_1\ge 0, \\ a_2>b_2\ge 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n>b_n\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n > b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n;$$

$$\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^x>b^x; \qquad \left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^x<b^x.$$

Задача 13.1 (8-9). Довести нерівність.

$$x^8+x^6-4x^4+x^2+1\ge 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$x^8+x^6-4x^2+x^2+1=x^8-2x^4+1+x^6-2x^4+x^2=$$

$$=\left(x^4-1\right)^2+x^2\left(x^2-1\right)^2\ge 0,$$

оскільки обидва доданки невід'ємні. ■

Це типовий приклад використання найпростішого методу, як[...] називається "*виділенням квадратів*".

Задача 13.2 (9-10). Довести нерівність

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}.$$

Розв'язання. Після множення нерівності на n та тотожних перетвор[...] маємо такі рівносильні нерівності:

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\ge(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2,$$

$$n\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1[\ldots]$$

$$+2a_2a_3+2a_2a_4+\ldots+2a_{n-1}a_n)\ge 0,$$

$$(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)-(2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+$$

$$+2a_2a_3+\ldots+2a_2a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n)\ge 0.$$

Після перегрупування доданків маємо очевидну нерівність, рівносил[...] даній:

$$(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_1-a_n)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_2-a_n)^2+$$

$$+\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2\ge 0.\ ■$$

Задача 13.3 (нерівність Чебишева). Довести, що якщо $a_1,a_2,\ldots,a_n$ [...] $b_1,b_2,\ldots,b_n$ - дві неспадні (або дві незростаючі) послідовності чисел, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}.$$

Розв'язання. Після перегрупування доданків в рівносильній нерівності

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)-\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)\ge 0$$

маємо очевидну нерівність

$$(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\ldots+(a_1-a_n)(b_1-b_n)+$$

$$+(a_2-a_3)(b_2-b_3)+\ldots+(a_2-a_n)(b_2-b_n)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n)\ge 0$$

оскільки кожен добуток $\left(a_i-a_k\right)\left(b_i-b_k\right)\ge 0.$ ■

Часто при доведенні нерівностей використовується "***метод послідовних оцінок***".

Задача 13.4 (9-10). Довести нерівність

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le\frac{2n-1}{n}.$$

Розв'язання. Оцінимо ліву частину нерівності

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.\ ■$$

Задача 13.5 (9-10). Довести нерівності

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Розв'язання. Позначимо $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}=A$ і оцінимо A^2. Маємо:

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}=$$

$$=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\frac{6^2-1}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}\le\frac{1}{2n+1},$$

звідки $A\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Також

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot 8}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n}=$$

$$=\frac{1}{4n}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2-1}\ge\frac{1}{4n},$$

звідки $A\ge\frac{1}{2\sqrt{n}}$. ■

Задача 13.6 (9-10). Довести, що $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

Розв'язання. Дана нерівність при натуральному n рівносильна таким:

$$1<\sqrt{(n+1)n}-\sqrt{n(n-1)},\quad \sqrt{n(n-1)}+1<\sqrt{n(n+1)},$$

$$n(n-1)+2\sqrt{n(n-1)}+1<n(n+1),\quad 2\sqrt{n(n-1)}<2n-1;$$

$$4n(n-1)<4n^2-4n+1,\quad 0<1,$$

що показує її справедливість. ■

Часто використовується ***нерівність Коші-Буняковського***

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

яка є узагальненням нерівності $\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Задача 13.7 (5 СМО-1998, 10). Доведіть, що для чисел x,y,z з відріз $[0;1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}}+\frac{y}{\sqrt{1+zx}}+\frac{z}{\sqrt{1+xy}}\le\sqrt{2(x+y+z)}.$$

Розв'язання. Скористаємось нерівністю Коші-Буняковського стосов векторів $\vec{a}(\sqrt{x};\sqrt{y};\sqrt{z})$, $\vec{b}\left(\sqrt{\frac{x}{1+yz}};\sqrt{\frac{y}{1+xz}};\sqrt{\frac{z}{1+xy}}\right)$.

Тоді

$$\frac{x}{\sqrt{1+yz}}+\frac{y}{\sqrt{1+zx}}+\frac{z}{\sqrt{1+xy}}\le\sqrt{x+y+z}\cdot\sqrt{\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+xz}+\frac{z}{1+xy}}$$

Оскільки нерівність симетрична, то, не обмежуючи загальності, мож вважати, що $0\le x\le y\le z\le1$. Тоді $1+xy\le1+zx\le1+yz$, звідки

$$\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}\le\frac{x+y+z}{1+xy}.$$

Але $(1-x)(1-y)\ge0$, звідки отримуємо $x+y\le1+xy\le1+2xy$.

Тоді $\sqrt{\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+xz}+\frac{z}{1+xy}}\le\sqrt{\frac{1+2xy+z}{1+xy}}\le\sqrt{\frac{1+2xy+1}{1+xy}}=\sqrt{2}$.

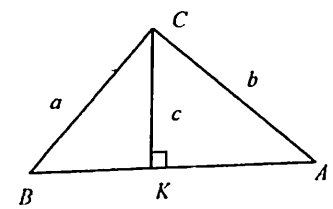
Звідси та з попередньої оцінки отримуємо твердження задачі. ■

При доведенні деяких нерівностей допомагають *геометричні міркування*. У випадку, коли ці нерівності мають аналітичне доведення, геометричні розв'язки, як правило, більш красиві.

Задача 13.8 (9-10). Довести нерівність

$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}$$

$(a>c>0,\ b>c>0)$.



Мал. 13.1

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{1}{2}ab.$$

Оскільки $a\ge c, b\ge c$, то можна вважати a і b довжинами сторін деякого трикутника, а c – висотою, проведеною до третьої сторони. Тоді маємо

$$\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{a^2-c^2}+\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{b^2-c^2}=S_{BCK}+S_{ACK}=S_{ABC}=$$

$$=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\angle BCA\le\frac{1}{2}ab.$$ ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 13.9 (8-9). Довести нерівність

$$x^4+y^4+z^2+1\ge2x(xy^2-x+z+1).$$

Задача 13.10 (9-10). Довести, що якщо $a>0,b>0,c>0$, то справедлива нерівність

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge(a+b+c)^2.$$

Задача 13.11 (9-10). Довести, що якщо a,b,c,d – невід'ємні, то має місце нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \ge \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

Задача 13.12 (9). Довести, що при всіх $x \ge 1$ виконується нерівність

$$2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}<2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}.$$

Задача 13.13 (9). Довести, що при довільному натуральному $n \ge 2$ вір нерівності

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

Задача 13.14 (9). Довести, що якщо $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$ та $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$, то вірні нерівності

$$-1 \le a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le 1.$$

Задача 13.15 (9-10). Довести, що при натуральному $n>2$ вір нерівність

$$\sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1.$$

Задача 13.16 (9-10). Довести, що при довільному натуральному n д всіх x таких, що $|x|<1$, виконується нерівність

$$(1+x)^n+(1-x)^n \le 2^n.$$

Задача 13.17 (9-10). Довести, що якщо $x>0$, $x \ne 1$, то при довільному натуральному n вірна нерівність

$$x+\frac{1}{x^n}>2n\cdot\frac{x-1}{x^n-1}.$$

Задача 13.18 (9). Довести, що

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-\sqrt{2}.$$

Задача 13.19 (9-10). Довести, що якщо $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=1$, то

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2 \ge \frac{1}{n}.$$

Задача 13.20 (9). Довести, що якщо в арифметичній та геометрич прогресіях всі члени додатні, число членів однакове, перші та останні чле відповідно рівні, то сума членів арифметичної прогресії більша за су членів геометричної прогресії $(d \ne 0)$.

Задача 13.21 (8-9). Сума трьох додатних чисел дорівнює 6. Довести, що сума їх квадратів не менша 12.

Задача 13.22 (9). Довести, що при $a>0, b>0, c>0$ вірна нерівність

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Задача 13.23 (9). Відомо, що $a+b+c=0$. Довести, що

$$ab+bc+ac \le 0.$$

Задача 13.24 (10). Для довільних чисел $a, b \in [0,1]$ довести нерівність

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Задача 13.25 (9-10). Довести нерівність

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<2500\pi.$$

Задача 13.26 (9-10). Для всіх натуральних $n \ge 2$ довести нерівність

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}79\cdot n^2$$

Задача 13.27 (10-11). Довести, що якщо α, β, γ гострі кути такі, що $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$, то виконується нерівність

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\ \operatorname{tg}\alpha<1.$$

Задача 13.28 (11). Довести, що при $x \in R$, $y>0$ виконується

$$x^2(4+\log_2^2 y)+2x\log_2 y+\log_2^2 y+1 \ge 0.$$

При яких значеннях x, y досягається рівність?

Задача 13.29 (9-10). Довести, що, якщо $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ та $ac>0$, то має місце нерівність

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b} \ge 4.$$

Задача 13.30 (УМО-2001, 10). Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - дійсні числа такі, що

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \ge n^2,$$

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \le n^3+1.$$

Доведіть, що для кожного k $(=1,2,\ldots,n)$

$$n-1 \le a_k \le n+1.$$

Задача 13.31 (9). Яке з чисел більше:

а) $\sqrt{1999}+\sqrt{2001}$ чи $2\sqrt{2000}$;

б) $\sqrt[3]{1999}+\sqrt[3]{2001}$ чи $2\sqrt[3]{2000}$?

Задача 13.32 (10-11). Яке з чисел більше: $\cos(\sin 1)$ чи $\sin(\cos 1)$?

Задача 13.33 (8-9). Числа a, b, c такі, що для всіх $x\in[-1;1]$ виконується нерівність $|ax^2+bx+c|\le 1$. Довести, що для всіх $x\in[-1;1]$ також виконується нерівність $|cx^2+bx+a|\le 2$.

Задача 13.34 (9). Довести, що коли добуток довільних додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює 1, то виконується нерівність

$$(1+9a_1)(1+9a_2)\cdot\ldots\cdot(1+9a_n)\ge 6^n.$$

Задача 13.35 (10-11). Дано декілька додатних чисел, сума яких дорівнює 3 та сума квадратів яких дорівнює 1. Довести, що серед цих чисел є три числа таких, що їх сума не менша за 1.

Задача 13.36 (10-11). Довести, що для всіх натуральних n виконується нерівність $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^4}+\frac{3}{3^9}+\cdots+\frac{n}{3^{n^2}}<\frac{1}{2}$.

Задача 13.37 (УМО-1977, 10). Довести, що для всіх $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ виконується нерівність $x\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 13.38 (КМО-1961, 10). Знайти найбільше та найменше значення виразу $\cos A+\cos B+\cos C$, де A, B, C - кути трикутника.

Задача 13.39 (5 СМО-1998, 8). Доведіть, що для довільних додатних чисел a,b,c, для яких $abc=1$, справедлива нерівність

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1.$$

Задача 13.40 (5 СМО-1998, 10). Доведіть нерівність

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{7}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{1996}{1998}<\frac{1}{10\sqrt[3]{1999}}.$$

Задача 13.41 (5 СМО-1998, 10). Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x+y+z=5$ та $x^2+y^2+z^2=9$. Доведіть, що

$$4\le xyz\le\frac{112}{27}.$$

Задача 13.42 (УМО-2000, 10). Про дійсні числа α і β з проміжку $[0;\pi]$ відомо, що $\cos\alpha+\cos\beta=-1$. Доведіть, що

$$1\le\sin\alpha+\sin\beta\le\sqrt{3}.$$

Задача 13.43 (УМО-2000, 11). Нехай a,b,c - невід'ємні дійсні числа такі, що $a+b+c=3$. Доведіть, що

$$2(a^3b+b^3c+c^3a)\ge 3(a^2b+b^2c+c^2a-1).$$

Задача 13.44 (10-11). Довести, що при всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8.$$

Задача 13.45 (10-11). Довести, що при всіх $x\in[-2;2]$ виконується нерівність

$$12\sqrt{4-x^2}+3x\sin x+4x\cos x\le 26.$$

Задача 13.46 (10-11). Знайти найбільше та найменше значення виразу

$$8\sin x\cos y+4\sin x\sin y+\cos x.$$

Задача 13.47 (1 РМО-1974, 10). Довести нерівність

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots-\frac{1}{999}+\frac{1}{1000}<\frac{2}{5}.$$

Задача 13.48 (11 РМО-1985, 10). Довести, що знаки чисел a, b, c однакові тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$ab+bc+ca>0,\quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0.$$

Задача 13.49 (9 РМО-1983, 11). Довести, що для довільних чисел $\alpha>1$, $\beta>1$, $\gamma>1$ таких, що $\frac{\alpha}{\beta}\ge\frac{\gamma}{\alpha}$, виконується нерівність

$$\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}\ge\frac{\lg\gamma}{\lg\alpha}.$$

Вказівки та відповіді до задач

13.9. Вказівка: використайте метод виділення квадратів. **13.10.** Вказів за допомогою рівносильних при даних умовах перетворень можна отрима нерівність $a\left(b^2-c^2\right)^2+b\left(c^2-a^2\right)^2+c\left(a^2-b^2\right)^2\ge 0$. **13.11.** Вказів піднесіть обидві частини нерівності до квадрату. **13.12.** Вказівка: домнож та розділіть ліву та праву частини нерівності на спряжені вирази. **13.1** Вказівка: використайте оцінку задачі 13.12. **13.15.** Вказівка: позна $\sqrt[n]{n}-1=z$. Тоді $n=(1+z)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}z^2$, звідки $z^2<\frac{2}{n}$

13.16. Вказівка: при $|x|<1$ вірно $\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\le\frac{1+x}{2}$, $\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\le\frac{1-x}{2}$

13.17. Вказівка: домножте нерівність на $\frac{(x^n-1)x^n}{x-1}$ та оцініть ліву части отриманої рівності. **13.18.** Вказівка: використайте нерівні $\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. **13.19.** Вказівка: нех $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=b$. Тоді з нерівнос $\left(\frac{a_1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_2}{b}-1\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{b}-1\right)^2\ge 0$ отримуємо тверджен задачі. **13.20.** Вказівка: не обмежуючи загальності, можна вважати, щ знаменник геометричної прогресії $0<q<1$. Тоді для доведення нерівнос $\frac{(a+aq^{n-1})n}{2}>a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}$ скористайтесь очевидни нерівностями $1+q^{n-1}>q^m+q^{m+n-1}$, $m=1,2,\ldots,n-1$. **13.21.** Вказів використайте нерівність $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$. **13.24.** Вказі розгляньте графік функції $y=\sqrt{1-x^2}$. **13.25.** Вказівка: розгляньте ко $x^2+y^2=100^2$. Тоді кожен доданок $\sqrt{(100-n)(100+n)}$ мож вважати площею прямокутника з шириною 1 та висотою $\sqrt{100^2-n^2}$ **13.27.** Вказівка: використайте оцінку $\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$. **13.28.** Відпові

завжди виконується строга нерівність. **13.29.** Вказівка: виразіть b через a і c. **13.30.** Вказівка: оцініть суму $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|a_k-n\right|^2$. **13.31.** Відповідь: а) друге число більше; б) друге число більше. **13.32.** Відповідь: перше число більше. **13.33.** Вказівка: скористайтесь тотожністю $cx^2+bx+a=c(x^2-1)+(a-b+c)\frac{1-x}{2}+(a+b+c)\frac{1+x}{2}$. **13.35.** Вказівка: нехай $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$. Методом послідовних оцінок покажіть, що $a_1+a_2+a_3\ge a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1$. **13.36.** Вказівка: доведіть, що $\frac{n}{3n^2}<\frac{1}{3^n}$. **13.37.** Вказівка: $x\cos x=x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\le x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\le\frac{\pi^2}{16}$. **13.38.** Відповідь: $1<\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$. **13.39.** Вказівка: скористайтесь нерівністю $a^3+b^3\ge ab(a+b)$. **13.40.** Вказівка: розгляньте також числа $\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{1997}{1999}$ та $\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{9}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{1998}{2000}$. **13.41.** Вказівка: доведіть, що числа x,y,z належать $\left[1;\frac{7}{3}\right]$ та використайте очевидні нерівності $(x-1)(y-1)(z-1)\ge 0$ та $\left(\frac{7}{3}-x\right)\left(\frac{7}{3}-y\right)\left(\frac{7}{3}-z\right)\ge 0$.

13.43. Вказівка: скористайтесь нерівністю $2t^3+1\ge 3t^2$, яка виконується для всіх $t\ge 0$. **13.44.** Вказівка: розділіть нерівність на $\cos^2 x$ та виконайте заміну $\operatorname{tg}x=t\in(0;1)$. **13.45.** Вказівка: розгляньте вектори $\vec{a}(12;3;4)$ та $\vec{b}\left(\sqrt{4-x^2};x\sin x;x\cos x\right)$. **13.46.** Відповідь: найменше значення -9, найбільше - 9. Вказівка: розгляньте вектори $\vec{a}(8;4;1)$ та $\vec{b}(\sin x\cos y;\sin x\sin y;\cos x)$. **13.47.** Вказівка: дана сума $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}-\ldots-\frac{1}{999000}<\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}<\frac{2}{5}$. **13.48.** Вказівка:

припустіть супротивне та розгляньте випадки $a \le b < 0 < c$ і $a < 0 < b \le c$.

§ 14. Середні величини. Нерівність Коші

Для невід'ємних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ число $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ називається *середнім арифметичним*, число $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ - *середнім геометричним*, число $S_m = \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}{n}}$ - *середнім степеневим порядку* m, а зокрема число $Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ - *середнім квадратичним*. Для додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ число
$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$
називається *середнім гармонійним*.

З задачі 13.2 випливає, що $Q \ge A$. Для встановлення зв'язку між середнім арифметичним та середнім геометричним нам потрібна наступна задача.

Задача 14.1 (9-10). Довести, що якщо добуток n додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ дорівнює 1, то їх сума
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge n.$$
Розв'язання. Доведення проведемо методом математичної індукції. При $n = 2$ маємо
$$x_1 \cdot x_2 = 1, x_1 + x_2 - 2 = x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{x_1^2 + 1 - 2x_1}{x_1} = \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} \ge 0,$$
причому рівність досягається лише при $x_1 = x_2 = 1$.

Припустимо, що для довільних n додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ з рівності $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ випливає нерівність
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge n. \qquad (*)$$
Доведемо, що для довільних $(n+1)$ додатних чисел $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ з рівності $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \cdot y_{n+1} = 1$ випливає нерівність
$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} \ge n + 1. \qquad (**)$$
Застосувавши припущення до чисел $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, (y_n \cdot y_{n+1})$, отримуємо
$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n \cdot y_{n+1} \ge n,$$
звідки
$$y_1 + y_2 + \dots y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \ge n + y_n + y_{n+1} - y_n \cdot y_{n-1}.$$
Тому для виконання нерівності $(**)$ достатньо виконання нерівності
$$y_n + y_{n+1} - y_n \cdot y_{n+1} \ge 1, \qquad (***)$$
яку можна записати так:
$$(y_n - 1)(1 - y_{n+1}) \ge 0.$$
Оскільки умова та твердження задачі симетричні відносно чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ (тобто не змінюються при перенумеруванні цих чисел), то без обмеження загальності можна вважати, що $y_n \ge 1$, $y_{n+1} \le 1$. Звідси маємо, що нерівності $(***)$ та $(**)$ виконуються.

Твердження задачі доведене. При цьому з процесу доведення видно, що знак рівності можливий лише у випадку, коли $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$. ■

Перейдемо до встановлення зв'язку між A та G.

Якщо хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ рівне нулю, то маємо $G = 0 \le A$. В протилежному випадку маємо $\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = 1$, звідки $\frac{a_1}{G} + \frac{a_2}{G} + \dots + \frac{a_n}{G} \ge n$, або
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \ge G,$$
причому знак рівності можливий лише у випадку, коли $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Отже, $A \ge G$. Це співвідношення

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

називається ***нерівністю Коші***. На основі нерівності Коші для додатних $a_1,a_2,\ldots,a_n$ маємо $\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\ge\sqrt[n]{\dfrac{1}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}$, звідки

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\ge\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

тобто $G\ge H$.

Отже, маємо $Q\ge A\ge G\ge H$.

Співвідношення між середніми величинами, особливо нерівність Коші, часто використовуються, при розв'язуванні олімпіадних завдань. При цьому в більшості випадків потрібно привести нерівність до вигляду, зручного для застосування цих співвідношень.

Задача 14.2 (СМО-1995, 9). Дано дійсні числа a,b,c, всі вони більші за одиницю і такі, що $a+b+c=6$. Довести нерівність

$$\frac{a}{b^2-1}+\frac{b}{c^2-1}+\frac{c}{a^2-1}\ge 2.$$

Розв'язання. За допомогою нерівності Коші для трьох чисел $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}$ послідовно оцінимо ліву частину нерівності:

$$\frac{a}{b^2-1}+\frac{b}{c^2-1}+\frac{c}{a^2-1}=\left(\frac{a-1}{b^2-1}+\frac{b-1}{c^2-1}+\frac{c-1}{a^2-1}\right)+\left(\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}+\frac{1}{a^2-1}\right)$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{a-1}{b^2-1}\cdot\frac{b-1}{c^2-1}\cdot\frac{c-1}{a^2-1}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{b^2-1}\cdot\frac{1}{c^2-1}\cdot\frac{1}{a^2-1}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(b+1)(c+1)(a+1)}}+$$

$$+\frac{3}{\sqrt[3]{(b+1)(c+1)(a+1)}\cdot\sqrt[3]{(b-1)(c-1)(a-1)}}\ge\frac{3}{\frac{b+1+c+1+a+1}{3}}+$$

$$+\frac{3}{\frac{b+1+c+1+a+1}{3}\cdot\frac{b-1+c-1+a-1}{3}}=\frac{3}{3}+\frac{3}{3\cdot 1}=2. \blacksquare$$

Задача 14.3 (ОМО-1996, 11). Довести, що для кожного натурального числа $n\ge 2$ виконується нерівність

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>n\cdot\sqrt[n]{2}-n.$$

Розв'язання. Ліва частина нерівності містить точно n доданків. Тому ця нерівність рівносильна таким: $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}+n>n\sqrt[n]{2}$,

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)+\left(\frac{1}{n+1}+1\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}+1\right)>n\sqrt[n]{2},$$

$$\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\ldots+\frac{2n}{2n-1}>n\sqrt[n]{2},\quad \frac{\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\ldots+\frac{2n}{2n-1}}{n}>\sqrt[n]{2}.$$

Остання нерівність вірна, оскільки в лівій частині записано середнє арифметичне (різних) чисел $\dfrac{n+1}{n},\dfrac{n+2}{n+1},\ldots,\dfrac{2n}{2n-1}$, а в правій - їх середнє геометричне $\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}}=\sqrt[n]{2}$. ■

Іноді нерівність Коші можна використати для оцінки деяких величин.

Задача 14.4 (9-10). Знайти максимальне значення виразу

$$\frac{\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}}{1+x+2y+z+t}$$

при $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $t\ge 0$ та вказати, при яких x,y,z,t це значення досягається.

Розв'язання. Чисельник дробу $\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}=\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot z^4\cdot t^8}$ можна розглядати як середнє геометричне 16 чисел. Проте безпосереднє застосування нерівності Коші не приводить до його оцінки через $(1+x+2y+z+t)$. Тому застосуємо нерівність Коші так:

$$\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}=\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot\left(\frac{z}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{t}{8}\right)^8\cdot 4^4\cdot 8^8}=4\cdot\sqrt[16]{1\cdot x\cdot y^2\cdot\left(\frac{z}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{t}{8}\right)^8}\le$$

$$\le 4\frac{1+x+2y+4\cdot\frac{z}{4}+8\cdot\frac{t}{8}}{16}=\frac{1+x+2y+z+t}{4}.$$

Звідси $\frac{\sqrt[16]{x}\cdot\sqrt[8]{y}\cdot\sqrt[4]{z}\cdot\sqrt{t}}{1+x+2y+z+t}\le\frac{1}{4}$, причому знак рівності досягається при умові $1=x=y=\frac{z}{4}=\frac{t}{8}$, тобто при $x=y=1, z=4, t=8$. ■

Задача 14.5 (4 СМО-1998, 11). Доведи, що для всіх натуральних n виконується нерівність

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\ge(2n+1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2.$$

Розв'язання. Нерівність можна переписати у вигляді

$$\left(\frac{n+1}{2(2n+1)}\right)^n\ge\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2.$$

Оцінимо за допомогою нерівності Коші її праву частину. Маємо

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\right)^2=\frac{1^2}{1\cdot3}\cdot\frac{2^2}{3\cdot5}\cdot\frac{3^2}{5\cdot7}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{4n}\left(\frac{2^2}{1\cdot3}+\frac{4^2}{3\cdot5}+\frac{6^2}{5\cdot7}+\ldots+\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{4n}\left(\frac{2^2}{2^2-1}+\frac{4^2}{4^2-1}+\frac{6^2}{6^2-1}+\ldots+\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}\right)\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{4n}\left(n+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{4n}\left(n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right)^n=$$

$$=\left(\frac{1}{4n}\left(n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)\right)^n=\left(\frac{1}{4n}\left(n+\frac{n}{2n+1}\right)\right)^n=\left(\frac{1}{4n}\cdot\frac{2n^2+2n}{2n+1}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{n+1}{2(2n+1)}\right)^n.\ ■$$

Задача 14.6 (9-11). Довести, що коли добуток довільних додатних чисел x,y,z,t дорівнює 1, то виконується нерівність

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+3}+\frac{1}{z+3}+\frac{1}{t+3}\le1.$$

Розв'язання. Дана нерівність при умовах задачі рівносильна такій:

$$(y+3)(z+3)(t+3)+(x+3)(z+3)(t+3)+(x+3)(y+3)(t+3)+$$
$$+(x+3)(y+3)(z+3)\le(x+3)(y+3)(z+3)(t+3),$$

або, після перетворень,

$$xyzt+2(xyz+yzt+ztx+txy)+3(xy+xz+xt+yz+yt+zt)\ge27,$$

яка справедлива внаслідок виконання умови $xyzt=1$ та нерівностей

$$xyz+yzt+ztx+txy\ge4\sqrt[4]{x^3y^3z^3t^3}=4,$$

$$xy+xz+xt+yz+yt+zt\ge6\sqrt[6]{x^3y^3z^3t^3}=6.\ ■$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 14.7 (9). Довести, що $x^4+y^4+8\ge8xy$ при всіх дійсних x та y.

Задача 14.8 (8-9). Довести, що при $a,b,c\ge0$ вірна нерівність

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\ge\frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Задача 14.9 (9). Довести, що якщо $a\ge0, b\ge0, c\ge0$, то вірна нерівність

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge9abc.$$

Задача 14.10 (9-10). Довести, що при $a\ge0$ вірна нерівність

$$\frac{a^3+b^6}{2}\ge3ab^2-4.$$

Задача 14.11 (9-10). Довести, що якщо $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$, і $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — невід'ємні числа, серед яких є різні, то вірна нерівність

$$\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+\ldots+\frac{S}{S-a_n}>\frac{n^2}{n-1}.$$

Задача14.12 (9-10). Довести, що при $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ вірна нерівність

$$xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Задача 14.13 (9-10). Довести, що при довільному натуральному n вірна нерівність

$$(n!)^2\le\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n.$$

Задача 14.14 (9-10). Довести, що при довільному натуральному n вірна нерівність

$$(n!)^3\le\left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]^n.$$

Задача 14.15 (9-10). Довести, що якщо $x>0$ та n - ціле невід'ємне число, то вірна нерівність

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}.$$

Задача 14.16 (9-10). Довести, що якщо p,q,r - додатні раціональні числа, то при довільному $x>0$ вірна нерівність

$$p\cdot x^{q-r}+q\cdot x^{r-p}+r\cdot x^{p-q}\ge p+q+r.$$

Задача 14.17 (УМО-1974, 8). Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\ldots+a_{1974}}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_{1974}}+\ldots+$$

$$+\frac{a_{1974}}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{1973}},$$

якщо $a_i\ge 0$ $(i=1,2,\ldots,1974)$ і $a_1+a_2+\ldots+a_{1974}=1$?

Задача 14.18 (11). Довести нерівність

$$\log_2 3+\log_3 5+\log_5 2>3.$$

Задача 14.19 (10-11). Довести, що якщо α,β,γ - кути трикутника, то

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2>2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Задача 14.20 (8-9). Добуток додатних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ дорівнює одиниці. Довести, що

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\ge 2^n.$$

Задача 14.21 (9-10). Нехай $b_1,b_2,\ldots,b_n$ - довільна перестановка множини додатних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Довести нерівність

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\ge n.$$

Задача 14.22 (УМО-2001, 11). Нехай a,b,c та α,β,γ - додатні дійсні числа такі, що $\alpha+\beta+\gamma=1$. Доведіть, що

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+2\sqrt{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(ab+bc+ca)}\le a+b+c.$$

Задача 14.23 (4 СМО-1997, 10). Знайти найменше число λ, при якому для всіх невід'ємних a,b,c виконується нерівність

$$a+b+c-\lambda\sqrt{ab+bc+ca}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Задача 14.24 (10-11). Довести нерівність

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^6\alpha\le\frac{27}{256}.$$

Задача 14.25 (1 РМО-1974, 11). Довести нерівність

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4{,}4.$$

Задача 14.26 (9 РМО-1983, 10). Числа x та y такі, що $x>y$ та $xy=1$. Довести, що вірна нерівність

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}\ge 2\sqrt{2}.$$

Задача 14.27 (15 РМО-1989, 11). Нехай числа $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$ і $a+b+c\le 3$. Довести нерівності

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3}{2}\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

Задача 14.28 (9-10). Довести, що при всіх $m,n,k\in N$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+k+1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{k+m+1}}+\frac{1}{\sqrt[k]{m+n+1}}\geq 1.$$

Вказівки та відповіді до задач

14.8. Вказівка: використайте нерівність $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$.

14.10. Вказівка: запишіть нерівність у вигляді $\frac{a^3+b^6+8}{3}\geq 2ab^2$.

14.11. Вказівка: використайте співвідношення між середніми арифметичним, геометричним та гармонійним чисе… $S-a_1, S-a_2, \ldots, S-a_n$. **14.12.** Вказівка: після піднесення обох части… нерівності до квадрату та спрощення застосуйте нерівність Коші до таки… пар: x^2y^2 та y^2z^2, y^2z^2 та z^2x^2, z^2x^2 та x^2y^2. **14.13.** Вказів… застосуйте нерівність Коші для оцінки $\sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2}$ … використайте формулу суми квадратів перших n натуральних чисел. **14.1…** Вказівка: застосуйте нерівність Коші для оцінки $\sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^3}$ … використайте формулу суми кубів перших n натуральних чисел. **14.1…** Вказівка: запишіть нерівність у вигляді $\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}{2n+1}\geq x^n$. **14.1…** Вказівка: розгляньте спочатку випадок, коли числа p, q, r натуральн… **14.17.** Вказівка: перетворіть більш загальний вираз (з n невідомими) … вигляду

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n}=-n+$$

$$+\frac{2n^2}{2n-1}\cdot\frac{\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\ldots+\frac{1}{2-a_n}}{n}\cdot\frac{(2-a_1)+(2-a_2)+\ldots+(2\ldots}{n}$$

14.22. Вказівка: розділіть нерівність на $a+b+c$ та після перепозначе… $\frac{a}{a+b+c}=x, \frac{b}{a+b+c}=y, \frac{c}{a+b+c}=z$ в отриманій нерівності … допомогою нерівності Коші оцініть ліву частину. **14.23.** Відповід… $\lambda\geq\sqrt{3}-1$. **14.24.** Вказівка: застосуйте нерівність Коші до чотирьох чисел $\sin^2\alpha, \frac{\cos^2\alpha}{3}, \frac{\cos^2\alpha}{3}, \frac{\cos^2\alpha}{3}$. **14.26.** Вказівка: при $xy=1$ маємо $\frac{x^2+y^2}{x-y}=x-y+\frac{2}{x-y}$. **14.28.** Вказівка: за допомогою нерівності Коші покажіть, що $\sqrt[m]{n+k+1}\leq\frac{m+n+k}{m}$, $\sqrt[n]{k+m+1}\leq\frac{m+n+k}{n}$, $\sqrt[k]{m+n+1}\leq\frac{m+n+k}{k}$.

§ 15. Нестандартні рівняння та системи рівнянь

При розв'язуванні рівнянь часто допомагають міркування, пов'язані з областю допустимих значень цього рівняння чи областю значень функцій, що входять у рівняння.

Задача 15.1 (10-11). Розв'яжіть рівняння

$$\arcsin\frac{x^2-8}{8}=2\arcsin\frac{x}{4}-\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень:

$$\begin{cases}-1\le\dfrac{x^2-8}{8}\le 1;\\[2mm] -1\le\dfrac{x}{4}\le 1,\end{cases}$$

звідки знаходимо, що $|x|\le 4$. Враховуючи, що область значень функції $f(x)=\arcsin x$ - проміжок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, отримуємо

$$0\le\arcsin\frac{x^2-8}{8}+\frac{\pi}{2}\le\pi,$$

звідки $0\le x\le 4$. Оскільки функція $f(x)=\cos x$ є монотонною на $[0;\pi]$, то дане рівняння рівносильне такому:

$$\cos\left(\arcsin\frac{x^2-8}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\arcsin\frac{x}{4}\right).$$

Отримуємо

$$-\sin\left(\arcsin\frac{x^2-8}{8}\right)=1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{4}\right),$$

або

$$-\frac{x^2-8}{8}=1-2\frac{x^2}{16}.$$

Відповідь: $0\le x\le 4$. ■

Часто над рівняннями варто здійснити певні перетворення.

Задача 15.2 (9-10). Розв'язати рівняння $x^2+\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^2=2$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння:

$$x^2+2x\frac{x}{2x-1}+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=2+\frac{2x^2}{2x-1}.$$

Маємо

$$\left(x+\frac{x}{2x-1}\right)^2=2+\frac{2x^2}{2x-1},$$

або $\left(\dfrac{2x^2}{2x-1}\right)^2=2+\dfrac{2x^2}{2x-1}$. Після заміни $t=\dfrac{2x^2}{2x-1}$ маємо $t^2-t-2=0$, звідки $t=-1$ або $t=2$.

Розв'язавши рівняння $\dfrac{2x^2}{2x-1}=-1$ та $\dfrac{2x^2}{2x-1}=2$, отримуємо відповідь: $x_1=1,\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. ■

Задача 15.3 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}5x-4=25y^2,\\ x-8y\sqrt{x^2-9xy^2}=(9-16x)y^2.\end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння маємо, що розв'язки системи мають задовільняти умову $x^2-9xy^2\ge 0$, звідки $x\in(-\infty;0]\cup[9y^2;+\infty)$. З першого рівняння маємо, що $x\ge\dfrac{4}{5}$. Отже, $x\ge 9y^2$.

Запишемо друге рівняння у вигляді

$$x-9y^2-8y\sqrt{x^2-9xy^2}+16xy^2=0,$$

або $\left(\sqrt{x-9y^2}-4y\sqrt{x}\right)^2=0$, звідки $\sqrt{x-9y^2}-4y\sqrt{x}=0$. Тоді дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} 5x-4=25y^2, \\ x-9y^2=16xy^2. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримуємо: $x=1; y=\pm0{,}2$. ■

При розв'язуванні олімпіадних рівнянь та систем рівнянь часто потрібно попередньо перетворити їх, щоб отримати рівняння-наслідки, які повинні задовільнятися розв'язками початкового рівняння чи системи рівнянь. При цьому обов'язково потрібно виконати перевірку отриманих розв'язків.

Задача 15.4 (9-10). Розв'язати рівняння

$$x+\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{35}{4}.$$

Розв'язання. Очевидно, що розв'язки рівняння повинні задовільняти умову $x>3$. Піднесемо ліву та праву частину рівняння до квадрату. Маємо

$$x^2+\frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{9x^2}{x^2-9}=\frac{1225}{16}, \quad \frac{x^4}{x^2-9}+\frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}-\frac{1225}{16}=0.$$

Після заміни $t=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ $(t>0)$ отримуємо

$$t^2+6t-\frac{1225}{16}=0,$$

звідки $t=\frac{25}{4}$. Розв'язавши рівняння

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{25}{4},$$

знаходимо: $x_1=5, x_2=\frac{1125}{16}$. ■

Задача 15.5 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3, \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Додавши перше рівняння, помножене на y та друге рівняння, помножене на x, отримуємо, що розв'язки системи мають задовільняти рівняння $2xy-1=3y$. Віднявши від першого рівняння, помноженого на x, друге рівняння, помножене на y, отримуємо, що розв'язки системи також мають задовільняти рівняння $x^2-y^2+3=3x$. З цих двох рівнянь отримуємо, що

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2x-3}, \\ (x^2-3x+3)(2x-3)^2=1, \end{cases}$$

звідки отримуємо $x_1=1, y_1=-1$, $x_2=2, y_2=1$. За допомогою перевірки переконуємось, що це розв'язки початкової системи. ■

Задача 15.6 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x(x^2+3y^2)=158, \\ y(y^2+3x^2)=-185. \end{cases}$$

Розв'язання. Розділивши перше рівняння на друге, отримуємо, що розв'язки системи мають задовільняти рівняння

$$185x^3+474x^2y+555xy^2+158y^3=0.$$

Враховуючи, що з другого рівняння випливає $y\neq0$, та розділивши отримане рівняння на y^3, отримуємо рівняння

$$185t^3+474t^2+555t+158=0, \text{ де } t=\frac{x}{y}.$$

З цього рівняння (краще за допомогою схеми Горнера) знаходимо, що $t=-\frac{2}{5}$, звідки $x=2, y=-5$. ■

Задача 15.7 (9-10). Доведіть, що число

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$$

раціональне.

Розв'язання. Позначимо дане число за x. Тоді

$$x^3=12+3\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right),$$

звідки отримуємо, що число x повинне задовільняти рівнян $x^3-5x-12=0$. Єдиним коренем цього рівняння є число $x=2$. ■

Задача 15.8 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1;\\2x^2+5xy-y^2=17.\end{cases}$$

Розв'язання. Розділивши 1-е рівняння на 2-е, отримуємо піс перетворень

$$19x^2-46xy+16y^2=0.$$

Розв'язавши це рівняння як квадратне відносно змінної x, отримує $D=225y^2$, $x=2y$ або $x=\frac{8y}{19}$. Отже, дана система рівносиль сукупності таких систем:

$$\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1;\\x=2y\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1;\\x=\frac{8y}{19}.\end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, отримуємо відповідь:

$$(x;y)\in\left\{(2;1),(-2;-1),\left(\frac{38}{\sqrt{31}};\frac{19}{\sqrt{31}}\right),\left(-\frac{38}{\sqrt{31}};-\frac{19}{\sqrt{31}}\right)\right\}.$$ ■

При розв'язуванні систем рівнянь часто допомагають вдалі позначення або заміна змінних.

Задача 15.9 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+y}+\sqrt{x-3y}=4;\\2x+3y^2=17.\end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt[3]{x+y}=a$, $\sqrt{x-3y}=b$. Тоді $x+y=a^3$, $x-3y=b^2$, звідки $x=\frac{3a^3+b^2}{4}$, $y=\frac{a^3-b^2}{4}$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases}a+b=4;\\9a^3-b^2=68,\end{cases}$$

розв'язуючи яку, маємо $b=4-a$, $9a^3-a^2+8a-84=0$, $(a-2)(9a^2+7a+42)=0$. Звідси $a=2, b=2$, $x=7, y=1$. ■

Задача 15.10 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y+z=4;\\xy+yz+zx=5;\\x^3+y^3+z^3=10.\end{cases}$$

Розв'язання. Дана система є симетричною відносно змінних x,y,z. Позначимо $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$. Тоді $x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c=10$, звідки отримуємо $c=2$. Для розв'язання системи

$$\begin{cases}x+y+z=4;\\xy+yz+zx=5;\\xyz=2\end{cases}$$

зручно скористатись теоремою Вієта: числа x,y,z є коренями рівняння $t^3-4t^2+5t-2=0$. Знаходимо $t_1=1, t_2=1, t_3=2$. Розв'язками системи є всі можливі перестановки цих коренів: $(1;1;2)$, $(1;2;1)$, $(2;1;1)$. ■

Задача 15.11 (УМО-2000, 9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y+1=\frac{12(x+y)}{5\sqrt{x}};\\x+y-1=\frac{4(x+y)}{5\sqrt{y}}.\end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $x+y=a,\ a>0$ (оскільки $x>0,\ y>0$; з другого рівняння також випливає, що $a\neq 1$). Тоді

$$\sqrt{x}=\frac{12a}{5(a+1)},\ \sqrt{y}=\frac{4a}{5(a-1)},$$

звідки отримуємо рівняння відносно a:

$$a=x+y=\frac{144a^2}{25(a+1)^2}+\frac{16a^2}{25(a-1)^2}.$$

Враховуючи, що $a\neq 0,\ a\neq \pm 1$, маємо рівняння

$$25(a-1)^2(a+1)^2=144a(a-1)^2+16a(a+1)^2,$$

або

$$25a^4-160a^3+206a^2-160a+25=0.$$

Це симетричне рівняння. Розділивши його на a^2, отримуємо

$$25\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-160\left(a+\frac{1}{a}\right)+206=0,$$

або після заміни $t=a+\frac{1}{a}$

$$25t^2-160t+156=0.$$

Тоді $t_1=\frac{26}{5},\ t_2=\frac{6}{5}$. Розв'язуючи рівняння $a+\frac{1}{a}=\frac{26}{5}$, $a+\frac{1}{a}$

отримуємо $a_1=5$, $a_2=\frac{1}{5}$. Відповідно розв'язки даної систе

$(2;1), \left(\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right)$. ■

Іноді корисними бувають наступні міркування.

Задача 15.12 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2-16y+12x+67=0, \\ x^2y^2+64x^2-y=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи кожне рівняння як квадратне відносно змі
y, отримуємо

$$D_1=-12x-3,\ D_2=1-256x^4.$$

Умови

$$\begin{cases} D_1\geq 0, \\ D_2\geq 0 \end{cases}$$

виконуються лише при $x=-0{,}25$, звідки $y^2-16y+64=0,\ y=8$. ■

Задача 15.13 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z+x}=\frac{1}{3}; \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$x+y+z=\frac{x(y+z)}{2}=\frac{y(z+x)}{3}=\frac{z(x+y)}{4}.$$

Позначимо $xy=a,\ xz=b,\ yz=c,\ x+y+z=t$. Тоді

$$\begin{cases} a+b=2t; \\ a+c=3t; \\ b+c=4t, \end{cases}$$

звідки отримуємо $a=\frac{t}{2},\ b=\frac{3t}{2},\ c=\frac{5t}{2}$. Але тоді

$$\frac{a}{b}=\frac{y}{z}=\frac{1}{3},\ \frac{b}{c}=\frac{x}{y}=\frac{3}{5},$$

звідки $x=\frac{3y}{5},\ z=3y$. Підставивши в перше рівняння, отримуємо

$$\frac{5}{3y}+\frac{1}{4y}=\frac{1}{2},$$

звідки $y=\frac{23}{6},\ x=\frac{23}{10},\ z=\frac{23}{2}$. ■

Іноді використовуються властивості функцій, які задано в рівнянні.

Задача 15.14 (11). Скільки коренів має рівняння $\left(\sqrt{2}\right)^x = x$?

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$. Очевидно, п

$x_1 = 2$ є коренем даного рівняння.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Маємо $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, звід

отримуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжку $(0;e)$ та спадає н

проміжку $(e;+\infty)$, причому $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Звідси випливає, що рівняння

має також точно один корінь на проміжку $(e;+\infty)$.

Відповідь: 2 корені. ■

Задача 15.15 (9-11). Довести, що при всіх дійсних x, y, z, я

задовільняють рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ та $xz - xy + yz = 4$, змінна

задовільняє нерівність $|x| \le \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Неважко замітити, що умови задачі симетричні відносн

змінних x, y. Позначимо $x + y = a$, $xy = b$. Тоді маємо

$$\begin{cases} a^2 - 2b + z^2 = 8; \\ az - b = 4. \end{cases}$$

Звідси отримуємо $b = az - 4$, $a^2 - 2az + z^2 = 0$, тобто $z = a = x + y$

Тоді змінні x та y задовільняють рівність $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 8$, я

після спрощень

$$y^2 + xy + x^2 - 4 = 0.$$

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно змінної y,

умови, що такі числа x, y існують, отримуємо, що дискримінант тако

рівняння невід'ємний, тобто

$$D = 16 - 3x^2 \ge 0.$$

З цієї нерівності отримуємо твердження задачі. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 15.16 (10-11). Розв'яжіть рівняння

$$\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos x.$$

Задача 15.17 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7; \\ y^2 + yz + z^2 = 21; \\ z^2 + zx + x^2 = 28. \end{cases}$$

Задача 15.18 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + x + y = 1; \\ yz + y + z = 5; \\ zx + z + x = 2. \end{cases}$$

Задача 15.19 (11). Розв'яжіть рівняння

$$6^{3-x} = x + 4.$$

Задача 15.20 (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)x = 6y; \\ (x^2 - y^2)y = x. \end{cases}$$

Задача 15.21 (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 + 3x - 2} = 4 - x; \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Задача 15.22 (9-10). Розв'яжіть рівняння

$$4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2 = 0.$$

Задача 15.23 (9-10). Розв'яжіть рівняння

$$(3x^2 + 7x - 2)^2 + 5x^2(3x^2 + 7x - 2) - 24x^4 = 0.$$

Задача 15.24 (9-10). Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 7x + 4} + \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4} + \frac{13}{3} = 0.$$

Задача 15.25 (9-10). Розв'яжіть рівняння

$$(x - 2)(x^3 - 1) = 6x^2 + x + 1.$$

Задача 15.26 (9-10). Довести, що число
$$\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$$
ціле та знайти його.

Задача 15.27 (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xy^2-2y+3x^2=0; \\ y^2+x^2y+2x=0. \end{cases}$$

Задача 15.28 (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} xyz=x+y+z; \\ yzt=y+z+t; \\ ztx=z+t+x; \\ txy=t+x+y. \end{cases}$$

Задача 15.29 (9-11). Знайти співвідношення між коефіцієнтами a, b, c, при виконанні яких система рівнянь
$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0; \\ bx^2+cx+a=0; \\ cx^2+ax+b=0 \end{cases}$$
має розв'язки.

Задача 15.30 (9-10). Довести, що якщо $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то або $x=y=z$, або $|xyz|=1$.

Задача 15.31 (9-11). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x+y=z^2; \\ y+z=t^2; \\ z+t=u^2; \\ t+u=x^2; \\ u+x=y^2. \end{cases}$$

Задача 15.32 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x-\dfrac{2x+y}{x^2-y^2}=1; \\ y+\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}=-1. \end{cases}$$

Задача 15.33 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x^2-3y=xy^3; \\ x^2+x^3y^2=2y. \end{cases}$$

Задача 15.34 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x+\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}=2; \\ y+\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

Задача 15.35 (10-11). Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \cos x+\cos y+\cos z=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \\ \sin x+\sin y+\sin z=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Задача 15.36 (10-11). Довести рівності

а) $\sin 54^\circ-\sin 18^\circ=\frac{1}{2}$;

б) $tg^2 18^\circ\cdot tg^2 54^\circ=\frac{1}{5}$.

Задача 15.37 (10-11). Для кожного натурального n знайти суму
$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cdot\cos 3}+\dots+\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cdot\cos n}.$$

Задача 15.38 (6 СМО-1999, 9). Нехай для кожного натурального n α_n позначає кут з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює n. Доведіть, що

$$\sqrt{1+1^2}\sin(\alpha_1-\alpha_{1000})+\sqrt{1+2^2}\sin(\alpha_2-\alpha_{1000})+\ldots+$$
$$+\sqrt{1+2000^2}\sin(\alpha_{2000}-\alpha_{1000})=\sin\alpha_{1000}.$$

Задача 15.39 (9-10). Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=6;\\ y^2+2x^3=4y.\end{cases}$$

Задача 15.40 (9-10). Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}+\sqrt{\frac{x-3}{x+4}}\ge\frac{7}{x+3}\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}.$$

Задача 15.41 (11). Розв'язати рівняння

$$(x+3)\log_4^2 x-(2x+13)\log_4 x+14=0.$$

Задача 15.42 (IV ВУТЮМ-2001, 10-11). Яке з чисел є більшим:

$$\frac{2\sin 2^\circ+4\sin 4^\circ+\ldots+178\sin 178^\circ}{90}\ \text{чи}\ ctg 1^\circ\ ?$$

Задача 15.43 (10-11). Нехай $f(x)=4x^3-3x$. Розв'яжіть рівняння

$$f(f(\ldots f(f(x))\ldots))=x,$$

де функцію f застосовано 2001 раз.

Задача 15.44 (7 СМО-2000, 11). Про дійсні числа a, b, c та $x, y,$ відомо, що $a+b+c=x+y+z=ax+by+cz=0$, $a^2+b^2+c^2\ne 0$, $x^2+y^2+z^2\ne 0$. Знайти всі можливі значення виразу

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Вказівки та відповіді до задач

15.16. Відповідь: $0\le x\le 1$. **15.17.** Вказівка: домножте рівня відповідно на $x-y, y-z, z-x$ та додайте. Відпові $(1;2;4), (-1;-2;-4), (\sqrt{7};0;-2\sqrt{7}), (-\sqrt{7};0;2\sqrt{7})$. **15.18.** Вказів додайте до лівої та правої частини кожного рівняння по 1 та розкладіть множники. Відповідь: $(0;1;2), (-2;-3;-4)$. **15.19.** Відповідь: $x=2$. 15.

Відповідь: $(0;0), \left(\pm\sqrt[4]{8};\pm\sqrt[4]{2}\right), \left(\pm\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$. **15.21.** Відповідь: $(1;1), \left(-\frac{1}{4};-\frac{3}{2}\right)$. **15.22.** Вказівка: після ділення на x^2 заміна $x+\frac{60}{x}=t$. Відповідь: $x\in\left\{8;-\frac{15}{2};\frac{-35\pm\sqrt{265}}{2}\right\}$. **15.23.** Вказівка: після ділення на x^4 заміна $\frac{3x^2+7x-2}{x^2}=t$. Відповідь: $x\in\left\{\frac{2}{7};\frac{-7\pm\sqrt{137}}{22}\right\}$. **15.24.** Вказівка: заміна $x+\frac{4}{x}=t$. Відповідь: $x\in\{1;4\}$. **15.25.** Вказівка: після розкриття дужок отримуємо симетричне рівняння, заміна $x+\frac{1}{x}=t$. Відповідь: $x\in\left\{-1;2\pm\sqrt{3}\right\}$. **15.26.** Відповідь: 3. **15.27.** Відповідь: $(0;0), (-1;1), \left(-\frac{2}{\sqrt[3]{3}};-2\sqrt[3]{3}\right)$. **15.28.** Відповідь: $(0;0;0;0)$, $(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}), (-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3};-\sqrt{3})$. **15.29.** Відповідь: $a+b+c=0$. **15.31.** Відповідь: $(0;0;0;0;0), (2;2;2;2;2)$. **15.32.** Відповідь: $(0;1), (2;-1), (-1;0), (1;-2)$. **15.33.** Відповідь: $(0;0), (1;1)$, $\left(-\frac{\sqrt[5]{40}}{2};-\sqrt[5]{50}\right)$. **15.34.** Відповідь: $(0;1), (2;-1)$. Вказівка: домножте перше рівняння на y, друге – на x і додайте отримані рівності. **15.35.** Відповідь: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z;\quad y=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z;\quad z=\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m\in Z$. Вказівка: піднесіть обидві рівності до квадрату і додайте. **15.37.** Відповідь: $tg\, n$. **15.39.** Відповідь: (0;0). Вказівка: розгляньте геометричне місце точок, координати яких задовільняють перше рівняння. **15.40.** Відповідь: $x\in(-\infty;-4)\cup[5;+\infty)$. Вказівка: позначте $\frac{x-4}{x+3}=a, \frac{x-3}{x+4}=b$ та розгляньте окремо випадки: $x+3<0$ та

$x+3>0$. **15.41.** Відповідь: $x_1=4, x_2=16$. Вказівка: розв'яжіть рівн[...]
як квадратне відносно змінної $t=\log_4 x$. **15.42.** Відповідь: дані числа р[...]
15.43. Відповідь: $x=\cos\frac{2k\pi}{3^{2001}\pm 1}$, $k=0,1,2,\dots,\frac{1}{2}\left(3^{2001}+1\right)$, вс[...]
3^{2001} різних коренів. Вказівка: покажіть, що $|x|\le 1$ та позначте $x=\cos$[...]
15.44. Відповідь: $\frac{2}{3}$. Вказівка: розгляньте вектори $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(x,y$[...]
$\vec{w}(1,1,1)$.

§ 16. Застосування нерівностей при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь

Такі приклади використання нерівностей вже зустрічались при розв'язуванні рівнянь в цілих числах та нестандартних рівнянь. Розглянемо ще кілька "корисних" задач.

Задача 16.1 (7-8). Знайти всі пари (x, y) дійсних чисел, що задовільняють рівняння

$$x^4-2x^2y+3y^2-4xy+4x^2-8y+16=0.$$

Розв'язання. Виділивши повні квадрати, маємо

$$\left(x^2-y\right)^2+\left(2x-y\right)^2+\left(y-4\right)^2=0.$$

Оскільки всі доданки невід'ємні, то отримуємо, що рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2-y=0, \\ 2x-y=0, \\ y-4=0, \end{cases}$$

звідки отримуємо $x=2$, $y=4$. ■

Задача 16.2 (ОМО-1997, 9). Знайти всі дійсні числа x, y такі, що $x\ge y\ge 1$ та $2x^2-xy-3x+y+1=0$.

Розв'язання. Дане рівняння перетворюється до вигляду

$$(x-1)(x-y)+(x-1)^2=0.$$

За умовою перший доданок невід'ємний, тому рівність можлива лише при $x=1$, звідки $1\le y\le 1$, тобто $y=1$. ■

Задача 16.3 (2 СМО-1996, 11). Знайти всі трійки додатних чисел x, y, z, що задовільняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=3, \\ x^2+y^3+z=3, \\ x^3+y+z^2=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай (x,y,z) – така трійка чисел. Оскільки система не змінюється при циклічній перестановці змінних $(x\to y, y\to z, z\to x$ або

$x \to z, z \to y, y \to x$, то без обмеження загальності можна вважати, $x \le y \le z$. Оскільки $x + y^2 + z^3 = 3$, то всі три числа не можуть бу одночасно більші за 1 або одночасно менші за 1. Тому маємо $x \le 1, z \ge 1$. Віднявши від першого рівняння друге, маємо $x - x^2 + y^2 - y^3 + z^3 - z = 0$, $x(1-x) + y^2(1-y) + z(z^2-1) = 0$. А $x(1-x) \ge 0$, $z(z^2-1) \ge 0$, тому $y^2(1-y) \le 0$, тобто $y \ge 1$. Віднявш від першого рівняння третє, маємо $x(1-x^2) + y(y-1) + z^2(z-1) = 0$. Але $x(1-x^2) \ge 0$, $z^2(z-1) \ge 0$, тому $y(y-1) \le 0$, тобто $y \le 1$. Отже $y = 1$. Тоді $x(1-x) + z(z^2-1) = 0$, звідки, враховуючи невід'ємніс доданків, отримуємо $x = 1, z = 1$. ■

Задача 16.4 (11). Розв'язати рівняння

$$2\cos\frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}.$$

Розв'язання. Оскільки $2\cos\frac{x}{3} \le 2$, $5^x + \frac{1}{5^x} \ge 2$, то рівність можл лише при $\begin{cases} 2\cos\frac{x}{3} = 2, \\ 5^x + \frac{1}{5^x} = 2, \end{cases}$ тобто при $\begin{cases} x = 6\pi k, k \in Z, \\ 5^x = 1 \end{cases}$ звідки отриму $x = 0$. ■

Задача 16.5 (10-11). Розв'язати рівняння

$$x^2 + 4x\cos xy + 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо

$$x^2 + 4x\cos xy + 4 = (x + 2\cos xy)^2 + 4\sin^2 xy = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} x + 2\cos xy = 0, \\ \sin xy = 0. \end{cases}$$

Оскільки при $\sin xy = 0$ маємо $\cos xy = \pm 1$, то можливі два випадки:

1) $\begin{cases} \sin xy = 0, \\ \cos xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ xy = \pi(2k+1), k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z, \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin xy = 0, \\ \cos xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ xy = 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = \pi k, k \in Z. \end{cases}$ ■

Задача 16.6 (11). Розв'язати в додатних числах систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1^{x_2} = x_3; \\ x_2^{x_3} = x_4; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{n-2}^{x_{n-1}} = x_n; \\ x_{n-1}^{x_n} = x_1; \\ x_n^{x_1} = x_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система рівнянь циклічна (тобто не змінюється при циклічній перестановці змінних). Припустимо, що хоча б одна з невідомих рівна 1. Внаслідок циклічності системи можна вважати, що це $x_1 = 1$.

Нехай $n = 2k + 1$. Тоді послідовно отримуємо $1 = x_1 = x_3 = \cdots = x_{2k+1} = x_2 = x_4 = \cdots = x_{2k}$.

Нехай $n = 2k$. Тоді послідовно отримуємо $1 = x_1 = x_3 = \cdots = x_{2k-1}$, а змінні $x_2 = x_4 = \cdots = x_{2k}$ можуть бути вибрані довільно (або ж $x_2 = x_4 = \cdots = x_{2k} = 1$, а $x_1 = x_3 = \cdots = x_{2k-1}$ - довільні).

Тепер припустимо, що жодна з невідомих не рівна 1. Оскільки змінні додатні, то ця система рівносильна такій:

$$\begin{cases} x_2 \ln x_1 = \ln x_3; \\ x_3 \ln x_2 = \ln x_4; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{n-1} \ln x_{n-2} = \ln x_n; \\ x_n \ln x_{n-1} = \ln x_1; \\ x_1 \ln x_n = \ln x_2. \end{cases}$$

Тоді перемноживши рівняння системи, отримуємо, що

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1,$$

і серед невідомих є хоча б одна, яка більша за 1. Нехай $x_1>1$.

Нехай $n=2k+1$. Тоді послідовно отримуємо

$$x_3>1,\ x_5>1,\ldots,x_{2k+1}>1,\ x_2>1,\ x_4>1,\ldots,x_{2k}>1.$$

Протиріччя з тим, що $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$.

Нехай $n=2k$. Тоді послідовно отримуємо

$$x_3>1,\ x_5>1,\ldots,x_{2k-1}>1.$$

Але

$$x_2=x_{2k}^{x_1}=\left(x_{2k-2}^{x_{2k-1}}\right)^{x_1}=\ldots=(x_2)^{x_1x_3\ldots x_{2k-1}}.$$

Протиріччя з тим, що $x_3>1,\ x_5>1,\ldots,x_{2k-1}>1$ та $x_2\neq1$.

Відповідь: 1) при $n=2k+1$:

$1=x_1=x_3=\cdots=x_{2k+1}=x_2=x_4=\cdots=x_{2k}$;

2) при $n=2k$: $1=x_1=x_3=\cdots=x_{2k-1}$, $x_2=x_4=\cdots=x_{2k}$ (або $x_2=x_4=\cdots=x_{2k}=1$, $x_1=x_3=\cdots=x_{2k-1}$). ■

При розв'язуванні деяких рівнянь можна використати вектор нерівність

$$|\vec a\cdot\vec b|\le|\vec a|\cdot|\vec b|.$$

Задача 16.7 (10-11). Розв'язати рівняння

$$xy+2x=\sqrt{2x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+2y^2-4y+4}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$xy+yx+x(2-y)=\sqrt{x^2+y^2+x^2}\cdot\sqrt{y^2+x^2+(2-y)^2}.$$

Позначимо $\vec a(x,y,x)$, $\vec b(y,x,2-y)$. Маємо $\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\cdot|\vec b|$. Це можливо таких випадках:

1) $\vec b=k\cdot\vec a, k\ge0$. Тоді

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}=\frac{2-y}{x}=k.$$

Звідси $y=kx$, $x=ky$, $2-y=kx$, тобто $y=k^2y$, $y(1-k^2)=0$.
Звідси або $y=0$, $x=ky=0$, $2-0=0$ - протиріччя, або $k=1$, $y=x$, $2-y=y$, тобто $y=x=1$.

2) $\vec a=\vec 0$, тобто $x=y=0$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 16.8(10-11). Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y).$$

Задача 16.9 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}10x^2+5y^2+13z^2=12xy+4xz+6yz,\\ x^3+y^3+z^3=288.\end{cases}$$

Задача 16.10 (9-10). Розв'язати рівняння

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{z^2}\right)=8+2x-x^2.$$

Задача 16.11 (9-10). Розв'язати нерівність

$$y-\sqrt{1-y-x^2}\ge\frac{1}{|\cos x|}.$$

Задача 16.12 (10-11). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2\sin^2 y,\\ \sin^2 y+\cos^2 z=1.\end{cases}$$

Задача 16.13 (9-10). Розв'язати рівняння $2\sin x=5x^2+2x+3$.

Задача 16.14 (КМО-1970, 8). Довести, що при кожному натуральному n число $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ не є повним квадратом.

Задача 16.15 (9-10). Розв'язати рівняння

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Задача 16.16 (10-11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\frac{a^2}{16}+\frac{16}{a^2}\right)\left(2+|\sin(\pi\sin ax)|\right)=3+|\cos(\pi\sin ax)|$$

має розв'язки? Знайти їх.

Задача 16.17 (10-11). Знайти всі пари дійсних чисел (x,y), для кожної з яких виконується рівність

$$12\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2}+8\cos(x+y)=13+4\cos^2(x+y).$$

Задача 16.18 (10-11). Знайти всі пари дійсних чисел (x,y), для кожн яких виконується рівність

$$\sqrt{3-2x-x^2}\sin^2(2x-y)+\cos(4x-2y)=1+\frac{\cos^2(4x-2y)}{2}.$$

Задача 16.19 (9-10). Колекціонер на стенді виставки розмістив свої ма по 24 в ряд. Під час виставки деяку кількість марок закупив музей, то решту марок колекціонер розклав так, що число рядів зменшилось на 2 число марок у кожному ряді стало на 26 більше за число нових рядів. Від також, що початкову кількість марок можна було б розташувати на сте так, щоб число марок у ряду дорівнювало числу рядів. Скільки марок ку музей?

Задача 16.20(9-10). Розв'язати рівняння

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=28.$$

Задача 16.21 (5 СМО-1998, 11). Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x-1}{1997}+\sqrt{\frac{x-2}{1996}}+\sqrt[3]{\frac{x-3}{1995}}=\frac{x-1997}{1}+\sqrt{\frac{x-1996}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x-1995}{3}}.$$

Задача 16.22 (УМО-2000, 11). Знайти найменше значення функції

$$f(x)=16x^2-10\sin^2 x+\frac{81\pi^4}{x^2}$$

на всій її області визначення.

Задача 16.23 (10). Розв'язати рівняння

$$|x+1|+|x+7|=6\cos x.$$

Задача 16.24 (11). Розв'яжіть нерівність

$$2000^{2001\cdot\log_x(x^2-4x)}<2001^{2000\cdot\log_x(x^2-4x)}.$$

Задача 16.25 (8 РМО-1982, 10). Розв'язати в натуральних числах сис рівнянь

$$\begin{cases}x^3-y^3-z^3=3xyz;\\ x^2=2(y+z).\end{cases}$$

Задача 16.26 (9-10). Розв'язати при всіх $n\in N$ рівняння

$$\sin^2 x\cdot\cos^{2n}x=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Вказівки та відповіді до задач

16.8. Відповідь: $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ y_1=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ k,m\in Z$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ y_2=-\frac{\pi}{4}+\pi m,\ k,m\in Z$. **16.9.** Відповідь: $x=4$, $y=6,\ z=2$. **16.10.** Відповідь: $x=1,\ y=\pm1,\ z=\pm1$. **16.11.** Відповідь: $x=0,\ y=1$. **16.12.** Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $z=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ k,m,n\in Z$. **16.13.** Відповідь: $x\in\varnothing$. **16.14.** Вказівка: покажіть, що дане число лежить на інтервалі $\left((n^2+n)^2;(n^2+n+1)^2\right)$. **16.15.** Відповідь: $x_1=1,\ x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$. Вказівка: розгляньте вектори $\vec{a}(x;1),\ \vec{b}(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x})$. **16.16.** Відповідь: при $a=\pm4$ $x=\frac{\pi n}{8},\ n\in Z$. **16.17.** Відповідь: $x=2,\ y=-2\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. Вказівка: виразіть $\sqrt{4x-x^2}$ через $\sin\frac{x+y}{2}$ та в отриманій рівності оцініть ліву та праву частини. **16.18.** Відповідь: $x=-1,\ y=-2\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. Вказівка: виразіть $\sqrt{3-2x-x^2}$ через $\sin(2x-y)$ та в отриманій рівності оцініть ліву та праву частини. **16.19.** Відповідь: було 144 марки, музей купив 24 марки. **16.20.** Відповідь: $x=11,\ y=5$. **16.21.** Відповідь: $x=1998$. Вказівка: порівняйте відповідні доданки лівої та правої частин. **16.22.** Відповідь: $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=72\pi^2-10$. **16.23.** Відповідь: $x=-2\pi$. **16.24.** Відповідь: $x\in\left(4;2+\sqrt{5}\right)$. Вказівка: доведіть, що $2000^{2001}>2001^{2000}$ (для цього достатньо знайти проміжки монотонності функції $f(x)=\frac{\ln x}{x}$). **16.25.** Вказівка: покажіть, що $y\le x-1,\ z\le x-1$. Відповідь: $x=2$,

$y = z = 1$. **16.26.** Відповідь: $x = \pm \operatorname{arcctg}\sqrt{n} + \pi k,\quad k \in Z$. Вказівка: оцініть ліву частину рівняння за допомогою нерівності Коші.

§ 17. Застосування властивостей функцій

Часто при розв'язуванні задач використовуються такі властивості функції, як ***обмеженість, парність, непарність, періодичність, монотонність***. Найпростіше зрозуміти ідею на прикладах.

Теорема 17.1. Якщо функція $f(x)$ приймає найбільше (чи найменше) значення, яке рівне A, то для розв'язання рівняння $f(x) = A$ достатньо дослідити, при яких значеннях x функція $f(x)$ досягає свого найбільшого (чи найменшого) значення.

Задача 17.1 (8-9). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{5 + 4x - x^2} = 5.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{9 - (x-2)^2} = 5.$$

Максимальне значення лівої частини дорівнює 5 та досягається лише при $x = 2$. ■

Задача 17.2 (10-11). Розв'язати рівняння

$$3\sin^2 \frac{x}{5} + 2\sin^2 x = 5.$$

Розв'язання. Оскільки ліва частина не перевищує 5, то рівність можлива лише при

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x}{5} = \pm 1, \\ \sin x = \pm 1, \end{cases} \quad \text{тобто при} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \end{cases} \quad \text{звідки розв'язок}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + (2 + 5n)\pi, n \in Z. ■$$

Теорема 17.2. Якщо функція $f(x)$ парна (чи непарна) та x_0 – корінь рівняння $f(x) = 0$, то $(-x_0)$ також корінь цього рівняння.

Задача 17.3 (11). Знайти значення параметра a, при яких рівняння

$$a^2 \cdot 3^{|x|} - 6 = a\left(1 + 9\sqrt[3]{|x|}\right)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання. Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $x_0 = 0$. Тому параметр a має задовільняти умову $a^2 - 6 = a$, звідки $a = 3$ або $a = -2$.

Побудувавши графіки функцій $y = a^2 \cdot 3^{|x|} - 6$, та $y = a\left(1 + 9\sqrt[3]{|x|}\right)$ при цих значеннях параметра a, бачимо, що при $a = 3$ рівняння має три розв'язки, а при $a = 1$ – один розв'язок.■

Теорема 17.3. Якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(x) = A$ може мати не більше одного кореня.

Тому для розв'язання такого рівняння достатньо показати монотонність функції $f(x)$ та знайти цей корінь методом підбору.

Задача 17.4 (УМО-1997, 11). Розв'язати в дійсних числах рівняння

$$\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$. Маємо

$$\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^x = 1.$$

Ліва частина рівності є строго спадною функцією, оскільки $\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} < 1, \dfrac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} < 1$. Тому рівняння не може мати більше одного кореня. Легко бачити, що цим коренем є число $x_0 = 2$. ■

Теорема 17.4. Якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(g(x))=f(h(x))$ рівносильне рівнянню $g(x)=h(x)$ (за умови, що область визначення функції $f(x)$ містить область значень функцій $g(x)$ та $h(x)$), зокрема у випадку монотонності функції $f(x)$ рівняння $f(f(x))=f(x)$ рівносильне рівнянню $f(x)=x$.

Задача 17.5 (10-11). Розв'язати рівняння

$$x+x^3+\sin x=x^2+x^6+\sin x^2.$$

Розв'язання. Рівняння має вигляд $f(x)=f(x^2)$, де $f(x)=x+x^3+\sin x$. Оскільки $f'(x)=1+3x^2+\cos x>0$ при всіх $x\in R$, то $f(x)$ є строго зростаючою функцією. Тому $f(x)=f(x^2)$ лише у випадку $x=x^2$, звідки $x_1=0, x_2=1$. ■

Задача 17.6 (9-11). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}=x.$$

Розв'язання. Функція $f(x)=\sqrt{1+x}$ є зростаючою, а її область визначення $D(f)=[-1,+\infty)$ містить її область значень $E(f)=[0,+\infty)$. Тому при $x<\sqrt{1+x}$ маємо

$$x<\sqrt{1+x}<\sqrt{1+\sqrt{1+x}}<\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}<\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}},$$

а при $x>\sqrt{1+x}$ маємо

$$x>\sqrt{1+x}>\sqrt{1+\sqrt{1+x}}>\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}>\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}.$$

Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $x=\sqrt{1+x}$, з якого знаходимо $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

Задача 17.7 (10-11). Довести нерівність

$$|\sin x\cdot\sin 2x|\le\frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\sin x\cdot\sin 2x=2\sin^2 x\cdot\cos x=2(1-\cos^2 x)\cos x=2\cos x-2\cos^3 x,$$

причому $-1\le\cos x\le 1$. Тому достатньо знайти найбільше та найменше значення функції $f(t)=2t-2t^3$ на відрізку $[-1;1]$. Маємо $f'(t)=2-6t^2=6\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$, $f'(t)=0$ при $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значення функції у критичних точках та на кінцях відрізку:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9},\quad f(-1)=0,\quad f(1)=0.$$

Тому

$$\max_{[-1;1]} f(t)=\frac{4\sqrt{3}}{9},\quad \min_{[-1;1]} f(t)=-\frac{4\sqrt{3}}{9},$$

звідки випливає твердження задачі. ■

Задача 17.8 (2 СМО-1995, 11). Для кожного $n\ge 2$ знайти найбільше можливе значення виразу

$$x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_3)+\ldots+x_{n-1}^2(1-x_n)+x_n^2(1-x_1),$$

якщо всі x_k – числа з відрізка $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Розв'язання. При фіксованому k $(1\le k\le n)$ даний вираз як функція від x_k є квадратичною функцією вигляду $ax_k^2+bx_k+c$, де $a>0$. Найбільшого значення на проміжку така функція набуває на одному з кінців проміжку. Тому при фіксованих $x_i, i\ne k$, взявши за x_k або $\frac{1}{3}$, або $\frac{2}{3}$, ми можемо тільки збільшити наш вираз. Тому достатньо шукати максимум даного виразу при умові, що всі x_k дорівнюють або $\frac{1}{3}$, або $\frac{2}{3}$. За допомогою перебору приходимо до висновку, що при парному n максимальне значення виразу дорівнює $\frac{n}{6}$ і досягається при наборі

$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3};\ldots;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, а при непарному n максимальне значення вир

дорівнює $\frac{9n-1}{54}$ і досягається при наборі $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3};\ldots;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. ■

Задача 17.9 (11). Розв'язати рівняння

$$e^x - 1 = \ln(x+1).$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1$. Вона визначена на всій дійсній осі, приймає значення з $(-1;+\infty)$, монотонно зростає, тому ці обернену функцію. Цю функцію можна знайти з рівності $x = e^y - 1$, тобто $y = \ln(x+1)$. Ця обернена функція $g(x) = \ln(x+1)$ визначена н $(-1;+\infty)$, зростає та приймає всі дійсні значення. Тому графіки $y = f(x$ та $y = g(x)$ симетричні відносно прямої $y = x$, а оскільки функції $f(x$ та $g(x)$ зростаючі, то перетинатись ці графіки можуть лише на цій прямі Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $e^x - 1 = x$, яке має єдини корінь $x = 0$. (Функція $h(x) = e^x - 1 - x$ в точці $x_0 = 0$ має мінімум причому $h(0) = 0$). ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 17.10 (11). Розв'язати рівняння

$$\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Задача 17.11 (9-10). Розв'язати рівняння

$$(3x-1)\left(1 + \sqrt{(3x-1)^2 + 2}\right) - 2x\left(1 + \sqrt{4x^2 + 2}\right) = 0.$$

Задача 17.12 (10-11). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = 2x - 2y, \\ \sin y - \sin z = 2z - 2y, \\ 3x - y - z = \pi. \end{cases}$$

Задача 17.13 (11). Розв'язати в дійсних числах рівняння

$$5^x + 12^x = 13^x.$$

Задача 17.14 (9-10). Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{21-x} = x^2 - 24x + 150.$$

Задача 17.15 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + \sqrt[5]{x} = 2y + \sqrt[5]{y}, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 18. \end{cases}$$

Задача 17.16 (9-10). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x-y}, \\ x + 8y = \sqrt{x-y-9}. \end{cases}$$

Задача 17.17 (9-10). Розв'язати нерівність

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \le 1.$$

Задача 17.18 (10-11). Розв'язати рівняння

$$1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2(x+y) + \operatorname{ctg}^2(x+y).$$

Задача 17.19 (10). Розв'язати рівняння

$$|x+7| + |x-10| = 17\cos x.$$

Задача 17.20 (10). При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 + \sin^2 x + 1 = (a+1)^2$$

має точно один корінь?

Задача 17.21 (10-11). Довести, що при всіх $x \in R$ виконується нерівність

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

Задача 17.22 (10-11). Розв'язати рівняння

$$\sin^{1998} x + \cos^{1999} x + \sin^{1999} x = 2.$$

Задача 17.23 (2 СМО-1995, 10). Довести, що якщо для дійсних чисел a, b, c виконується рівність $2a + 3b + 6c = 0$, то кубічне рівняння $ax^3 + bx + c = 0$ має принаймні один корінь на інтервалі $(0,1)$.

Задача 17.24 (11). Розв'язати рівняння

$$2\cos\frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}.$$

Задача 17.25 (10-11). Розв'язати нерівність

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg\frac{1}{x}} + \frac{1}{\sqrt{y - y^2}} \le 2\sqrt{2}(\sin \pi z + \cos \pi z).$$

Задача 17.26 (10-11). Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}\alpha_n=1$. Знайти найбільше можливе значення добутку $\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n$.

Задача 17.27 (10-11). Параболи, що є графіками квадратичних функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$, одержані одна з одної паралельним перенесенням і перетинають вісь абсцис: перша – в точках x_0, x_1, друга – в точках x_0, x_2. Знайти точки перетину з віссю абсцис графіка функції $y=f_1(x)+f_2(x)$.

Задача 17.28 (10-11). Довести, що коли $(a+b+c)(9a+3b+c)<0$, то $b^2>4ac$.

Задача 17.29 (10-11). Яке з двох чисел більше: $7^{\sqrt{5}}$ чи $5^{\sqrt{7}}$?

Задача 17.30 (3 СМО-1996, 11). Позначимо через x_n точку мінімуму функції

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{n\cos(nx)}{n^2+1},\quad n\ge 1.$$

Довести, що для кожного числа $c>\sqrt{2}$ знайдеться натуральне число n_0 таке, що $|x_n|<\frac{c}{\sqrt{n}}$ для всіх $n\ge n_0$.

Задача 17.31 (11). Розв'язати рівняння

$$2^{x^2-3x+6}-8\cdot 2^x=\sin\left(2^{x^2-3x+6}\right)-\sin\left(8\cdot 2^x\right).$$

Задача 17.32 (11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$3-\sin^2(2\pi x)+a^2+4a=(a+1)2^{8x-16x^2}$$

має єдиний корінь?

Задача 17.33 (15 РМО-1989, 10). Довести, що при всіх значеннях змінних x,y,z з інтервалу $(0;1)$ виконується нерівність

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

Задача 17.34 (10 РМО-1984, 11). Дано функцію $f(x),\ x\in R$. Відомо, що функція $g(x)=f(x)+\sin f(x)$ періодична. Довести, що функція $f(x)$ також періодична.

Вказівки та відповіді до задач

17.10. Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **17.11.** Відповідь: $x=1$. Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^2+2}\right)$. **17.12.** Відповідь: $x=y=z=\pi$. Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=2x+\sin x$. **17.13.** Відповідь: $x=2$. Вказівка: розділіть рівняння на 13^x. **17.14.** Відповідь: $x=12$. Вказівка: оцініть за допомогою нерівності Коші ліву частину рівняння. **17.15.** Відповідь: $x=y=\pm 3$. **17.16.** Відповідь: $x=8,\ y=-1$. **17.17.** Відповідь: $x=1,\ y=0$. **17.18.** Відповідь: $x=-1$, $y=1\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$. **17.19.** Відповідь: $x\in\{-2\pi, 0, 2\pi\}$. **17.20.** Відповідь: при $a=-1$ єдиний корінь $x=0$. **17.21.** Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ та використайте нерівність $\cos x+\sin x<\frac{\pi}{2}$. **17.22.** Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **17.23.** Вказівка: припустіть супротивне та розгляньте значення функції $f(x)=ax^3+bx+c$ в точках $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1$. **17.24.** Відповідь: $x=0$. **17.25.** Відповідь: $x=1,\ y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{4}+2k,\ k\in Z$. **17.26.** Відповідь: $\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_n\le\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$. Рівність досягається при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\frac{\pi}{4}$. **17.27.** Вказівка: застосуйте теорему Вієта. Відповідь: $x_0, \frac{x_1+x_2}{2}$. **17.28.** Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=ax^2+bx+c$. **17.29.** Відповідь: перше. Вказівка: використайте монотонність при $x\in(0;e^2)$ функції $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **17.30.** Вказівка.

Достатньо довести, що при всіх достатньо великих n довільна точ
$x \in [\frac{c}{\sqrt{n}}, +\infty)$ не може бути точкою мінімуму функції $f_n(x)$, а для цьо
достатньо показати, що $f_n(x) > f_n(0) = \frac{n}{n^2+1}$ при всіх $x \in [\frac{c}{\sqrt{n}}, +\infty)$
17.31. Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Вказівка: розгляньте функ
$f(z) = z - \sin z$ **17.32.** Відповідь: $a = 0$. Вказівка: виконавши замі
$4x - 1 = t$, отримуємо рівняння, ліва і права частина якого є парні фу
відносно змінної t. **17.33.** Вказівка: при фіксованих значеннях змінних y
розгляньте ліву частину нерівності як лінійну функцію змінної x. **17.**
Вказівка: функція $g(t) = t + \sin t$ зростаюча.

§ 18. Задачі з цілою та дробовою частиною числа

Такі задачі на математичних олімпіадах зустрічаються досить часто. При їх розв'язуванні, потрібно додатково знати лише означення цілої та дробової частини числа та деякі їх властивості. ***Цілою частиною*** $[x]$ ***числа*** x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x, ***дробовою частиною*** $\{x\}$ ***числа*** x називається різниця $x - [x]$. Очевидно, що

$$x - 1 < [x] \le x, \quad 0 \le \{x\} < 1.$$

Для довільних двох чисел x, y маємо $[x + y] = [[x] + \{x\} + [y] + \{y\}] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}] \ge [x] + [y]$. Отже, справедлива нерівність:

$$[x + y] \ge [x] + [y].$$

Функція $f(x) = \{x\}$ періодична з перідом $T = 1$.

Задача 18.1 (2 CMO-1995, 9). Розв'язати рівняння

$$[x] + \left[\frac{3}{2}x\right] + [2x] = 1995.$$

Розв'язання. Використовуючи означення цілої частини числа, оцінимо, які значення змінної x можуть бути розв'язками рівняння. Маємо:

$$x - 1 < [x] \le x, \quad \frac{3}{2}x - 1 < \left[\frac{3}{2}x\right] \le \frac{3}{2}x, \quad 2x - 1 < [2x] \le 2x,$$

звідки

$$4{,}5x - 3 < [x] + \left[\frac{3}{2}x\right] + [2x] \le 4{,}5x.$$

Отже, розв'язки рівняння повинні задовільняти умови

$$\begin{cases} 4{,}5x - 3 < 1995, \\ 4{,}5x \ge 1995, \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$443\frac{1}{3} \le x < 444, \quad 665 \le \frac{3}{2}x < 666, \quad 886\frac{2}{3} \le 2x < 888.$$

Тоді $[x]=443$, $\left[\frac{3x}{2}\right]=665$, $[2x]=886$ або 887. А $443+665+887=1995$, тому розв'язками рівняння є ті і тільки ті значення x, що задовільняють умову $887\le 2x<888$, тобто розв'язками рівняння є всі
$$x\in\left[443\frac{1}{2};444\right).\ ■$$

Задача 18.2 (9-10). Розв'язати рівняння
$$[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}.$$
Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:
$$[x]-\{x\}+\frac{1}{[x]}-\frac{1}{\{x\}}=0,\quad [x]-\{x\}-\frac{[x]-\{x\}}{[x]\cdot\{x\}}=0,$$
$$([x]-\{x\})\left(1-\frac{1}{[x]\cdot\{x\}}\right)=0,$$
звідки отримуємо, що рівність можлива в таких випадках: або $[x]=\{x\}$, або $[x]\cdot\{x\}=1$. Розглянемо ці випадки окремо.

1) $[x]=\{x\}$. Оскільки $[x]\in Z,\{x\}\in[0;1)$, то маємо $[x]=\{x\}=0$, що неможливо (шукані числа повинні бути такі, що їхня ціла та дробова частини не дорівнюють нулю).

2) $[x]\cdot\{x\}=1$. Тоді $\{x\}=\frac{1}{[x]}$. Позначивши $[x]=n$, маємо $x=[x]+\{x\}=n+\frac{1}{n}$, де $n\ge 2$ будь-яке натуральне число. ■

Задача 18.3 (10-11). Розв'язати рівняння
$$[\operatorname{tg}x]\cdot\sqrt{3-\operatorname{tg}^2x}=\operatorname{tg}x.$$
Розв'язання. Область допустимих значень даного рівняння визначається з умов: $-\sqrt{3}\le\operatorname{tg}x\le\sqrt{3}$. Тому $[\operatorname{tg}x]$ може набувати лише таких значень $-2;-1;0;1$. Отже, дане рівняння рівносильне сукупності чотирьох систем

$$\begin{cases}[\operatorname{tg}x]=-2,\\ \sqrt{3-\operatorname{tg}^2x}=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,\end{cases}\text{ або }\begin{cases}[\operatorname{tg}x]=-1,\\ \sqrt{3-\operatorname{tg}^2x}=-\operatorname{tg}x,\end{cases}\text{ або }\begin{cases}[\operatorname{tg}x]=0,\\ \operatorname{tg}x=0,\end{cases}$$
$$\text{або }\begin{cases}[\operatorname{tg}x]=1,\\ \sqrt{3-\operatorname{tg}^2x}=\operatorname{tg}x,\end{cases}$$
які рівносильні наступним:
$$\begin{cases}-2\le\operatorname{tg}x<-1,\\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{\frac{12}{5}},\end{cases}\text{ або }\begin{cases}-1\le\operatorname{tg}x<0,\\ \operatorname{tg}x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\end{cases}\text{ або }\operatorname{tg}x=0,\text{ або}$$
$$\begin{cases}1\le\operatorname{tg}x<2,\\ \operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{cases}$$
Звідси отримуємо розв'язки:
$$x_1=-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{12}{5}}+\pi m,\ m\in Z,\ x_2=\pi k,\ k\in Z,\ x_3=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi n,\ n\in Z.\ ■$$

Задача 18.4 (9-10). Для довільного натурального n, що не є четвертим степенем натурального числа, довести нерівність
$$\{\sqrt[4]{n}\}>\frac{1}{4\sqrt[4]{n^3}}.$$
Розв'язання. Кожне таке число n можна записати у вигляді $n=m^4+k$, де $k\in N,m\in N,1\le k\le(m+1)^4-m^4-1=4m^3+6m^2+4m$. Це дає змогу позбавитись від знаку дробової частини: $[\sqrt[4]{n}]=m$, $\{\sqrt[4]{n}\}=\sqrt[4]{n}-m$. Тоді можна записати ланцюжок рівносильних при умовах задачі нерівностей, що доводить вірність даної нерівності:
$$4(\sqrt[4]{n}-m)\cdot\sqrt[4]{n^3}>1,\ 4n-4m\sqrt[4]{n^3}>1,\ 4n-1>4m\sqrt[4]{n^3},$$
$$(4n-1)^4>\left(4m\sqrt[4]{n^3}\right)^4,\ 256n^4-256n^3+96n^2-16n+1>256m^4n^3,$$
$$256n^3(n-m^4-1)+16n(6n-1)+1>0,$$
$$256n^3(k-1)+16n(6n-1)+1>0.\ ■$$

Задача 18.5 (УМО-1995, 11). Довести, що система

$$\begin{cases}[n\sqrt{2}]=[m\sqrt{3}]\\ n\le 1995\end{cases}$$

має не менше 700 різних натуральних розв'язків (m,n).

Розв'язання. Оскільки $n\le 1995$, то $1\le [n\sqrt{2}]\le 2821$. Тому з перш умови випливає, що $m\sqrt{3}<2822$, звідки $m\le 1631$. Отже, числа вигл $[n\sqrt{2}], n=1,2,...,1995$ та числа вигляду $[m\sqrt{3}], m=1,2,...,1631$ мож займати на числовій прямій 2821 позицію, причому числа вигляду $[n\sqrt{}$ займають попарно різні позиції, та числа вигляду $[m\sqrt{3}]$ займають попар різні позиції. Оскільки загальна кількість цих чисел рівна 1995+1631=36 то хоча б на 805 (3626-2821) позиціях розміщено по два числа, тобто система має хоча б 805 розв'язків. ■

Задача 18.6 (10-11). Довести, що для довільного значення $n\in N$ м місце оцінка

$$\{n\sqrt{2}\}>\frac{1}{2n\sqrt{2}},$$

причому для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться число $n\in N$, яке задовіл нерівність

$$\{n\sqrt{2}\}<\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}}.$$

Розв'язання. Для даного значення $n\in N$ позначимо $m=[n\sqrt{2}]$. Очевидно, що $m\ne n\sqrt{2}$ (інакше число $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ було б раціональн Справедливість потрібної оцінки випливає з такого ланцюжка нерівностей:

$$\{n\sqrt{2}\}=n\sqrt{2}-m=\frac{2n^2-m^2}{n\sqrt{2}+m}>\frac{2n^2-m^2}{2n\sqrt{2}}\ge\frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

Нехай $\varepsilon>0$. Нерівність $\{n\sqrt{2}\}<\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}}$ при $n\in N$ рівносил таким нерівностям

$$n\sqrt{2}-m<\frac{1+\varepsilon}{2n\sqrt{2}},\quad 4n^2-2mn\sqrt{2}<1+\varepsilon,$$

$$2n^2-m^2+2n^2-2mn\sqrt{2}+m^2<1+\varepsilon,$$
$$2n^2-m^2+(n\sqrt{2}-m)^2<1+\varepsilon.$$

Легко замітити, що якщо $2n^2-m^2=1$, то

$$n\sqrt{2}-m=\frac{2n^2-m^2}{n\sqrt{2}+m}=\frac{1}{n\sqrt{2}+m}<\frac{1}{n}\le 1,$$

тобто для таких m,n вірно $n\sqrt{2}-m=\{n\sqrt{2}\}$. Тому для доведення другої частини задачі достатньо показати, що знайдуться досить великі натуральні m,n такі, що $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ та $2n^2-m^2=1$. Таку умову задовільняють дві зростаючі необмежені послідовності чисел n_i та m_i, $i\in N$, які задані наступним чином:

$$n_i=m_i=1,\quad n_{i+1}=3n_i+2m_i,\quad m_{i+1}=4n_i+3m_i,\quad i\in N.$$

Дійсно,

$$2n_{i+1}^2-m_{i+1}^2=2(9n_i^2+12n_im_i+4m_i^2)-(16n_i^2+24n_im_i+9m_i^2)=$$
$$=2n_i^2-m_i^2=\ldots=2n_1^2-m_1^2=1.$$

Твердження задачі доведене. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 18.7 (2 СМО-1995, 10). Розв'язати рівняння

$$[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[1995x]=1995.$$

Задача 18.8 (3 СМО-1996, 10). Нехай для всіх натуральних n

$$a_n=\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right], b_n=a_n-\left[\sqrt{a_n}\right].$$

Обчисліть суму $b_1+2b_2+3b_3+\ldots+n\cdot b_n$.

Задача 18.9 (9-10). Для довільного натурального n, що не є точним квадратом, довести нерівність

$$\{\sqrt{n}\}>\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Задача 18.10 (9-10). Для довільного натурального n, що не є кубом натурального числа, довести нерівність

$$\{\sqrt[3]{n}\} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}.$$

Задача 18.11. Довести, що для всіх дійсних x виконується нерівність

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x].$$

Задача 18.12. Розв'язати рівняння

$$[x^2]=1+\sin x.$$

Задача 18.13. (4 СМО-1998, 10). Знайти значення виразу

$$\left[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+1997\cdot 1998\cdot 1999}\right].$$

Задача 18.14 (Рішельєвський ліцей, м. Одеса, 1997, 9-10). Знайти такі дійсні числа p, що для довільного $x\in R$ виконується рівність

$$[x]+[x+p]+[x+2p]=[3x].$$

Задача 18.15 (9-10). Розв'язати рівняння

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}.$$

Задача 18.16 (10-11). Довести, що для довільних невід'ємних чисел x, y вірна нерівність

$$[5x]+[5y]\ge[3x+y]+[3y+x].$$

Задача 18.17 (10-11). Довести, що для довільних чисел $x\ge 0$ і $n\in N$ вірна нерівність

$$[nx]\ge\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

Задача 18.18 (КМО-1972, 7). Розв'язати рівняння

$$[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1.$$

Задача 18.19 (КМО-1972, 9). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\left[\sqrt{y-1}\right]^2=x-1,\\ 2\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right]=y-1.\end{cases}$$

Задача 18.20 (10-11). Доведіть, що для довільного натурального k знайдуться натуральні числа x, y такі, що $x<k^2, y<k^2$ та виконується нерівність

$$0<\{\sqrt{x}\}-\{\sqrt{y}\}<\frac{k-1}{k(k^2-k-1)}.$$

Задача 18.21 (11). З таблиць відомо, що $\lg\pi=0{,}4972\ldots$. Скількома знаками записується число $[\pi^{100}]$?

Задача 18.22 (5 СМО-1998, 9). Розв'яжіть рівняння

$$[19x]+98[x]=1998.$$

Задача 18.23 (5 СМО-1998, 11). Нехай P - множина, що складається з усіх натуральних чисел n, для яких виконується нерівність

$$\{n\sqrt{2}\}+\{\sqrt{2}\}>1.$$

Усі числа з P виписано в порядку зростання. Яке число стоїть у цій послідовності на 1998 місці?

Задача 18.24. Розв'язати нерівність

$$[x^2]-2[x]+1\le 0.$$

Задача 18.25 (7 СМО-2000, 8). Знайти всі додатні числа x, які задовільняють рівність

$$x[x]+[x]\{x\}+\{x\}x=2000.$$

Задача 18.26 (7 СМО-2000, 10). Знайти усі функції f, які визначені на множині всіх дійсних чисел, набувають дійсних значень і для будь-яких дійсних x, y задовільняють рівність

$$f(x+y)=\{f(x)\}+\{f(y)\}.$$

Задача 18.27 (1 РМО-1974, 11). Нехай число n є цілою частиною числа

$$\left(44+\sqrt{1975}\right)^{100}.$$

Довести, що n - непарне число.

Задача 18.28 (9 РМО-1983, 10). Знайти всі прості числа, які можуть бути представлені у вигляді $\left[\frac{n^2}{3}\right]$, де n - натуральне число.

Задача 18.29 (10-11). Довести, що для довільного натурального n виконується рівність

$$\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt[3]{n}\right]+\left[\sqrt[4]{n}\right]+\cdots+\left[\sqrt[n]{n}\right]=$$
$$=[\log_2 n]+[\log_3 n]+[\log_4 n]+\cdots+[\log_n n].$$

Вказівки та відповіді до задач

18.7. Відповідь: $x \in \left[\frac{2}{1331}; \frac{1}{665}\right)$. **18.8.** Відповідь: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Вказівка: доведіть, що $b_n = n$. **8.12.** Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$. **18.13.** Відпові[...]

$399400 = 1998 \cdot 1999 - 2$. Вказівка:

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n(n+1) = \quad 2^3 - 2 + 3^3 - 3 + \ldots + n^3 - n$

$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 - (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$. **18.14.** Відповідь: $p = \frac{1}{3}$. Вказівка: позна[...]

$[x] = n, \{x\} = t$. Тоді дана рівність рівносильна та[...] $[t+p] + [t+2p] = [3t]$. При $t = 0$ отримуємо $[p] + [2p] = 0$, звід[...]

$p \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$. Враховуючи цю оцінку, побудуйте на проміжку $[0;1)$ графі[...]

функцій $f(t) = [t+p] + [t+2p]$ та $g(t) = [3t]$. **18.15.** Відпові[...]

$0; -2; -\sqrt{5}$. **18.16.** Вказівка: розгляньте фун[...]

$f(x,y) = [5x] + [5y] - [3x+y] - [3y+x]$. **18.17.** Вказівка: д[...]

нерівність достатньо довести при $x \in [0;1)$. **18.18.** Відповідь: $x = -1$. **18.1**[...]

Відповідь: $x = 5, y = 7$. **18.20.** Вказівка: скористайтесь результатом зад[...]

18.9 та застосуйте принцип Діріхле. **18.21.** Відповідь: 50 знаків. **18.2**[...]

Відповідь: $x \in \left[17\frac{9}{19}; 17\frac{10}{19}\right)$. **18.23.** Відповідь: 4823. Вказівка: довед[...]

що до множини P входять числа вигляду $\left[k(1+\sqrt{2})\right]$ $(k \in N)$ і тіль[...]

вони. **18.24.** Відповідь: $x \in \left[1; \sqrt{2}\right)$. **18.25.** Відповідь: $x = 2\sqrt{1105} - \ldots$

18.26. Відповідь: $f(x) = 0$. **18.27.** Вказівка: покажіть, [...]

$n = 2\left(\left(44 + \sqrt{1975}\right)^{100} + \left(44 - \sqrt{1975}\right)^{100}\right) - 1$. **18.28.** Вказі[...]

розгляньте випадки $n = 3k, n = 3k+1, n = 3k+2$, $k \in N$. Відпові[...]

3, 5. **18.29.** Вказівка: покажіть, що ліва і права частини рівності дорівню[...]

$N + n - 1$, де N - кількість всіх пар (x, y) натуральних чисел, більших за 1, що задовільняють нерівність $y^x \le n$.

§ 19. Функціональні рівняння та задачі на знаходження функцій

При вивченні функцій виявляються деякі їх цікаві властивості. Наприклад, лінійна однорідна функція $f(x) = ax$ при всіх $x, y \in R$ задовільняє співвідношення

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(адитивна властивість), показникова функція $f(x) = a^x$ при всіх $x, y \in R$ задовільняє співвідношення

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Часто на олімпіадах пропонуються обернені задачі, а саме: задано рівність між виразами, складеними зі значень якоїсь функції f, за якою ця функція повинна бути знайдена. Такі рівності називаються ***функціональними рівняннями***. Часто шукана функція повинна задовільняти певним ***додатковим умовам*** - диференційовності (існування похідної), неперервності, обмеженості та ін.

Спочатку розглянемо дві класичні задачі – методи їх розв'язання можна використовувати в інших задачах.

Задача 19.1 (функціональне рівняння Коші). Знайти всі функції $f(x)$, визначені та неперервні на всій числовій осі, що при довільних дійсних x, y задовільняють рівність

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Розв'язання. Оскільки функція f неперервна на всій числовій осі, а кожне дійсне число може бути як завгодно точно наближене раціональними числами, то достатньо знайти значення функції в раціональних точках та продовжити функцію по неперервності в ірраціональні точки (***метод Коші***).

Поклавши $x = y = 0$, отримуємо $f(0) = 2f(0)$, звідки $f(0) = 0$. Поклавши $y = -x$, отримуємо $0 = f(x) + f(-x)$, звідки $f(-x) = -f(x)$, тобто функція $f(x)$ непарна.

Поклавши $y = x$, маємо

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x), \quad f(3x) = f(2x + x) =$$
$$= f(2x) + f(x) = 3f(x), \ldots, \quad f((n+1)x) = f(nx + x) =$$
$$= f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Отже, для довільних $n \in N$ та $x \in R$ виконується рівність

$$f(nx) = nf(x).$$

Поклавши в цій рівності $x = \frac{1}{n}$, отримуємо $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, тобто

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1).$$

Звідси для довільного раціонального числа $r = \frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N)$ отримуємо $f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1) = rf(1)$. Позначимо $f(1) = a$. Тоді для довільного $x \in Q$ маємо $f(x) = ax$. З неперервності функції $f(x)$ випливає, що $f(x) = ax$ для довільного $x \in R$. ■

Задача 19.2 (10-11). Знайти всі функції $f(x)$, визначені та неперервні на всій числовій осі, що задовільнять рівність $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для довільних дійсних x, y.

Розв'язання. Легко бачити, що функція $f(x) = 0$ є розв'язком цього рівняння. Будемо шукати розв'язки, відмінні від тотожного нуля. Тоді існує значення x_0 аргументу, при якому $f(x_0) \neq 0$. Поклавши $y = x_0 - x$, маємо $f(x) \cdot f(x_0 - x) = f(x_0) \neq 0$, звідки ясно, що $f(x) \neq 0$ при довільному $x \in R$. Якщо ж замінити в рівнянні x та y на $\frac{x}{2}$, отримуємо

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2,$$

так що $f(x)$ завжди строго додатна. Тому можна ввести функцію $g(x) = \ln f(x)$. Вона неперервна та задовільняє рівняння $g(x + y) = g(x) + g(y)$, тому $g(x) = ax$, звідки $f(x) = e^{ax}$.

Позначивши $e^a = b > 0$, отримуємо, що розв'язками задачі, відмінними від тотожного нуля, є показникові функції $f(x) = b^x$ і тільки вони. ■

В розв'язку цих задач значення шуканої функції на множині Q раціональних чисел було знайдено за допомогою підстановок. ***Метод підстановок*** є найпростішим та найпоширенішим при розв'язуванні функціональних рівнянь.

Задача 19.3 (I СМО-1994, 10). Знайти всі функції $f(x)$, визначені на множині всіх дійсних чисел, такі, що для будь-яких дійсних x, y виконується рівність

$$f(x + 2^y) = f(2^x) + f(y).$$

Розв'язання. Поклавши $x = y = 0$, отримуємо $f(1) = f(1) + f(0)$, звідки $f(0) = 0$. Поклавши $y = 0$, для довільного x отримуємо

$$f(x+1) = f(2^x) + f(0) = f(2^x) + 0 = f(0 + 2^x) = f(2^0) + f(x) = f(1) + f(x).$$

Звідси для натурального n отримуємо

$$f(x + n) = f(x) + n \cdot f(1).$$

Поклавши $y = 2$, отримуємо

$$f(x+4) = f(2^x) + f(2) = f(0 + 2^x) + 2f(1) = f(2^0) + f(x) + 2f(1) = f(x) + 3f(1).$$

Але за доведеним вище, $f(x + 4) = f(x) + 4f(1)$. Прирівнявши

$$f(x) + 3f(1) = f(x) + 4f(1),$$

отримуємо $f(1) = 0$ та

$$f(x + 1) = x, \quad f(x + n) = f(x).$$

Також маємо

$$f(2^{y+1}) = f(0 + 2^{y+1}) = f(1) + f(y + 1) = f(y).$$

З іншого боку,

$$f(2^{y+1}) = f(2^y + 2^y) = f(y) + f\left(2^{2^y}\right),$$

звідки отримуємо, що для довільного $y \in R$

$$f\left(2^{2^y}\right) = 0.$$

Але будь-яке число $x>1$ представляється у вигляді $z=2^{2^y}$, то $f(x)=0$ на $(1;+\infty)$. Враховуючи рівність $f(x+n)=f(x)$, отримуємо $f(x)\equiv 0$.■

Задача 19.4 (9-10). Розв'язати функціональне рівняння

$$f(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x.$$

Розв'язання. Здійснимо підстановку $x=\frac{4}{2-t}$. В результаті отримаємо

$$f\left(\frac{4}{2-t}\right)+f\left(\frac{2t-4}{t}\right)=\frac{4}{2-t}.$$

В отриманій рівності знову здійснимо таку ж підстановку $t=\frac{4}{2-x}$.

Отримуємо після елементарних перетворень

$$f\left(\frac{2x-4}{x}\right)+f(x)=\frac{2x-4}{x}.$$

Позначимо $f\left(\frac{2x-4}{x}\right)=A$, $f\left(\frac{4}{2-x}\right)=B$. Отже, маємо три рівності, які можна розглядати як систему відносно $f(x)$, A, B:

$$\begin{cases} f(x)+B=x, \\ B+A=\dfrac{4}{2-x}, \\ A+f(x)=\dfrac{2x-4}{x}. \end{cases}$$

Додавши першу та третю і віднявши другу рівність, отримуємо $2f(x)=x+\frac{2x-4}{x}-\frac{4}{2-x}$, звідки

$$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{x-2}{x}-\frac{2}{2-x}.■$$

Іноді загальний розв'язок функціонального рівняння знаходиться за допомогою його часткового розв'язку.

Задача 19.5 (10-11). Знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,$$

які визначені та неперервні на всій числовій прямій.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)=x^2$ є розв'язком даного функціонального рівняння. Позначимо $g(x)=f(x)-x^2$, тоді $f(x)=g(x)+x^2$ і дане рівняння приймає вигляд:

$$g(x+y)+(x+y)^2=g(x)+x^2+g(y)+y^2+2xy,$$

або, після спрощень

$$g(x+y)=g(x)+g(y),$$

де $g(x)$ має бути визначеною і неперервною на всій числовій осі. З задачі 19.1 випливає, що $g(x)=ax$, де a - деяке дійсне число.

Відповідь: $f(x)=x^2+ax$, де $a\in R$.■

Часто зустрічаються задачі на знаходження функцій, в яких дано кілька умов (не обов'язково у вигляді рівностей), які повинна задовільняти шукана функція. В деяких задачах вимагається лише встановити певні властивості цих функцій. Іноді вимагається навести приклад функції, що задовільняє певні умови.

Задача 19.6 (ОМО-1997, 10). Про функцію $f:R\to R$ відомо, що множина значень суми $f(x)+f(2x)$, $x\in R$ скінченна. Чи обов'язково множина значень $f(x)$, $x\in R$, скінченна?

Розв'язання. Розіб'ємо якийсь інтервал, числової осі, наприклад $(1;+\infty)$ на частини так, щоб при відображенні $x\to 2x$ кожна частина переходила у наступну. Це можна зробити таким чином: $(1;2],(2;4],(4;8],\ldots,(2^{k-1},2^k],\ldots$. Тоді функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ (-1)^k k, & 2^{k-1}<x\le 2^k\end{cases}$$

приймає нескінченну кількість значень, а саме: $0,-1,2,-3,4,\ldots,-(2k-1),2k,\ldots$, але при цьому сума $f(x)+f(2x)$ може приймати лише значення $0,-1,1$.

Відповідь: множина значень $f(x)$, $x\in R$ не обов'язково є скінченна.■

Задача 19.7 (УМО-1997, 11). Нехай Q' - множина додатних раціональних чисел. Знайти всі функції $f:Q'\to Q'$, які для кожного $x\in Q'$ задовільняють умови:

1. $f(x+1)=f(x)+1$;
2. $f(x^2)=(f(x))^2$.

Розв'язання. Підставимо $x=1$ в умову 2. Маємо $f(1)=(f(1))^2$, звідки $f(1)=0$ або $f(1)=1$. Але $0\notin Q'$, тому $f(1)=1$. Тоді $f(2)=f(1)+1=2,\dots, f(n)=f(n-1)+1=n$, для будь-якого натурального n. Також просто показується, що $f(x+n)=f(x)+n$, $x\in Q'$.

Нехай $r=\dfrac{m}{n}$ - додатне раціональне число, $m,n\in N$. Виконаємо підстановку $x=n+\dfrac{m}{n}$. Отримуємо

$$f\left(\left(n+\frac{m}{n}\right)^2\right)=\left(f\left(n+\frac{m}{n}\right)\right)^2,\quad f\left(n^2+2m+\frac{m^2}{n^2}\right)=\left(n+f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2,$$

$$n^2+2m+f\left(\frac{m^2}{n^2}\right)=n^2+2nf\left(\frac{m}{n}\right)+\left(f\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2.$$

Але $f\left(\dfrac{m^2}{n^2}\right)=f\left(\left(\dfrac{m}{n}\right)^2\right)=\left(f\left(\dfrac{m}{n}\right)\right)^2$, тому маємо $2m=2nf\left(\dfrac{m}{n}\right)$,

звідки $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{m}{n}$, тобто $f(r)=r$.

Отже, $f(x)=x$. ■

Задача 19.8 (10-11). Чи існує нелінійна функція $f:R\to R$, яка має наступні три властивості:

а) $f(1997)=1997\sqrt{1997}$;

б) $f(f(x))=x$ при всіх $x\in R$;

в) при кожному дійсному a рівняння

$$f(f(a+x)+x)-f(f(a)+x)=x$$

на будь-якому інтервалі (A,B) дійсної осі має нескінченно багато ірраціональних коренів?

Розв'язання. Методом підбору неважко встановити, що функції $g(x)=x$ та $h(x)=b-x$ мають властивості б) та в) одночасно. За допомогою цих функцій «сконструюємо» нелінійну функцію $f(x)$, яка задовільняє умову а), б), в) одночасно:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо}\quad x\ne 1997,\ x\ne 1997\sqrt{1997},\\ 1997\sqrt{1997}, & \text{якщо}\quad x=1997,\\ 1997, & \text{якщо}\quad x=1997\sqrt{1997}.\end{cases}$$

Задача 19.9 (КМО-1993, 11). Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$, неперервна і задовільняє тотожність

$$f(f(x))=x^2.$$

Довести, що виконуються нерівності

$$x^2<f(x)<x$$

при $x\in(0;1)$. Навести приклад такої функції.

Розв'язання. Припустимо, що існує $x\in(0;1)$ таке, що $f(x)=x$. Тоді $x^2=f(f(x))=f(x)=x$, що неможливо при $x\in(0;1)$. Отже, $f(x)\ne x$ для всіх $x\in(0;1)$. За неперервності функції $f(x)$ випливає, що різниця $f(x)-x$ на $(0;1)$ зберігає знак.

Припустимо, що $f(x)>x$. Тоді $x^2=f(f(x))>f(x)>x$, тобто $x^2>x$, що неможливо при $x\in(0;1)$. Отже, $f(x)<x$ для всіх $x\in(0;1)$.

Припустимо, що існує $x\in(0;1)$ таке, що $f(x)=x^2$. Тоді $x^2=f(f(x))=f(x^2)$, що суперечить доведеному $f(x)<x$. Отже, $f(x)\ne x^2$ для всіх $x\in(0;1)$. З неперервності функції $f(x)$ випливає, що різниця $f(x)-x^2$ на $(0;1)$ зберігає знак.

Припустимо, що $f(x)<x^2$. Тоді $x^2=f(f(x))<(f(x))^2<x^4$, тобто $x^2<x^4$, що неможливо при $x\in(0;1)$. Отже, $f(x)>x^2$ для всіх $x\in(0;1)$.

Приклад такої функції: $f(x)=x^{\sqrt{2}}$. ■

Задача 19.10 (УМО-1996, 11). Нехай для всіх дійсних чисел x функція $f(x)$ задовільняє співвідношення

$$(x-1)\cdot f(x+1)-(x+1)\cdot f(x-1)=4x(x^2-1).$$

а) Доведіть, що функція $f(x)$ є неперіодичною;

в) Чи може функція $f(x)$ бути многочленом?

с) Чи може функція $f(x)$ бути не многочленом?

Розв'язання. Припустимо, що $f(x)$ періодична з періодом T. Тоді маємо

$$f(kT+1)=f(1)=a,\ f(kT-1)=f(-1)=b,$$

де $k\in Z$. Тоді всі цілі k задовільняють рівність

$$a(kT-1)-b(kT+1)=4kT(k^2T^2-1),$$

що неможливо, оскільки кубічне рівняння

$$a(xT-1)-b(xT+1)=4xT(x^2T^2-1)$$

має не більше трьох різних коренів.

Дане рівняння при $x\neq\pm1$ можна записати у вигляді

$$\frac{f(x+1)}{x+1}-\frac{f(x-1)}{x-1}=4x=(x+1)^2-(x-1)^2,$$

або

$$\frac{f(x+1)}{x+1}-(x+1)^2=\frac{f(x-1)}{x-1}^2-(x-1)^2.$$

Тоді для функції $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x^2$ маємо рівність

$$g(x+1)=g(x-1),$$

тобто $g(x)$ періодична з періодом $T=2$ і визначена при всіх x (за винятком, можливо, $x=2k, k\in Z$).

Отже, $f(x)=x\cdot g(x)+x^3$, де $g(x)$ - довільна періодична з періодом $T=2$ функція.

У випадку $g(x)=c$ отримуємо: $f(x)=cx+x^3$, тобто $f(x)$ може бути многочленом.

У випадку $g(x)=\sin\pi x$ маємо, що $f(x)$ може не бути многочленом. ■

Задача 19.11 (10-11). Довести, що функціональне рівняння

$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=0$$

не може мати неперервних на всій числовій осі розв'язків $f(x)$.

Розв'язання. Припустимо, що в деякій точці x_0 виконується рівність $f(x_0)=0$. Тоді, поклавши $x=x_0-1$, отримуємо

$$f(x_0)(f(x_0-1)+1)+1=0,$$

тобто $1=0$, що невірно. Отже, при довільному дійсному x виконується $f(x)\neq0$.

Оскільки розв'язок $f(x)$ має задовільняти рівність

$$f(x+1)(f(x)+1)=-1,$$

то з умови $f(x+1)>0$ випливає, що $f(x)<0$. Але тоді за умови неперервності функції $f(x)$ має існувати така точка $x_0\in(x,x+1)$, що $f(x_0)=0$. Протиріччя з доведеним вище. Отже, при довільному дійсному x виконується $f(x)<0$. Але тоді з умови $f(x+1)(f(x)+1)=-1$ випливає, що при довільному дійсному x виконується

$$f(x)+1=-\frac{1}{f(x+1)}>0,$$

звідки $f(x)>-1$.

Але тоді отримуємо $f(x+1)f(x)=-1-f(x+1)<0$. Протиріччя з отриманим вище, що функція $f(x)$ зберігає знак. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 19.12 (10-11). Розв'язати на множині дійсних чисел функціональні рівняння:

1) $f(x+y)=f(x)+y,\quad x,y\in R;$

2) $f(x+y)-f(x-y)=2f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin y,\quad x,y\in R;$

3) $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y,\quad x,y\in R;$

4) $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right),\quad x\neq0,\ x\neq1;$

5) $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),\quad x,y\in R.$

Задача 19.13 (УМО-1974, 10). Знайти усі функції f, які визначені на всій множині дійсних чисел і при будь-яких дійсних значеннях x і y задовільняють рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

Задача 19.14 (УМО-1982, 8). Знайти усі многочлени $f(x)$ такі, щоб рівність

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$$

виконувалась для всіх дійсних x і y.

Задача 19.15 (УМО-1982, 10). Функція $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;1]$, для будь-яких $a,b\in[0;1]$ задовільняє нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le f(a)+f(b).$$

Відомо, що $f(0)=f(1)=0$:

а) Довести, що рівняння $f(x)=0$ має безліч розв'язків;

б) Навести приклад такої функції, яка б не дорівнювала тотожно нулю.

Задача 19.16 (УМО-1985, 10). Функція $f(x)$ визначена тільки на відрізку $[0;1]$ і задовільняє рівняння $f(x+f(x))=f(x)$ для всіх $x\in[0;1]$. Довести, що $f(x)=0$ для всіх $x\in[0;1]$.

Задача 19.17 (1 СМО-1994, 11). Функція $f(x)$, яка визначена на множині невід'ємних дійсних чисел, набуває дійсних значень. Відомо, що $f(0)=0$ та функція $\dfrac{f(x)}{x}$ неспадна для $x>0$. Довести, що для довільних $x\ge 0$ та $y\ge 0$ виконується нерівність

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y).$$

Задача 19.18 (ОМО-1995, 11). Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень на цій самій множині. Для довільного числа n з цієї множини має місце рівність:

$$f(f(n))+f(n)=2n+3.$$

Знайти $f(1995)$.

Задача 19.19 (ОМО-1995, 10). Чи існує такий многочлен $p(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що $p(x)\ge 1995\cdot p'(x)$ для всіх дійсних x.

Задача 19.20 (10-11). Знайти всі розв'язки функціонального рівняння

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,$$

які визначені, неперервні на всій числовій прямій і задовільняють умову $f(1)=2$.

Задача 19.21. Знайти всі многочлени $P(x)$ такі, що для всіх $x,y\in R$ виконується рівність

$$(P(x))^2-(P(y))^2=P(x+y)P(x-y).$$

Задача 19.22 (4 СМО-1998, 10). Знайти всі функції f, що визначені на множині всіх цілих чисел та приймають лише цілі невід'ємні значення, задовільняючи при всіх цілих m,n умови:

1) $f(mn)=f(m)f(n)$;

2) $f(m+n)\le 1997(f(m)+f(n))$;

3) $f(1997)=0$.

Задача 19.23 (9-10). Знайти всі функції f, що визначені на множині всіх дійсних чисел та при всіх дійсних x,y задовільняють рівність

$$(x+y)(f(x)-f(y))=f(x^2)-f(y^2).$$

Задача 19.24 (11). Знайдіть всі функції $f:R\to R$, які неперервні в точці $x=0$ і задовільняють рівнянню

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy.$$

Задача 19.25 (11). Знайдіть всі диференційовні функції $f:R\to R$, які задовільняють рівнянню

$$f(f(x))=f(x)+x.$$

Задача 19.26 (11). Знайдіть всі неперервні функції $f:(0;+\infty)\to R$, які задовільняють рівнянню

$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}.$$

Задача 19.27 (9-11). Знайдіть всі функції $f:R\to R$, які для будь-яких $x,y,z\in R$ задовільняють нерівність

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\ge 3f(x+2y+3z).$$

Задача 19.28 (5 СМО-1998, 10-11). Знайдіть всі функції $f:R\to R$, які для будь-яких $x,y\in R$ задовільняють рівняння

$$f(x+y)=\max(f(x),y)+\min(x,f(y)).$$

Задача 19.29 (УМО-2000, 11). Чи існує функція $f:R\to R$, яка задовільняє наступні три умови:

1) f диференційовна на R;

2) $f'(2000)=1$;

3) $(f(2000+x))^3=(f(2000-x))^2+x$ для всіх $x\in R$?

Задача 19.30 (ОМО-2001, 11). Знайдіть всі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовільняють наступні дві умови:

1) рівняння $f(x)=0$ має єдиний корінь;

2) для будь-яких $x,y\in R$ виконується рівність

$$f(y+f(x))=f(x^2-y)+4f(x)y.$$

Задача 19.31 (УМО-2001, 9). Чи існує функція f, яка визначена на множині всіх пар дійсних чисел і задовільняє умови:

1) f набуває всіх дійсних значень;

2) для будь-яких дійсних x,y виконується $f(x,y)=-f(y,x)$;

3) для будь-яких дійсних x,y,z виконується

$$f(x,f(y,z))=2001f(f(x,y),z)?$$

Задача 19.32 (7 СМО-2000, 10). Нехай f - диференційовна функція, яка визначена на множині всіх дійсних чисел і не є тотожним нулем. Доведіть, що справедливим є хоча б одне з двох таких тверджень:

1) для деякого дійсного x виконується $f(x)\sin x>0$;

2) для деякого дійсного x виконується $f'(x)\cos x<0$.

Задача 19.33 (9 РМО-1983, 10). Функція $f(x)$ визначена при всіх дійсних значеннях x та задовільняє при всіх $x\in R$ рівність

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

Знайти $f(x)$.

Задача 19.34 (2 РМО-1976, 11). Нехай $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Знайти суму

$$f(0)+f\left(\frac{1}{1976}\right)+f\left(\frac{2}{1976}\right)+\cdots+f\left(\frac{1975}{1976}\right)+f(1).$$

Задача 19.35 (9-10). Розв'язати функціональне рівняння

$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$$

при $x\neq 0, a\neq \pm 1$.

Вказівки та відповіді до задач

19.12. Відповідь: 1) $f(x)=x+a$, де $a\in R$; 2) $f(x)=a\cos x+b\sin x$, де $a,b\in R$; 3) $f(x)=x+a$, де $a\in R$;

4) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\neq 0, x\neq 1;\\ a\ (\text{або не визначена}), & \text{якщо } x=0;\\ a\ (\text{або не визначена}), & \text{якщо } x=1;\end{cases}$ де $a\in R$;

5) $f(x)=0$ або $f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\neq 0;\\ a, & \text{якщо } x=0;\end{cases}$ де $a\in R$.

19.13. Відповідь: $f(x)=a\cos x+b\sin x$. **19.14.** Відповідь: $f(x)=x^3+ax$, $a\in R$. Вказівка: розгляньте функцію $g(x)=f(x)-x^3$.

19.15. Вказівка: доведіть методом математичної індукції, що $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$ при всіх $n\in N$. Відповідь: б) наприклад, $f(x)=\begin{cases}0, & x=\frac{m}{2^k};\\ 1, & x\neq\frac{m}{2^k},\end{cases}$ де $m,k\in N\cup\{0\}$. **19.16.** Вказівка: використовуючи обмеженість області визначення функції, покажіть, що вона не може приймати ні додатніх, ні від'ємних значень. **19.17.** Вказівка: використайте нерівності $\frac{f(x)}{x}\le\frac{f(x+y)}{x+y}$ та $\frac{f(y)}{y}\le\frac{f(x+y)}{x+y}$. **19.18.** Відповідь: $f(1995)=1996$. Вказівка: нехай $f(0)=k$. Тоді $f(k)+k=3$. При розгляді випадків $k=0, k=2, k=3$ приходимо до протиріччя. Отже $k=1$, звідки отримуємо $f(n)=n+1$. **19.19.** Відповідь: так, наприклад, $p(x)=x^2+1995^2$. **19.20.** Відповідь: $f(x)=x+1$. Вказівка: поклавши $y=1$, отримуємо $f(x+1)=f(x)+1$, звідки послідовно отримуємо $f(x+n)=f(x)+n$, де $n\in Z$; $f(n)=n+1$; $f(nx)=nf(x)-n+1$; $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+1$; $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}+1$, де $m\in Z$. Враховуючи неперервність шуканої функції, отримуємо відповідь. **19.21.** Відповідь.

$P(x) = ax, \quad a \in R$. **19.22.** Відповідь: $f(n) = 0$ або $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ ділиться на } 1997; \\ 1, & \text{якщо } n \text{ не ділиться на } 1997. \end{cases}$ **19.23.** Відповідь: $f(x) = kx + b$. Вказівка: надайте змінній y значень 0 та 1, розв'яжіть отриману систему відносно $f(x)$ та $f(x^2)$. **19.24.** Відповідь: $f(x) = ax + \frac{x(x+1)}{2}$. **19.25.** Відповідь: $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x$. **19.26.** Відповідь: $f(x) = \frac{a}{x}$. **19.27.** Відповідь: $f(x) = c$. Вказівка: виконайте підстановки $x = -y = z$, $x = y = -z$. **19.28.** Відповідь: $f(x) = x$. Вказівка: використайте рівність $\max(a,b) + \min(a,b) = a + b$. **19.29.** Відповідь: не існує. Вказівка: продиференціюйте рівність з умови (3) та обчисліть $f(2000)$. **19.30.** Відповідь: $f(x) = x^2$. Вказівка: виконайте послідовно підстановки: 1) $x = y = 0$; 2) $x = 0, y = -f(0)$; 3) $y = -f(x)$; 4) $y = x^2$. **19.31.** Відповідь: не існує. **19.32.** Вказівка: розгляньте функцію $f(x)\cos x$. **19.33.** Відповідь: $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - 1\right)$. **19.34.** Вказівка: $f(x) + f(1-x) = 1$. Відповідь: $\frac{1977}{2}$. **19.35.** Відповідь: $f(x) = \frac{a(ax^2 - 1)}{x(a^2 - 1)}$.

§ 20. Розміщення фігур на площині, покриття, розрізання та розфарбування фігур

Множина точок площини називається ***фігурою***. В шкільних задачах найчастіше зустрічаються многокутники – фігури, обмежені замкненими ламаними. Відносно розміщення многокутників на площині необхідно виділити **теорему Жордана**: довільна замкнена без самоперетинів ламана ділить площину на дві області – внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену), причому довільний шлях з точки, яка лежить у внутрішній області, в точку, яка лежить у зовнішній області, перетинає цю ламану, а довільні дві точки кожної з цих областей можна з'єднати шляхом, який не перетинає ламаної.

Фігура називається ***опуклою***, якщо разом з кожними своїми двома точками вона містить також весь відрізок з кінцями в цих точках. ***Опуклим многокутником*** називається многокутник Φ, який має одну з наступних рівносильних властивостей:

а) Φ є опуклою фігурою;

б) Φ розміщений в одній півплощині відносно прямої, яка містить будь-яку з його сторін;

в) всі його кути менші за $180°$;

г) Φ є перетином кількох півплощин.

Для довільної скінченної множини точок на площині існує її (єдина) ***опукла оболонка*** – найменший опуклий многокутник, який містить всі ці точки. Розв'язання деяких задач варто розпочинати з розгляду опуклої оболонки.

Задача 20.1 (9-11). На площині дано $2n+3$ точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій та жодні чотири з яких не лежать на одному колі. Доведіть, що з цих точок можна вибрати три точки так, що серед невибраних точно n точок лежать всередині кола, проведеного через вибрані точки, а точно n - зовні цього кола.

Розв'язання. Розглянемо опуклу оболонку множини даних точок. Нехай AB - одна із її сторін. Всі інші вершини занумеруємо в порядку зростання кутів, під якими видно з них відрізок AB, тобто $\angle AC_1B < \angle AC_2B < \ldots < \angle AC_{2n+1}B$ (оскільки жодні чотири точки не лежать на одному колі, то всі такі кути різні). Проведемо коло через точки

A,B,C_{n+1}. Точки $C_1,C_2,...,C_n$ лежать зовні цього кола, а точки $C_{n+2},C_{n+3},...,C_{2n+1}$ - всередині цього кола. ■

Методом математичної індукції доводиться (спробуйте зробити це самостійно) наступне, цікаве для застосувань, твердження.

Теорема 20.1 (Хеллі). Нехай на площині дано n опуклих фігур, кожні три з яких мають спільну точку. Тоді всі ці n фігур мають спільну точку.

Якщо об'єднання фігур $D_1,D_2,\dots,D_n$ містить дану фігуру Φ, то говорять, що фігури $D_1,D_2,\dots,D_n$ утворюють ***покриття*** фігури Φ. При цьому фігури $D_1,D_2,\dots,D_n$ можуть перетинатися.

Множина точок, відстань від яких до точки A менша ніж (додатне) число ε, називається ***ε-околом*** точки A. Точка, яка належить фігурі Φ разом з деяким своїм околом, називається ***внутрішньою точкою*** фігури Φ. Якщо всі точки фігури Φ є її внутрішніми точками, то ця фігура називається ***відкритою***.

Точка, довільний окіл якої містить як точки, що належать фігурі Φ, так і точки, які не належать фігурі Φ, називається ***межовою точкою*** цієї фігури. Множина всіх межових точок фігури називається ***межею*** цієї фігури.

Покриття фігури Φ фігурами $D_1,D_2,\dots,D_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, називається ***розрізанням фігури Φ***.

При розв'язуванні задач, зв'язаних з покриттям та розрізанням, використовуються загальні властивості фігур, пов'язані з їх розташуванням на площині.

Задача 20.2 (8-9). Чи можна даний правильний трикутник покрити двома меншими правильними трикутниками?

Розв'язання. Кожен з менших трикутників може покрити тільки одну вершину більшого, тому одна з вершин обов'язково буде не покритою. ■

Задача 20.3 (9-10). Чи можна покрити всю площину скінченним числом опуклих фігур, обмежених параболами (осі парабол можуть мати будь-який напрям)?

Розв'язання. Припустимо, що можна, тобто деякий набір опуклих фігур $\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_k$, обмежених параболами, покриває площину. Оскільки кількість парабол скінченна, то існує пряма l, яка не паралельна жодній з осей цих парабол. Але перетином кожної з фігур $\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_k$ з прямою

l може бути лише точка або відрізок скінченної довжини (або порожня множина). Протиріччя з тим, що фігури $\Pi_1,\Pi_2,\dots,\Pi_k$ утворюють покриття прямої l.

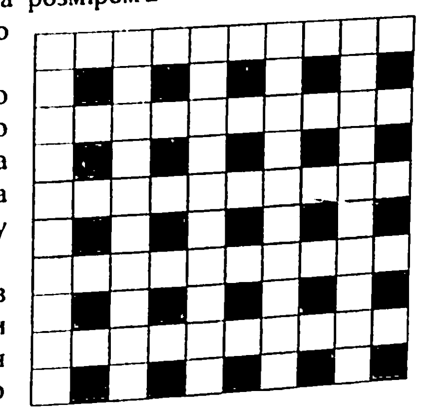
Отже, відповідь: не можна. ■

В деяких задачах спрацьовує ***ідея розфарбування***. При цьому розуміють, що фігура розфарбована в кілька кольорів, якщо кожній точці фігури поставлено у відповідність один з цих кольорів. Зустрічаються задачі, де розфарбування вже дано, в деяких задачах розфарбування з певними властивостями потрібно придумати.

Задача 20.4 (8-9). Дно коробки розміром 10×10 було вимощено плитками розміром 1×4 та 2×2. Одну з цих плиток розміром 1×4 загубили, але в запасі є плитка розміром 2×2. Чи можна наявними плитками знову вимостити дно коробки?

Розв'язання. Розіб'ємо дно коробки на квадрати та зафарбуємо деякі клітинки так, як показано на малюнку 20.1. Тоді кожна плитка 2×2 покриває рівно одну зафарбовану, а кожна плитка 1×4 покриває дві або жодної з пофарбованих клітинок. Оскільки зафарбованих клітинок 25, то для вимощення дна коробки потрібно непарну кількість плиток 2×2.

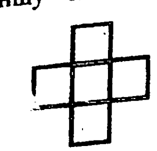
Тому нове вимощення дна коробки неможливе. ■



Мал.20.1

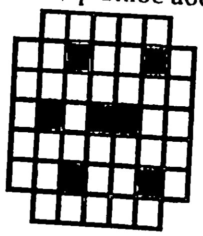
Задача 20.5 (ОМО-1999, 11). Чи можна таблицю 7×7 без кутових клітинок заповнити цілими числами так, щоб сума всіх чисел таблиці була рівна 1999199991999, але в кожній фігурці, вигляд якої показаний на малюнку 20.2, сума чисел була від'ємною?

Розв'язання. Пофарбуємо у вказаній таблиці найменшу кількість клітинок так, щоб будь-яка частина таблиці вказаного вигляду містила хоча б одну пофарбовану клітинку. Це можна зробити кількома способами, наприклад так, як на малюнку 20.3.



Мал 20.2

У кожній непофарбованій клітинці запишемо натуральне число m, у кожній пофарбованій - число $(-5m)$. Тоді у кожній фігурці вказаного вигляду сума чисел дорівнює або ($-m$), або ($-7m$), а у всій таблиці сума чисел



$$S = 7\cdot(-5m)+(45-7)\cdot m = 3m .$$

Залишається покласти $m = \dfrac{199919991999}{3}$. ∎

Мал.20.3

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 20.6 (8-9). Довести, що всередині довільного опуклого семикутника є точка, яка не належить жодному з чотирикутників, утворених четвірками його сусідніх вершин.

Задача 20.7 (9-10). Довести, що довільний опуклий многокутник площі 1 можна помістити в прямокутник площі 2.

Задача 20.8 (8-9). Чи можна одиничний квадрат покрити трьома квадратами з стороною рівною 0,7?

Задача 20.9 (8-9). Довести, що круги, які побудовано на сторонах довільного чотирикутника як на діаметрах повністю його покривають.

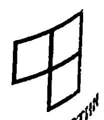
Задача 20.10 (УМО-1988, 7). Довести, що різносторонній трикутник не можна розрізати прямою на два рівні трикутники.

Задача 20.11 (8-9). Доведіть, що многокутник не можна покрити двома многокутниками, які гомотетичні йому з коефіцієнтом k, де $0 < k < 1$.

Задача 20.12 (УМО-1983, 7). Паркет, що покриває площину, складається з правильних трикутників. Чи можна за допомогою 6 фарб розфарбувати ці трикутнички (кожен в один колір) так, щоб кожні два, що мають хоча б одну спільну вершину, було пофарбовано в різні кольори?

Задача 20.13 (УМО-1983, 10). Паркет, що покриває площину, складається з правильних трикутників. Чи можна за допомогою 4 фарб розфарбувати паркет так, щоб кожний його трикутничок було пофарбовано в один колір, а кожні 4 трикутнички, що утворюють правильний трикутник, були різного кольору?

Задача 20.14 (УМО-1979, 7). Чи можна дошку, розміром 1979×1980 розрізати на частини такого вигляду, кожна з яких складається з трьох квадратиків розміру 1×1?



Задача 20.15 (КМО-1981, 7). На яку найбільшу кількість частин розбивають площину три прямокутники?

Задача 20.16 (8-9). На папері в клітинку намальовано квадрат 1993×1993. З нього вирізали 399^2-1 квадратиків 3×3. Чи можна вирізати ще один такий квадратик?

Задача 20.17 (КМО-1965, 8). Шахова дошка 6×6 довільним чином покрита вісімнадцятьма плитками доміно (кожна плитка покриває дві клітинки). Довести, що дошку завжди можна розрізати вздовж вертикальної чи горизонтальної прямої на дві частини, не пошкодивши жодної плитки доміно.

Задача 20.18 (КМО-1980, 7). До однієї з сторін квадрата прикладено квадрат з вдвічі меншою стороною так, що обидва квадрати мають спільну вершину. Потрібно перетворити отриману фігуру в квадрат з допомогою двох прямолінійних розрізів і переміщенням утворених частин.

Задача 20.19 (КМО-1980, 6). До кожної сторони квадрата прикладено ще один такий же квадрат. Потрібно перетворити утворену "хрестоподібну" фігуру в квадрат за допомогою чотирьох прямолінійних розрізів та переміщень утворених частин.

Задача 20.20 (4 СМО-1998, 9). Чи можливо розфарбувати клітинки квадрату 6×6 в чорний та білий кольори таким чином, щоб кількість чорних клітинок довільного квадрату 3×3 була більша за кількість білих клітинок цього квадрату, а кількість білих клітинок довільного квадрату 5×5 була більша за кількість чорних клітинок цього квадрату?

Задача 20.21 (УМО-2001, 8). У кожній клітинці дошки розміром 9×9 сидить жук. Кожного дня всі жуки одночасно переповзають зі своєї клітинки в одну з чотирьох сусідніх (сусідніми називаються клітинки, які мають спільну сторону). При цьому жоден жук не використовує ні напрямок, в якому він повз вчора, ні протилежний до нього. кщо після переповзання на одній клітинці опиняються декілька жуків, то один залишається, а решта відлітає з дошки. ка найбільша кількість жуків може залишитись на дошці в кінці 2000-го дня?

Задача 20.22 (8-9). Дошка 9×9 пофарбована в 9 кольорів, причому кожним кольором пофарбовано однакову кількість клітинок та пофарбування симетричне відносно головної діагоналі. Доведіть, що на цій діагоналі всі клітинки пофарбовані в різні кольори.

Задача 20.23 (7-9). Чи можна квадрат 10×10 розрізати на 25 фігурок, що є прямокутниками розміру 4×1 ?

Задача 20.24 (9-10). На площині розташовано n точок так, що площа довільного трикутника з вершинами в цих точках не перевищує [illegible]. Доведіть, що всі ці точки можна покрити трикутником, площа якого рівна 4.

Задача 20.25 (9-10). Чотири півплощини, які лежать в одній і тій же площині, розміщені так, що повністю покривають площину, тобто довільна точка площини є внутрішньою точкою хоча б однієї з даних півплощин.

Довести, що з цих півплощин можна вибрати три такі, які також покривають всю площину.

Задача 20.26 (8-9). Чи можна замостити кісточками доміно розміру 1х2 шахову дошку розміру 8×8, з якої вирізано дві протилежних кутових клітинки?

Задача 20.27 (8-9). Довести, що дошку розміру 10×10 клітинок не можна розрізати на фігурки у вигляді букви T, які складаються з чотирьох клітинок.

Задача 20.28 (8-9). З 16 плиток розміру 1×3 та однієї плитки 1х1 склали квадрат 7×7. Довести, що плитка 1×1 лежить в центрі квадрата або прилягає до його межі.

Задача 20.29 (8-9). Площина пофарбована в три кольори. Довести, що знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими рівна 1.

Задача 20.30 (8-9). Площина пофарбована в сім кольорів. Чи обов'язково знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими рівна 1?

Задача 20.31 (9-10). Довести, що довільний правильний $2n$-кутник можна розрізати на ромби.

Задача 20.32 (9-10). Правильний восьмикутник з стороною 1 розрізано на паралелограми. Довести, що серед них є хоча б два прямокутники, причому сума площ всіх прямокутників дорівнює 2.

Задача 20.33 (12 РМО-1986, 11). Кожна точка площини пофарбована одним з двох кольорів. Відомо, що у довільного правильного трикутника зі стороною 1 є вершини обох кольорів.

1) Довести, що існує правильний трикутник з стороною $\sqrt{3}$, всі вершини якого одного кольору.

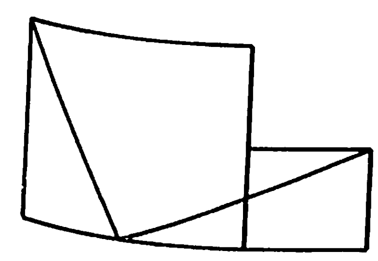
2) Навести приклад розфарбування площини, яке задовільняє умову задачі.

Вказівки та відповіді до задач

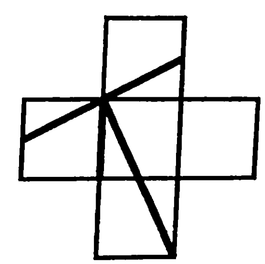
20.6. Вказівка: скористайтесь теоремою Хеллі. **20.7.** Вказівка: розгляньте прямокутник, дві сторони якого паралельні найбільшій діагоналі даного многокутника. **20.8.** Відповідь: ні, буде непокритою хоча б одна вершина. **20.9.** Вказівка: припустіть супротивне та розгляньте суму кутів, під якими з непокритої точки видно сторони чотирикутника. **20.10.** Вказівка: припустіть супротивне. **20.11.** Вказівка: розгляньте точку даного многокутника, найбільш віддалену від прямої, яка проходить через центри гомотетій. **20.12.** Відповідь: так. Вказівка: розбиваємо площину на смуги. В першій смузі трикутники фарбуємо у послідовності кольорів 1, 2, 3, 1, 2, ...; у сусідніх смугах – у послідовності 4, 5, 6, 4, 5, ... і т.д. **20.13.** Відповідь: так. **20.14.** Відповідь: так. Вказівка: спочатку потрібно розрізати дошку на

прямокутники розміром 2×3. **20.15.** Відповідь: на 26 частин. **20.16.** Відповідь: так. Вказівка: зафарбуйте на папері всі квадрати 3×3, координати яких задовільняють умови: $5k\le x\le 5k+3,\ 5n\le y\le 5n+3$, де $k,n=0,1,2,\ldots,398$. Тоді при вирізанні довільного квадрату 3×3 будуть вирізуватися клітинки з одного і тільки одного із зафарбованих квадратів. **20.17.** Вказівка: доведіть, що кожна з вертикальних та горизонтальних ліній, якими розкреслена дошка, розрізає пополам парну кількість плиток доміно.

20.18. Вказівка:



20.19. Вказівка:



20.20. Відповідь: так, наприклад:

Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Б	Б	Ч	Б	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч
Ч	Б	Б	Ч	Б	Б
Ч	Б	Ч	Ч	Б	Ч

20.21. Відповідь: 64 жуки. Вказівка: для доведення того, що це найбільша кількість, зафарбуйте клітинки дошки в 4 кольори в такому порядку. В кожному непарному рядку – 1, 4, 1, 4,... зліва направо; в кожному парному рядку – 2, 3, 2, 3,... зліва направо. **20.22.** Вказівка: доведіть, що кожен колір зустрічається на головній діагоналі. **20.23.** Відповідь: ні. Вказівка: розфарбуйте квадрат в 4 кольори так, щоб кожна (висхідна) діагональ була пофарбована в один колір, а ці кольори чередувались в такому порядку: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3,.... **20.24.** Вказівка: проведіть прямі, які проходять через вершини найбільшого за площею трикутника і паралельні протилежним сторонам цього трикутника. **20.26.** Відповідь: ні. Вказівка: вирізано клітинки одного кольору, тому залишилось 32 білих клітинок та 30 чорних або навпаки. **20.27.** Вказівка: розгляньте розфарбування у шаховому порядку. **20.28.** Вказівка: зафарбуйте отриманий квадрат в три кольори 1, 2, 3 таким способом:

1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1
2	3	3	2	3	3	2
2	3	3	2	3	3	2
1	2	2	1	2	2	1

20.30. Відповідь: не обов'язково. Вказівка: замостіть площину правильними шестикутниками. **20.31.** Вказівка: методом математичної індукції доведіть більш загальне твердження для $2n$-кутника, протилежні сторони якого рівні та паралельні. **20.33.** Вказівка: 2) розбийте площину на смуги шириною $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 21. Ігрові задачі

В математичних іграх припускається, що грають двоє (інколи троє), *ходи* роблять по черзі (жоден з гравців не може пропустити хід), причому *гравці* не роблять помилок. А тому в таких іграх наперед можна *визначити* кінцевий результат, тобто передбачити, який з гравців може забезпечити *собі* виграш. Для розв'язання задачі-гри необхідно сформулювати ***виграшну стратегію*** одного з гравців та довести, що така стратегія веде до виграшу.

Серед ігрових задач зустрічаються ***ігри-жарти***, тобто ігри, результат яких не залежить від того як грають суперники.

Задача 21.1 (6-8). Маємо три купи каменів: в першій - 10, в другій - 15, в третій - 20. За хід дозволяється розділити будь-яку купу на дві менші. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. В кінці гри, коли не можна зробити хід, маємо 45 куп по одному каменю. За будь-який хід кількість куп збільшується на одиницю, тому вся гра має тривати точно $45-3=42$ ходи.

Отже, другий гравець завжди виграє. ■

В багатьох ігрових задачах виграшна стратегія досягається за допомогою ***вдалого ходу-відповіді на будь-який хід суперника***. Існування такого ходу може забезпечуватись симетрією, розбиттям на пари, доповненням до числа.

Задача 21.2 (6-8). Двоє гравців по черзі виймають з двох ящиків кулі. За один хід кожен гравець може брати з будь-якого (тільки одного) ящика довільну кількість куль. Виграє той, хто бере останнім . к повинен грати той гравець, що починає, щоб виграти, якщо в першому ящику 73 кулі, а в другому - 118 куль?

Розв'язання. кщо перший гравець спочатку візьме 45 куль з другого ящика, то в ящиках стане куль порівну. Після цього перший гравець на кожен хід суперника має симетричну відповідь, тобто, якщо другий гравець бере n куль з якогось ящика, то перший повинен брати n куль з іншого ящика. ■

Наступна задача показує, що при виборі ***симетричної стратегії*** потрібно пам'ятати наступне правило: ***суперник не повинен мати можливості перешкодити вашому черговому симетричному ходу.***

Задача 21.3 (6-8). Двоє по черзі ставлять слонів у клітинки шахової дошки так, що слони не б'ють один одного. (Колір слонів значення не має), програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. Шахова дошка симетрична відносно свого центру, тому, на перший погляд, другий гравець на кожен хід першого має симетричний хід. Але це не так, бо, якщо перший гравець ставить слона на одну з кліток головної діагоналі, то другий гравець симетричного ходу не має.

Щоб розв'язати задачу за допомогою симетричної стратегії, необхідно знайти симетрію, при якій попередній хід суперника не перешкоджає дотриманню обраної стратегії. Такою є симетрія відносно прямої, що розділяє четверту і п'яту горизонталі. Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і тому слони , поставлені на такі поля, не б'ють один одного. Отже, другий гравець виграє, якщо на кожен хід першого гравця відповідає ходом, симетричним відносно вказаної прямої. ■

Розглянемо ще таку задачу, розв'язання якої потребує додаткових методів.

Задача 21.4.(7-8). В коробці знаходиться 60 сірників. За один хід можна взяти будь-яку кількість від 1 до 5 сірників. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців, перший чи другий, може забезпечити собі виграш?

Розв'язання. Проаналізуємо кінцівку такої гри. кщо кількість сірників менша 5, то той гравець, чия черга ходити, закінчує гру. кщо кількість сірників більша 6 , то гра закінчиться через 2 або більше ходи. кщо ж кількість сірників рівна 6, то гравець, чий хід передував цій позиції, точно наступним своїм ходом закінчує гру (для нього він на хід суперника в k сірників бере $6-k$ сірників). Тобто така позиція є виграшною для його гравця. Очевидно, що позиції 12, 18, 24 (і т.д.) сірників для нього також є виграшними, бо таким же способом він від позиції "24 сірники" переходить до позиції "18 сірників", від "18" до "12".

Отже, початкова позиція виграшна для другого гравця, а його виграшною стратегією є доповнення ним ходів першого гравця до 6 сірників.■

Проаналізуємо цей розв'язок. Наші міркування при аналізі кінцівки гри привели до розгляду *класу виграшних позицій*, що характеризуються такими властивостями:

а) за один хід з однієї виграшної позиції не можна перейти до іншої виграшної позиції;

б) з будь-якої невиграшної позиції за один хід можна перейти до деякої виграшної (відмінної від попередньої виграшної) позиції.

Знаходження такого класу виграшних позицій для гри рівносильне її розв'язанню. До перемоги веде *стратегія – перехід до виграшних позицій*. При цьому, якщо початкова позиція виграшна, то виграє другий гравець, а в протилежному випадку виграє той, що починає. Пошук виграшних позицій в більшості випадків доцільно проводити за допомогою *аналізу кінцівки гри*, іноді до таких позицій можна прийти інтуїтивно.

Задача 21.5 (КМО-1975, 7). Два гравці пишуть $2k$-значне число, використовуючи цифри 1,2,3,4,5. Першу цифру пише перший, другу – другий, третю – перший і т. д. Чи може другий добитись того, щоб отримане число ділилось на 9, якщо перший хоче цьому завадити? Розглянути випадки, коли: а) $k=10$; б) $k=15$.

Розв'язання. Позначимо отримане число $N=\overline{a_1a_2\ldots a_{2k-1}a_{2k}}$. Це число ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9. Незалежно від ходів першого гравця другий гравець може добитись, що $a_{2n-1}+a_{2n}=6$ при будь-якому $n=1,2,\ldots,k$. Тоді у випадку, коли k ділиться на 3 $(k=3m, m\in N)$, сума цифр числа N рівна $6k=18m$, тобто N ділиться на 9. Тому для виграшу другому гравцю потрібно записувати $a_{2n}=6-a_{2n-1}$, $n=1,2,\ldots,2k-2$, а в кінці гри записати $a_{2k}\neq 6-a_{2k-1}$. Отже, у випадку коли k ділиться на 3, перемагає другий гравець.

Покажемо, що у інших випадках перемагає перший гравець. Нехай він записує число a_1, а потім на кожен хід другого гравця a_{2n} $(n=1,2,\ldots,k-1)$ відповідає ходом $a_{2n+1}=6-a_{2n}$. Тоді сума цифр отриманого числа при $k=3m+1$ рівна

$$a_1+6(k-1)+a_{2k}=18m+a_1+a_{2k}.$$

А при $k=3m+2$ сума цифр рівна

$$a_1+6(k-1)+a_{2k}=6(3m+1)+a_1+a_{2k}=18m+a_1+a_{2k}+6.$$

При $a_1=3$ маємо $4\le a_1+a_{2k}\le 8$ та $10\le a_1+a_{2k}+6\le 14$, а тому в обох цих випадках сума цифр числа N, не ділиться на 9, тобто перший гравець виграє.

Отже, при $k=10$ перемагає перший гравець, а при $k=15$ перемагає другий гравець.■

Задача 21.6 (УМО-1962, 10). Перший гравець задумав послідовність з невід'ємних цілих чисел $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$. Другий повинен відгадати цю послідовність так: він називає свою послідовність цілих чисел $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$, а перший говорить йому чому дорівнює сума $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\cdots a_nb_n$; потім другий гравець називає якусь іншу послідовність цілих чисел $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$, а перший повідомляє йому суму $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\ldots+a_nc_n$ і т.д. кі послідовності повинен назвати другий гравець, щоб за два ходи відгадати задуману послідовність?

Розв'язання. кщо знати кількість цифр кожного числа, то задача спрощується. Для визначення цього задамо таку послідовність $b_1=b_2=b_3=\ldots=b_n=1$. Тоді перший гравець повідомить суму $S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Очевидно, що кількість цифр кожного з даних чисел не перевищує кількості цифр числа S. Нехай S є k-цифрове число. Тоді задамо другу послідовність так: $c_1=1$, $c_2=10^k$, $c_3=10^{2k}$,…, $c_n=10^{k(n-1)}$. Оскільки кожне з чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ має не більш ніж k цифр, то останні k розрядів числа $a_1+a_2\cdot 10^k+a_3\cdot 10^{2k}+\ldots+a_n\cdot 10^{k(n-1)}$ дорівнюватимуть a_1, наступні k розрядів a_2 і т.д.■

Задача 21.7 (УМО-1982, 10). На площині дано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Двоє гравців грають у таку гру: по черзі сполучають яку-небудь пару з даних точок відрізком, причому так, щоб він не перетинався з проведеними раніше відрізками (але міг би мати з ними спільні кінці). Програє той, хто не може зробити хід, не порушивши правил гри. Першого разу виграв той, хто розпочинає гру. Довести, що і наступного разу виграє той, хто розпочинає гру.

Розв'язання. Оскільки під час гри в довільному з утворених многокутників можна проводити діагоналі, то після закінчення гри маємо деякий опуклий многокутник, розбитий на трикутники. Позначимо число цих трикутників через N. Нехай в середині многокутника знаходиться k точок. Тоді многокутник містить $m = n - k$ сторін. Кількість ходів під час гри дорівнює кількості проведених відрізків. Кожен відрізок, що є стороною многокутника, також є стороною точно одного трикутника, а всі інші відрізки є сторонами двох трикутників. Тому кількість ходів $x = \dfrac{3N+m}{2}$.

Кожна з k точок в середині многокутника є спільною вершиною деяких кутів цих трикутників, причому сума цих кутів рівна $360°$; сума внутрішніх кутів многокутника рівна $(m-2)\cdot 180°$. Тому сума кутів всіх трикутників рівна $180° \cdot N = 360° \cdot k + (m-2)\cdot 180°$, звідки $N = 2k + m - 2$,

$$x = \frac{6k+3m-6+m}{2} = 3k + 2m - 3 = 3k + 2(n-k) - 3 = 2n + k - 3.$$

Отже, кількість ходів залежить лише від взаємного розміщення точок, тому при непарному k виграє той, хто розпочинає гру. ▣

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 21.8 (КМО-1978, 6). На столі лежать 1978 сірників. Два хлопчики по черзі можуть брати 1 чи 2 сірники. Який хлопчик виграє і як він повинен для цього грати?

Задача 21.9 (6-8). На колі розставлено 20 точок. За хід дозволяється з'єднати будь-які дві з них відрізком, що не перетинає відрізків, які проведено раніше. Програє той, хто не може зробити хід.

Задача 21.10 (6-8). Двоє гравців по черзі ставлять конів в клітинки шахової дошки так, що коні не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити хід.

Задача 21.11 (6-8). Ромашка має: а) 12 пелюсток ; б) 11 пелюсток. За хід дозволяється відірвати або одну, або дві пелюстки, що ростуть поруч. Програє той, хто не може зробити хід.

Задача 21.12 (7-8). Гра починається з числа 1000. За хід дозволяється відняти від наявного будь-яке, яке не перевищує його, натуральне число, що є степенем двійки ($1 = 2^0$). Виграє той, хто одержить нуль.

Задача 21.13 (7-8). Гра починається з числа 1. За один хід дозволяється помножити наявне число на будь-яке натуральне число від 2 до 9. Виграє той, хто перший одержить число, більше 1000.

Задача 21.14 (6-8). Двоє по черзі ставлять хрестики і нулики в клітини дошки 9×9. Перший гравець ставить хрестик, другий – нулик. В кінці гри потрібно підрахувати, скільки є рядочків і стовпчиків, в яких хрестиків більше ніж нуликів -- це є очки, набрані першим гравцем. Кількість рядків і стовпчиків, де нуликів більше – очки другого гравця. Перемагає той, в кого більше очків.

Задача 21.15 (7-8). Є дві купи сірників: а) 101 сірник і 201 сірник; б) 100 сірників і 201 сірник. За хід дозволяється зменшити в одній з купок на число, що є дільником кількості сірників в іншій купці. Виграє той, після ходу якого сірників не залишається.

Задача 21.16 (6-8). Гра починається з числа 2. За хід дозволяється додати до наявного числа будь-яке натуральне, число менше за нього. Виграє той, хто одержить 1000.

Задача 21.17 (УМО-1977, 9). На координатній площині двоє гравців по черзі відмічають точки в смузі $\{(x,y): 0 < x < 1\}$ так, щоб жодні дві з них не стояли в одній вертикалі. Після того, як кожен відмітив по n точок, перший гравець сполучає точки лінією так, щоб дістати графік деякої неперервної на інтервалі $(0,1)$ функції. Перший гравець намагається відмічати точки, а потім сполучає їх так, щоб утворений графік перетинав вісь Ox якомога менше. Другий же навпаки намагається, щоб ця функція якомога частіше дорівнювала нулю. Скільки нулів матиме функція при правильній грі обох?

Задача 21.18 (УМО-1980, 7). У n коробках маємо $2n$ цукерок. Дівчинка і хлопчик по черзі беруть по цукерці, першою бере дівчинка. Довести, що хлопчик може брати цукерки так, щоб дві останні цукерки лежали в одній коробці.

Задача 21.19 (КМО-1962, 9). Два гравці по черзі витягують з трьох ящиків кульки. За один хід кожен гравець може витягнути з будь-якого ящика (але тільки з одного) довільну кількість кульок. Виграє той, хто забере останні кульки. к повинен діяти перший гравець, щоб виграти, якщо спочатку в ящиках знаходяться відповідно 1 кулька, 65 кульок, 117 кульок?

Задача 21.20 (КМО-1969, 9). Дівчинка і хлопчик по черзі проводять діагоналі в правильному 24-кутнику так, щоб вони не перетиналися між собою. Той, хто проводить таку діагональ останнім, виграє. к повинна грати дівчинка, яка починає гру, щоб виграти?

Задача 21.21 (КМО-1975, 6). Два хлопчика пишуть по черзі k - значне число: першу цифру пише перший, другу - другий, третю -перший і т.д. Чи може другий хлопець добитись того, щоб отримане число ділилось на 9, якщо перший старається йому завадити. Розглянути випадки: а) $k = 10$; б) $k = 13$.

Задача 21.22 (КМО-1981, 8). Вісім кружечків розфарбовано в чотири кольори: 2 червоних, 2 синіх, 2 білих і 2 чорних. Два гравці по черзі закріплюють кружечки до вершин куба. Перший виграє, якщо після закріплення всіх кружечків з деякої вершини куба можна провести ребро, до кінців якого закріплено кружечки одного кольору. Інакше виграє другий гравець. Хто виграє в цій грі?

Задача 21.23 (6-7). Двоє по черзі кладуть однакові монети на круглий стіл, причому так, щоб вони не накладались одна на одну. Програє той, хто не може зробити хід.

Задача 21.24 (8-9). В стрічку написано 1992 зірочки. Двоє гравців по черзі замінюють їх на цифри від 0 до 9. Чи може другий гравець добитися того, щоб кінцеве число ділилось на 1993?

Задача 21.25 ([4], с.44). Написано всі натуральні числа від 1 до 20. Двоє по черзі ставлять перед цими числами знак + чи – (знак можна ставити перед будь-яким числом , перед яким ще він не стоїть, в т. ч. і перед першим). Після того, як виставлено всі 20 знаків, обчислюється значення отриманого виразу. Перший хоче добитись, щоб модуль цього значення був найменшим, а другий - щоб найбільшим. Яке найбільше за модулем число може забезпечити другий гравець?

Задача 21.26 (КМО-1989, 9). Два гравці по черзі здійснюють ходи в такій грі: у клітинках нескінченного аркуша один гравець ставить хрестики, другий – нулики. Чи може другий гравець грати так, щоб перший ніколи не міг заповнити хрестиками якийсь квадрат 2×2?

Задача 21.27 (КМО-1990, 10). Троє грають в таку гру. Кожний по черзі кладе на круглий стіл п'ятикопійчані монети, монети можуть торкатися, але не повинні накладатися одна на одну. Програє той, чия монета не вміститься на столі. Довести, що перший та третій (за порядком ходів) гравці можуть так змовитись, що другий гравець завжди програватиме.

Задача 21.28 (5 СМО-1998, 10). Дано вираз

$$*x^{1998}+*x^{1997}+\ldots+*x+*.$$

Два гравці по черзі роблять свої ходи, кожного разу замінюючи у виразі одну довільну зірочку на ціле число, яке буде відповідним коефіцієнтом многочлена. Гра продовжується, поки всі коефіцієнти не будуть визначені. Якщо утворений при цьому многочлен буде мати хоча б один цілий корінь, то той, хто починав гру, програє, в протилежному випадку він виграє. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

Задача 21.29 (УМО-2000, 8). Двоє гравців по черзі виписують на стрічці паперу послідовно числа

$$*1, *2, *3, \ldots,$$

ставлячи замість зірочок знаки «+» або «–» за своїм вибором. Гравець вважається переможцем, якщо після його ходу у виписаному рядочку знайдуться декілька послідовно розташованих чисел, сума яких ділиться на

2000. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу, і якщо так, то хто саме – перший чи другий?

Вказівки та відповіді до задач

21.8. Відповідь: перший гравець. Перший хід – один сірник, виграшна стратегія – доповнення до 3. **21.9.** Відповідь: перший гравець. Перший хід – провести хорду, по обидва боки від якої розміщено по 9 точок, виграшна стратегія – симетричні ходи. **21.10.** Відповідь: другий гравець. Виграшна стратегія – центральна або осьова симетрія. **21.11.** Відповідь: другий гравець. Незалежно від першого ходу суперника він може залишити після свого ходу два, однакові за довжиною ланцюжки пелюсток, після чого буде застосовувати симетричну стратегію. **21.12.** Відповідь: перший гравець. Вказівка: виграшні позиції - числа, які діляться на 3. **21.13.** Відповідь: перший гравець. Вказівка: виграшні позиції – числа від 56 до 111 та числа від 4 до 6. **21.14.** Відповідь: перший гравець; перший хід він робить в центральну клітинку, потім робить симетричні ходи-відповіді. **21.15.** Відповідь: а) другий гравець; б) перший гравець. Вказівка: виграшні ті позиції, при яких в кожній купі непарна кількість сірників. **21.16.** Відповідь: перший гравець. Вказівка: виграшні позиції: 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3. **21.17.** Відповідь: n нулів. Вказівка: наведіть приклад такого результату гри та покажіть, що перший гравець може завадити тому, щоб кількість нулів була більшою. **21.18.** Вказівка: доведіть, що хлопчик може брати цукерки так, щоб після довільного його k-го ходу було не менше ніж k порожніх коробок. **21.19.** Відповідь: перший гравець. Вказівка: виграшні позиції: $(1;2n;2n+1)$ або $(0;m;m)$. **21.20.** Відповідь: потрібно провести найбільшу діагональ, а потім застосовувати симетричну стратегію. **21.21.** Відповідь: а) другий гравець; б) перший гравець. Вказівка: виграшна стратегія – доповнення до числа 9. **21.22.** Відповідь: другий гравець. Вказівка: використати центральну симетрію куба. **21.23.** Відповідь: виграє перший гравець. Вказівка: перший хід такий, щоб центр стола і центр монети співпадали, потім центрально-симетрична стратегія. **21.24.** Відповідь: ні, перший гравець завжди може йому завадити. Вказівка: розгляньте кінцівку гри. **21.25.** Відповідь: 12. **21.26.** Відповідь: так. Вказівка: розбийте площину на прямокутники 1×2. **21.27.** Вказівка: розгляньте повороти на $120°$ та на $240°$ відносно центра стола. **21.28.** Відповідь: перший. Першим ходом він замість вільного члена пише довільне ненульове ціле число, а останній коефіцієнт вибирає так, щоб жоден з дільників вільного члена не був коренем отриманого многочлена. **21.29.** Відповідь: перший гравець.

§ 22. Планіметричні задачі

За кілька тисячоліть свого розвитку геометрія розрослась настільки, що повним оволодінням її методів та знанням всіх її секретів похвалитись не може ніхто. Деякі математики навіть вважають цю науку великою грою за певними аксіоматичними правилами, виробленими Евклідом та його попередниками. Розв'язування геометричних задач є чудовим полігоном для вироблення логічного і послідовного мислення. Тому жодна математична олімпіада не обходиться без геометричних задач, причому формулювання більшості цих задач майже не відрізняються від задач з шкільних підручників. Але подібність формулювань задач не означає подібності їх розв'язків. Для повного оволодіння геометричними «секретами» бажано опрацювати книги хоча б з списку основної літератури.

При розв'язуванні планіметричних задач на доведення можуть додатково використовуватися теореми, які традиційно розглядаються на факультативних заняттях з математики.

Теорема 22.1. Якщо OA - відрізок дотичної (A - точка дотику), а B і C - точки перетину кола і січної OB , то

$$OA^2 = OB \cdot OC .$$

Теорема 22.2. Кут між січною та дотичною до кола дорівнює півріжниці величин дуг, розташованих між сторонами кута.

Теорема 22.3. Навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло тоді і тільки тоді, коли в ньому рівні суми протилежних кутів:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D \quad (=180^\circ).$$

Теорема 22.4. В чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли в ньому рівні суми довжин протилежних сторін:

$$AB + CD = BC + AD .$$

Теорема 22.5 (Чеви). Якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB трикутника ABC, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1 .$$

Теорема 22.6 (Менелая). Точки A_1, B_1, C_1, які лежать відповідно на сторонах BC, CA, AB (чи їх продовженнях) трикутника ABC , лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} = 1 .$$

(Тут, якщо $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ $\quad (\vec{b} \neq \vec{0})$, то прийнято $\dfrac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$).

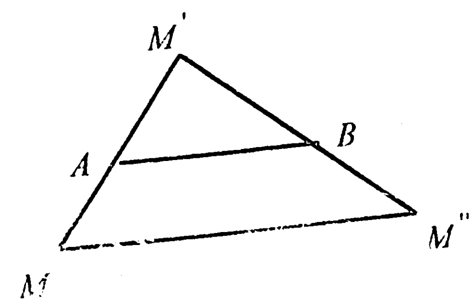
Теорема 22.7. Для того, щоб точка P лежала на колі, описаному навколо даного трикутника ABC , необхідно та достатньо, щоб основи перпендикулярів, опущених з точки P на сторони трикутника ABC , лежали на одній прямій (***пряма Сімсона***).

Теорема 22.8 (Паскаля). Якщо A, B, C, D, E, F - шість (послідовно розташованих) на даному колі точок, то точки перетину прямих AB і DE , BC і EF , CD і FA лежать на одній прямій.

Доведення теорем 22.5-22.8 можна знайти у [14] (списку основної літератури).

Часто на математичних олімпіадах учням пропонуються задачі, в яких розглядаються (чи потрібно використати) рухи та перетворення площини (простору). Для розв'язування цих задач потрібно знати властивості цих перетворень (центральної та осьової симетрій, паралельного перенесення, гомотетії), вміти будувати образи геометричних фігур при таких перетвореннях та їх композиціях. Також потрібно пам'ятати, що композиція двох (і більше) паралельних перенесень є паралельне перенесення, а композиція двох центральних симетрій є паралельне перенесення. Доведемо другий з цих фактів.

Нехай дано точки A і B – центри симетрій, M – довільна точка. При симетрії відносно точки A точка M переходить в точку M', а точка M' при симетрії відносно точки B переходить в точку M''. Тоді в трикутнику $MM'M''$ відрізок AB є середньою лінією, а тому $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$, тобто вектор $\overrightarrow{MM''}$ не залежить від точки M.



Мал. 22.1

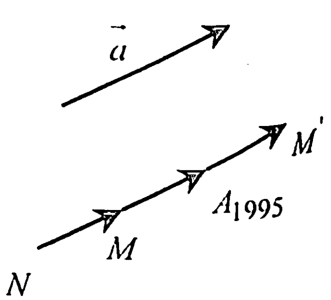
Отже, композиція двох

центральних симетрій є паралельне перенесення.

Розглянемо кілька задач на застосування перетворень площини.

Задача 22.1 (8-9). На площині дано 1995 точок: $A_1, A_2, \ldots, A_{1995}$. Відображення T є композицією центральних симетрій відносно цих точок: спочатку відносно точки A_1, потім відносно точки A_2 і т.д. Довести, що відображення T має нерухому точку.

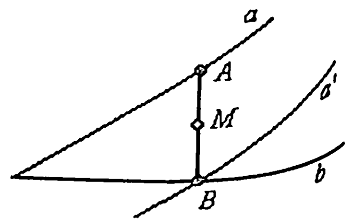
Розв'язання. Композиція перших 1994 центральних симетрій є композицією 997 паралельних перенесень, а тому відображення T є композицією паралельного перенесення на деякий вектор $\bar{a}$ та центральної симетрії відносно точки A_{1995}. Очевидно, що нерухомими точками такого відображення є точка M така, що $2\overrightarrow{MA_{1995}} = \vec{a}$, та точка N така, що $\overrightarrow{NA_{1995}} = \vec{a}$. ■



Мал. 22.2

Задача 22.2 (8-9). Через точку всередині кута проведіть відрізок з кінцями на сторонах кута так, щоб ця точка ділила відрізок пополам.

Розв'язання. Позначимо сторони кута через a і b. Побудуємо пряму a', симетричну a відносно даної точки M. Точку перетину a' і b позначимо B і продовжимо BM до перетину з півпрямою a. Точку перетину прямих a і BM позначимо A. Відрізок AB – шуканий (доведіть це самостійно). ■

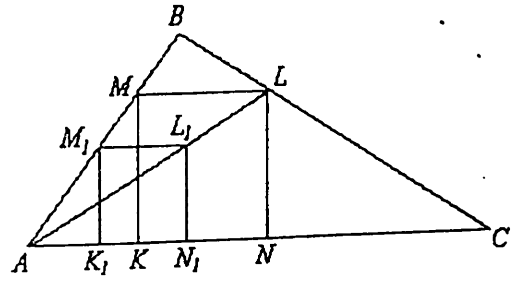


Мал. 22.3

Задача 22.3 (8-9). В даний трикутник вписати квадрат, вершини якого лежать на сторонах даного трикутника.

Розв'язання. Побудуємо квадрат $K_1M_1L_1N_1$, вершини якого K_1 і N_1 лежать на стороні AC, а вершина M_1 на стороні AB (мал. 22.4). Проведемо пряму AL_1 до перетину з BC в точці L. З точки L проведемо прямі, паралельні M_1L_1 та L_1N_1, які перетнуть сторони AB і AC

відповідно в точках M і N. З точки M опустимо перпендикуляр MK на AC. Очевидно, що чотирикутник $MLNK$ гомотетичний квадрату $M_1L_1N_1K_1$ (точка A – центр гомотетії), а тому є квадратом. ■



Мал. 22.4

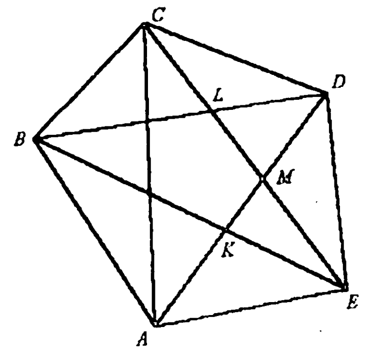
В багатох задачах основним засобом розв'язання є використання подібності трикутників.

Задача 22.4 (ОМО-1997, 10). Дано опуклий п'ятикутник, в якому кожна діагональ паралельна одній із сторін. Довести, що відношення довжини діагоналі до довжини відповідної паралельної сторони є одним і тим же для всіх п'яти пар таких відрізків. Знайти величину цього відношення.

Розв'язання. У даному п'ятикутнику $ABCDE$ (мал. 22.5) позначимо через L, M, K точки перетину відповідно BD і CE, CE і DA, DA і BE. Позначимо $x = \frac{BD}{AE}$.

Трикутники MLD і MEA подібні, тому $\frac{MD}{MA} = \frac{LD}{AE}$. Оскільки чотирикутник $BLEA$ – паралелограм, то $BL = AE$, звідки $LD = BD - BL = BD - AE$, а тому $\frac{MD}{MA} = \frac{BD - AE}{AE} = \frac{BD}{AE} - 1 = x - 1$.

Але трикутники MDE і MAC подібні, тому $\frac{MD}{MA} = \frac{ME}{MC} = \frac{DE}{AC}$. З подібності трикутників MKE і MDC маємо



Мал. 22.5

$$\frac{ME}{MC}=\frac{KE}{CD}=\frac{BE-BK}{CD}=\frac{BE}{CD}-1.$$ Отже, $$\frac{MD}{MA}=\frac{BD}{AE}-1=\frac{BE}{CD}-1,$$ звідки $\frac{BD}{AE}=\frac{BE}{CD}$.

Відмітимо, що доводити рівність інших відношень не обов'язково: фактично ми довели рівність двох відношень, в яких беруться діагоналі п'ятикутника, що виходять з однієї вершини. Враховуючи це, маємо $\frac{BD}{AE}=\frac{BE}{CD}=\frac{EC}{BA}=\frac{CA}{DE}=\frac{AD}{BC}$. Величину цього відношення знайдемо з уже отриманої рівності:

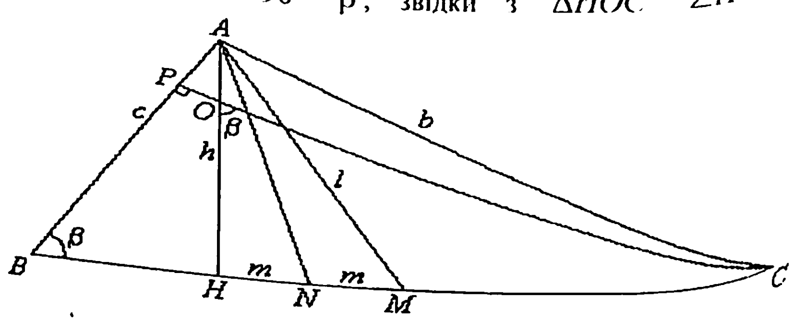
$$x-1=\frac{MD}{MA}=\frac{DE}{AC}=\frac{1}{x}.$$

З рівняння $x-1=\frac{1}{x}$ отримуємо $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

Часто планіметричні задачі розв'язуються за допомогою методу введення допоміжної невідомої величини.

Задача 22.5 (9-10). У трикутнику ABC проведено медіану AM_1, висоту AH та бісектрису AN. Відомо, що $AM=l$, $AH=h$ та $HN=NM$. Знайти відстань AO, де O – точка перетину висот трикутника ABC.

Розв'язання. Проведемо $CP\perp AB$. Позначимо $\angle ABC=\beta$. Тоді з ΔPBC маємо $\angle PCB=90°-\beta$, звідки з ΔHOC $\angle HOC=\beta$.



Мал. 22.6

Трикутники ABH і OCH подібні, тому $\frac{AH}{HC}=\frac{BH}{OH}$, звідки

$OH=\frac{BH\cdot HC}{AH}$, $AO=AH-OH=h-\frac{BH\cdot HC}{h}$. Позначимо $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $HN=NM=m$ (з ΔAHM маємо $m=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}$).

Оскільки $BH=\frac{a}{2}-2m$, $HC=\frac{a}{2}+2m$, тому маємо

$$AO=\frac{h^2-\left(\frac{a}{2}-2m\right)\left(\frac{a}{2}+2m\right)}{h}=\frac{h^2-\frac{a^2}{4}+4m^2}{h}=\frac{h^2-\frac{a^2}{4}+l^2-h^2}{h}=$$

$$=\frac{l^2-\frac{a^2}{4}}{h}=\frac{4l^2-a^2}{4h}.$$

З співвідношень у прямокутних трикутниках ABH, ACH та властивості бісектриси AN трикутника ABC отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} c^2=\left(\frac{a}{2}-2m\right)^2+h^2, \\ b^2=\left(\frac{a}{2}+2m\right)^2+h^2, \\ \dfrac{\frac{a}{2}-m}{\frac{a}{2}+m}=\dfrac{c}{b}. \end{cases}$$

Виключивши b і c, маємо рівняння

$$\frac{\left(\frac{a}{2}-2m\right)^2+h^2}{\left(\frac{a}{2}+2m\right)^2+h^2}=\frac{\left(\frac{a}{2}-m\right)^2}{\left(\frac{a}{2}+m\right)^2},$$

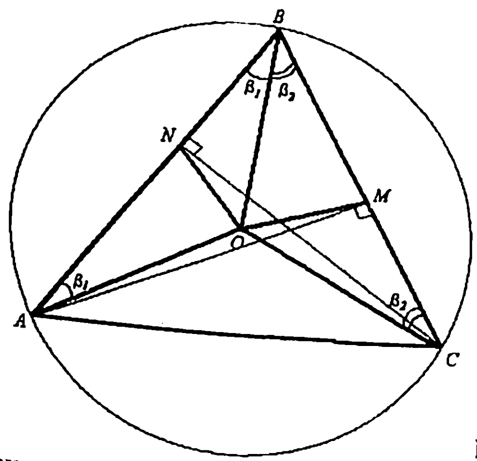
з якого після перетворень отримуємо. $a^2=4h^2+8m^2$, звідки

$$AO=\frac{4l^2-4h^2-8m^2}{4h}=\frac{l^2-h^2}{2h}.$$ ■

В багатьох задачах отримати ідею розв'язку допомагає підрахунок кутів.

Задача 22.6 (9-10). В гострокутному трикутнику ABC сторона AB більша ніж сторона BC, відрізки AM і CN є висотами, точка O – центр описаного кола. Кут ABC дорівнює β, а площа чотирикутника $NOMB$ рівна S. Знайдіть сторону AC.

Розв'язання. Позначимо $OA = OB = OC = R$, $\angle ABO = \angle BAO = \beta_1$, $\angle CBO = \angle BCO = \beta_2$. За властивістю вписаних кутів маємо $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\angle C$, звідки $2\angle C + 2\beta_1 = 180°$, $\beta_1 = 90° - \angle C$. Аналогічно $\beta_2 = 90° - \angle A$.



Мал. 22.7

Очевидно, що виразити AC безпосередньо через S та β складно, тому спробуємо виразити площу S чотирикутника $NOMB$ через AC та β.

Маємо $S = S_{\Delta NOB} + S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}R(BN \cdot \sin\beta_1 + BM \cdot \sin\beta_2)$. З трикутників BNC, BAM маємо $BN = BC \cdot \cos\beta$, $BM = AB \cdot \cos\beta$, тому, враховуючи, що $\sin\beta_1 = \cos\angle C$, $\sin\beta_2 = \cos\angle A$, отримуємо

$$S = \frac{1}{2}R(BC\cos\beta \cdot \cos\angle C + AB\cos\angle A) =$$

$$= \frac{1}{2}R\cos\beta(BC \cdot \cos\angle C + AB\cos\angle A).$$

Використавши теорему синусів $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AB}{\sin\angle C} = 2R$, отримуємо

$$S = \frac{1}{2}R(2R\sin\angle A \cdot \cos\angle C + 2R\sin\angle C \cdot \cos\angle A) =$$

$$= R^2\cos\beta \cdot \sin(\angle A + \angle C) = R^2\cos\beta \cdot \sin\beta = \frac{AC^2}{4\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Звідси отримуємо $AC = 2\sqrt{S \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$. ■

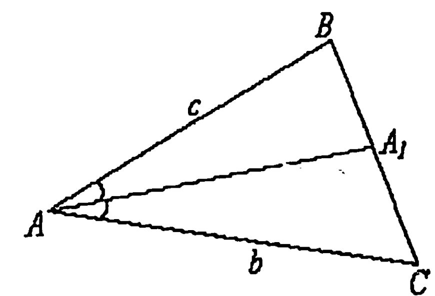
Досить часто застосовується метод площ.

Задача 22.7 (9). Довести, що в трикутнику ABC бісектрису AA_1 можна знайти за формулою

$$AA_1 = \frac{2\,b\,c\,\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

де $b = AC$, $c = AB$.

Розв'язання. Площа трикутника ABC рівна $S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A$.



Мал. 22.8

Також його площу можна знайти як суму площ трикутників ABA_1 та ACA_1 (мал. 22.8). Маємо

$$S = \frac{1}{2}c \cdot AA_1\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b \cdot AA_1\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}AA_1 \cdot (b+c)\sin\frac{A}{2}.$$

Прирівнявши площі, отримуємо:

$$AA_1 = \frac{\frac{1}{2}b\,c\,\sin A}{\frac{1}{2}(b+c)\,\sin\frac{A}{2}} = \frac{b\,c \cdot 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}}{(b+c)\,\sin\frac{A}{2}} = \frac{2\,b\,c\,\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$ ■

При розв'язуванні задач на доведення часто ефективним є використання векторів. Варто виділити теорему про єдиність розкладу довільного вектора за даними двома неколінеарними векторами.

Теорема 22.9. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то для довільного вектора $\vec{c}$ існує єдина пара дійсних чисел x, y таких, що $\vec{c} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$.

Задача 22.8 (9-10). У трикутнику ABC на сторонах AB та AC вибираються точки M та N відповідно так, що $AM = \frac{AB}{n}$, $AN = \frac{AC}{n+1}$. Довести, що при всіх натуральних n пряма MN проходить через одну і ту ж точку, та знайти її.

Розв'язання. Нехай O - деяка точка площини (відмінна від точки M), $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Тоді існують $x, y \in R$ такі, що $\overrightarrow{AO} = x\,\vec{b} + y\,\vec{c}$. Покажемо, що існує пара чисел (x, y) таких, що для всіх $n \in N$ вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MO}$ колінеарні (це рівносильно тому, що пряма MN проходить через точку O). Маємо

$$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{n}\vec{b} + x\,\vec{b} + y\,\vec{c} = \left(x - \frac{1}{n}\right)\vec{b} + y\,\vec{c},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{n}\vec{b} + \frac{1}{n+1}\vec{c}.$$

Вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MO}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{x - \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = \dfrac{y}{\frac{1}{n+1}}$,

тобто $-n\,x + 1 = (n+1)\,y$. Легко перевірити, що така рівність виконується при всіх $n \in N$ тоді і тільки тоді, коли $x = -1$, $y = 1$.

Тоді $\overrightarrow{AO} = \vec{c} - \vec{b}$, або $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$, тобто шукана точка O така, що чотирикутник $ABCO$ - паралелограм. ■

Звичайно, вміння розв'язувати задачі передбачає правильний вибір способу та засобів розв'язання. Тут найкраще допоможе досвід. Вибрати гіпотезу, яка приведе до правильного розв'язку геометричної задачі, в багатьох випадках допомагає якісний малюнок. Необхідність якісного виконання малюнків при розв'язуванні задач показує наступна відома задача-парадокс.

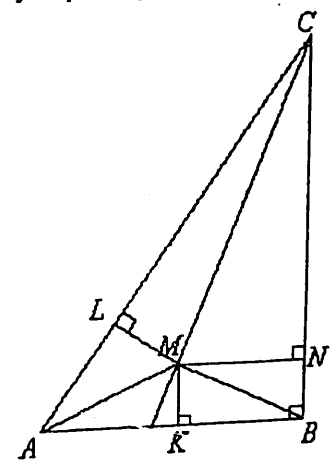
Задача 22.9. (8-9). Нехай M – точка перетину бісектриси кута C і серединного перпендикуляра до сторони AB прямокутного трикутника

ABC; K, L, N – основи перпендикулярів, опущених із M на сторони трикутника. Тоді трикутники AMK і BMK рівні за двома катетами, і тому $AM = BM$. Трикутники CLM і CNM рівні за гіпотенузою і двома кутами, тому $LM = MN$, $CL = CN$. Тоді трикутники ALM і MNB рівні за гіпотенузою і катетом, тому $AL = BN$. Тоді $AC = AL + LC = BN + NC = BC$, тобто у прямокутному трикутнику катет і гіпотенуза рівні?

Розв'язання. В цьому парадоксі немає жодної логічної помилки, крім невірного малюнка.

Продовжимо бісектрису CM до перетину з стороною AB в точці C_1. За властивостями бісектриси $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}$.

Оскільки $AC > CB$, то $\frac{AC_1}{C_1B} > 1$, тобто $AC_1 > C_1B$ і точка C_1 лежить між точками K і B, тобто серединний перпендикуляр до сторони AB і бісектриса кута C перетинаються зовні трикутника ABC. ■



Мал. 22.9

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 22.10. (8-9). Знайти на даній прямій точку M таку, що:
а) сума відстаней від M до даних двох точок мінімальна;
б) різниця відстаней від M до даних двох точок максимальна.

Задача 22.11 (8-9). На кожній стороні квадрата відмічено по точці. Доведіть, що периметр утвореного ними чотирикутника не менший від подвоєної довжини діагоналі квадрата.

Задача 22.12 (7-8). В квадраті $ABCD$ точка O є точкою перетину кола з центром A та радіусом AB і серединного перпендикуляра до BC, ближча до C. Знайдіть величину кута AOC.

Задача 22.13 (9). Доведіть, що якщо два опуклих чотирикутники розміщені так, що середини сторін у них співпадають, то їх площі рівні.

Задача 22.14 (8-9). В рівнобедреному трикутнику ABC із середини H основи BC опущено перпендикуляр HE на бічну сторону AC; O – середина HE. Доведіть, що прямі AO і BE перпендикулярні.

Задача 22.15 (8-9). Доведіть, що у довільному опуклому многокутнику сума будь-яких двох кутів більша за різницю будь-яких двох інших кутів.

Задача 22.16 (8-9). Дано кут і точка C всередині кута. Знайти на сторонах кута такі точки A і B, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

Задача 22.17 (7-8). Три кола однакового радіуса проходять через одну точку. Довести, що інші три точки їх перетину лежать на колі такого ж радіуса.

Задача 22.18 (4 СМО-1998, 9). Доведіть нерівність

$$\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\ge\frac{3}{r},$$

де h_a,h_b,h_c,r позначають відповідно висоти деякого трикутника та радіус вписаного в нього кола.

Задача 22.19 (4 СМО-1998, 11). На площині дано трикутник ABC та точка M, відмінна від точок A,B,C. Довести, що площа трикутника з вершинами – точками перетину медіан трикутників MAB, MAC, MBC не залежить від положення точки M (при фіксованому трикутнику ABC).

Задача 22.20 (8-9). Знайти кути трикутника, у якому центри вписаного і описаного кіл симетричні відносно однієї з сторін.

Задача 22.21 (9-10). На сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрано відповідно точки K та M так, що відрізки AK і CM ділять площу чотирикутника $ABCD$ пополам. Нехай P - точка перетину відрізків MK та BD. Знайти відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

Задача 22.22 (9-10). У рівносторонній трикутник із стороною a вписано коло. До кола проведено дотичну так, що її відрізок всередині трикутника дорівнює b. Знайти площу трикутника, що відтинається цією дотичною від даного.

Задача 22.23 (теорема Птолемея, 9). Навколо чотирикутника $ABCD$ описано коло. Довести, що

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$

Задача 22.24 (9). У трикутнику медіана, бісектриса та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на чотири рівні частини. Довести, що даний трикутник – прямокутний та знайти його кути.

Задача 22.25 (9). Основи трапеції мають довжини 3 см та 15 см. Чи може радіус кола, що вписане в трапецію, мати довжину 4 см?

Задача 22.26 (9-10). По нерухомому колу радіуса R, дотикаючись його зсередини, котиться без ковзання коло радіуса $r=\frac{R}{2}$. Знайти, яку лінію описує довільна точка внутрішнього кола.

Задача 22.27 (9). На колі, що описане навколо правильного трикутника зі стороною a, вибрано довільну точку. Знайти суму квадратів відстаней від цієї точки до вершин трикутника.

Задача 22.28 (8-9). Через точку перетину діагоналей трапеції проведену пряму, паралельну основам трапеції. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що розташований між бічними сторонами, якщо бічні сторони трапеції дорівнюють a та b.

Задача 22.29 (9-10). У трапецію, в якій менша основа дорівнює a, вписано коло. Одна з бічних сторін трапеції ділиться точкою дотику на відрізки, що дорівнюють m і n, починаючи від більшої основи. Визначити площу трапеції.

Задача 22.30 (9). Навколо кола радіуса 5 см описано рівнобічну трапецію. Відстань між точками дотику її бічних сторін дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

Задача 22.31 (9-10). У гострокутному трикутнику ABC висоти AA_1, BB_1,CC_1 перетинаються в точці H. Довести, що радіус описаного кола

$$R=\frac{AH^2\cdot A_1H}{2B_1H\cdot C_1H}.$$

Задача 22.32 (10). У трикутнику ABC - $\angle BAC=\alpha$, $BC=a$. Знайдіть відстань від середини сторони BC до прямої PQ, де P та Q - основи висот трикутника, що проведені до сторін BA і CA.

Задача 22.33 (9-10). У опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перпендикулярні і перетинаються в точці M. Довести, що проекції точки M на сторони чотирикутника лежать на одному колі.

Задача 22.34 (9). Чи існує трикутник з висотами $2,\sqrt{5}$ та $\sqrt{7}$?

Задача 22.35 (9-10). У трикутнику ABC проведено медіану AM, точка K лежить на AM, причому $AK:AM=1:5$. Через точки K і B проведена пряма, що перетинає AC в точці P. Знайти відношення площ трикутників AKP і ABC.

Задача 22.36 (9-10). У трапеції основи рівні a і b $(a<b)$. Діагоналі розбивають трапецію на чотири трикутники, площа найменшого з яких рівна S. Знайти площі трьох інших трикутників.

Задача 22.37 (9-10). Довжини (послідовних) сторін a, b, c, d опуклого чотирикутника такі, що його площа рівна $\frac{ab+cd}{2}$. Довести, що вершини чотирикутника лежать на одному колі.

Задача 22.38 (9-10). На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ відмітили точки M і K відповідно так, що $\angle BAM = \angle MAK$. Довести, що $BM + KD = AK$.

Задача 22.39 (9-10). Точка M лежить на діаметрі AB кола, хорда CD проходить через M і перетинає AB під кутом $45°$. Довести, що сума $CM^2 + DM^2$ не залежить від вибору точки M.

Задача 22.40 (9-10). Побудуйте трикутник за даними точками перетину з описаним колом медіани, бісектриси і висоти, що проведені з однієї вершини.

Задача 22.41 (9-10). Знайдіть геометричне місце точок перетину діагоналей прямокутників, що вписані в даний гострокутний трикутник.

Задача 22.42 (9-10). У трикутнику ABC на сторонах AB та AC вибираються точки M та N відповідно так, що $AM : MB = 3:1$, $AN : NC = 5:3$. Відрізки BN і CM перетинаються в точці O. Знайти відношення $BO : ON$.

Задача 22.43 (9-10). Трапеція з основами a і b описана навколо кола радіуса R. Довести, що $4R^2 \le ab$.

Задача 22.44 (9). Всередині трикутника взяли m точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Їх з'єднали одна з одною і з вершинами трикутника відрізками, що попарно не перетинаються. При цьому даний трикутник розбився на маленькі трикутники. Яка кількість маленьких трикутників могла при цьому отриматися?

Задача 22.45 (9-10). На площині дано 5000 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Довести, що можна побудувати 1000 п'ятикутників з вершинами в даних точках і які не перетинаються один з одним.

Задача 22.46 (9-10). З усіх чотирикутників з довжинами діагоналей 4 см та 6 см і кутом між ними $60°$ знайти чотирикутник з найменшим периметром.

Задача 22.47 (9-10). Знайти залежність між кутами трикутника, в якому одну з медіан з центра описаного кола видно під прямим кутом.

Задача 22.48 (5 СМО-1998, 8). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAC = \angle DBC = 30°, \angle BCA = 20°, \angle BDC = 70°$. Доведіть, що $ABCD$ - трапеція.

Задача 22.49 (5 СМО-1998, 10). Доведіть, що якщо всередині гострокутного трикутника ABC існує точка P така, що $\angle PBA = \angle PCB$; $\angle PBC = \angle PAC$, то $AB < AC\sqrt{2}$.

Задача 22.50 (УМО-2000, 10). Паралелограм $ABCD$ і ромб $AB_1C_1D_1$ мають спільний кут A. Відомо, що $BD \parallel CC_1$. Нехай P - точка перетину прямих AC і B_1C_1, а Q - точка перетину прямих AC_1 і CD. Доведіть, що кут AQP є прямим.

Задача 22.51 (УМО-2000, 9). Трикутник, утворений точками перетину медіан трикутника ABC з описаним навколо трикутника ABC колом, є рівностороннім. Доведіть, що трикутник ABC сам є рівностороннім.

Задача 22.52 (ОМО-2001, 9). На колі зафіксовано дві точки A, B, а третя точка C рухається по цьому колу. Знайдіть геометричне місце точок перетину медіан трикутника ABC.

Задача 22.53 (УМО-2001, 8). На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, в якому $\angle B = 20°$, вибрали відповідно точки D та E так, що $AD = BE = AC$. Знайдіть величину кута $\angle BDE$.

Задача 22.54 (9). У трикутнику медіана та висота, проведені з однієї вершини, ділять кут при даній вершині на три рівні частини. Довести, що даний трикутник - прямокутний та знайти його кути.

Задача 22.55 (9-10). З вершини C прямого кута трикутника ABC проведено висоту CK, а в трикутнику ACK проведено бісектрису CE. Пряма, яка паралельна CE і проходить через точку B, перетинає CK в точці F. Довести, що пряма EF ділить відрізок AC навпіл.

Задача 22.56 (9-10). Вписане (або зовнівписане) в трикутник ABC коло дотикається прямих BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Задача 22.57 (9-10). На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взято точки A_1, B_1, C_1 відповідно так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі A_1B_1 та A_1C_1 перетинають пряму, яка паралельна BC і проходить через вершину A, в точках C_2 і B_2 відповідно. Довести, що $AB_2 = AC_2$.

Задача 22.58 (12 РМО-1986, 11). Межею лісу є пряма l. На перпендикулярі AC до прямої l ($C \in l$) в точках A і ... ($AB = BC = a$) знаходяться заєць і вовк відповідно. Обидва вони бігають постійними швидкостями, причому швидкість зайця вдвічі більша за швидкість вовка. Вовк може зловити зайця в деякій точці, якщо в цю точку він прибіжить або раніше за зайця, або одночасно з ним. Заєць вибирає на прямій l точку D і біжить в ліс по відрізку AD. Як вибрати точку D, щоб вовк не зловив зайця на відрізку AD?

Задача 22.59 (10-11). На стороні AB трикутника ABC, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторони AC і BC в точках D і E відповідно. Пряма DE ділить площу трикутника ABC на дві рівні частини і утворює з прямою AB кут 15°. Знайти кути трикутника ABC.

Задача 22.60 (ОМО-1999, 11). Нехай точка P знаходиться в середині гострокутного ΔABC. На сторонах AC і BC відмітили такі точки M і K відповідно, що $\angle PMC = \angle PKC = 90^\circ$. Довести, що якщо т. M та K рівновіддалені від середини AB, то $\angle PBC = \angle PAC$.

Задача 22.61 ("задача Наполеона", 10-11). Довести, що центри правильних трикутників, побудованих на сторонах довільного трикутника зовні цього трикутника, є вершинами правильного трикутника.

Задача 22.62 (8-9). На площині дано точку P і дві паралельні прямі. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна з вершин якого співпадає з P, а дві інші лежать на цих прямих.

Задача 22.63 (9-10). На осі абсцис знайти точку M, модуль різниці відстаней від якої до точок $A(1; 6)$ і $B(5; -1)$ є найбільшим. Знайти цю відстань.

Задача 22.64 (10-11). Площа трикутника, вершинами якого є основи висот гострокутного трикутника ABC, в чотири рази менша від площі його площі. Довести, що трикутник ABC - рівносторонній.

Вказівки та відповіді до задач

22.10. Вказівка: розгляньте точку, симетричну одній з даних точок відносно даної прямої. **22.11.** Вказівка: "розвернувши" за допомогою осьових симетрій периметр чотирикутника, отримуємо ламану з таким же периметром, початок і кінець якої є протилежними вершинами квадрата з вдвічі більшою стороною. **22.12.** Відповідь: $\angle AOC = 135^\circ$. **22.13.** Вказівка: порівняйте площі цих чотирикутників з площею чотирикутника, вершинами якого є середини їх сторін. **22.14.** Вказівка: нехай M – середина EC. Тоді HM і BE паралельні. З подібності трикутників AHE і HCE випливає подібність трикутників AOE і HME, звідки неважко доводиться довести перпендикулярність AO і HM. **22.15.** Вказівка: достатньо довести, що сума трьох найменших кутів опуклого многокутника менша за його

найбільший кут. Припустивши супротивне, отримуємо протиріччя з формулою суми кутів опуклого многокутника. **22.16.** Вказівка: розгляньте точки M_1 та M_2, симетричні точці M відносно сторін кута. **22.17.** Вказівка: ці точки перетину утворюють трикутник, що дорівнює трикутнику з вершинами в центрах даних кіл. **22.18.** Вказівка: перетворіть нерівність до вигляду $\frac{S}{S-ar} + \frac{S}{s-br} + \frac{S}{S-cr} \ge 9$, яка рівносильна нерівності $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$, де $x = S-ar,\ y = S-br,\ z = S-cr$.

22.19. Вказівка: нехай O_1, O_2, O_3 - точки перетину медіан трикутників MAB, MAC, MBC. Використавши властивості медіан цих трикутників, покажіть, що трикутник $O_1O_2O_3$ гомотетичний з коефіцієнтом $k = \frac{2}{3}$ трикутнику з вершинами – серединами сторін трикутника ABC. **22.20.** Відповідь: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}$. **22.21.** Відповідь: 2. Вказівка: покажіть, що AC і MK паралельні. **22.22.** Відповідь: $\frac{a(a-2b)\sqrt{3}}{12}$. Вказівка: використайте властивість описаного чотирикутника. **22.23.** Вказівка: розгляньте на діагоналі BD точку M таку, що $\angle MCD = \angle BCA$ та використайте подібність трикутників ABC і DMC, BCM і ACD. **22.24.** Вказівка: опишіть навколо даного трикутника коло та продовжте бісектрису та висоту до перетину з цим колом. Відповідь: $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$. **22.25.** Відповідь: не може. **22.26.** Відповідь: кожна точка внутрішнього кола рухається по діаметру великого кола. **22.27.** Відповідь: $2a^2$. **22.28.** Відповідь: $\frac{2ab}{a+b}$. **22.29.** Відповідь: $a\frac{m+a-n}{a-n}\sqrt{mn}$. **22.30.** Відповідь: 125 кв. см. **22.31.** Вказівка: доведіть, що кола, які описані навколо трикутників ABC, ABH, ACH, BCH, мають один і той же радіус. Виразіть відрізки AH, A_1H, B_1H, C_1H через R та синуси кутів трикутника ABC. **22.32.** Відповідь: $\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **22.33.** Вказівка: скористайтесь ознакою вписаного чотирикутника.

властивістю вписаних кутів. **22.34.** Відповідь: існує. Вказівка: виразіть сторони через площу та висоти і скористайтесь нерівністю трикутника. **22.35.** Відповідь: $1:90$. Вказівка: проведіть $MN \parallel AC$ $(N \in BK)$ та знайдіть відношення $AP:AC$. **22.36.** Відповідь: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 S;\ \frac{b}{a}S;\ \frac{b}{a}S$. **22.38.** Вказівка: розгляньте поворот відносно точки A на 90°. **22.39.** Вказівка: розгляньте точки C_1 і D_1, симетричні точкам C і D відносно прямої AB та знайдіть кути трикутника C_1OD (O - центр кола). **22.41.** Відповідь: три відрізки, що з'єднують середини сторін з серединами відповідних висот. **22.42.** Відповідь: $BO:ON=8:9$. Вказівка: позначте $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\frac{BO}{BN}=x$, $\frac{CO}{CM}=y$. Тоді отримуємо $\overrightarrow{BO}=x\,\overrightarrow{BN}=-x\,\vec{b}+\frac{5x}{8}\vec{c}$, або $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\left(-1+\frac{3y}{4}\right)\vec{b}+(1-y)\vec{c}$. Звідси отримуємо $x=\frac{8}{17}$, $y=\frac{12}{17}$. **22.44.** Відповідь: $2m+1$. Вказівка: підрахуйте суму кутів отриманих трикутників. **22.45.** Вказівка: розгляньте пряму, яка не паралельна жодному відрізку, заданому довільними двома з даних точок. **22.46.** Відповідь: шуканий чотирикутник – паралелограм. Вказівка: доведіть більш загальне твердження. **22.47.** Відповідь: для гострих кутів трикутника виконується умова $2\alpha+\beta=90^\circ$. **22.48.** Вказівка: розгляньте центр E кола, описаного навколо трикутника ABC, тоді чотирикутник $ACDE$ вписаний. **22.49.** Вказівка: побудуйте на промені AC точку E таку, що $PA=PE$. **22.50.** Вказівка: нехай $AD\cap CC_1=R,\ CD\cap B_1C_1=Q$. Покажіть, що $PO=OC_1=OQ$. **22.51.** Вказівка: нехай P,Q,R - точки перетину медіан з описаним колом, O - центр кола. Використайте подібність трикутників AOC та PQR та властивість медіан трикутника. **22.52.** Відповідь: коло, гомотетичне з коефіцієнтом $k=\frac{1}{3}$ даному (з виколотими точками A, B) відносно середини відрізка AB. **22.53.** Відповідь: 20°. Вказівка: виберіть на стороні BC точки F і H так, щоб $\angle BDF=\angle HAC=20^\circ$. **22.54.** Вказівка: опишіть навколо даного

трикутника коло та продовжте медіану та висоту до перетину з цим колом. Відповідь: $30^\circ, 60^\circ$. **22.55.** Вказівка: нехай D - точка перетину EF і AC. Тоді за теоремою Менелая $\frac{AD}{CD}\cdot\frac{CF}{KF}\cdot\frac{KE}{AE}=1$, тому достатньо довести, що $\frac{CF}{KF}=\frac{AE}{KE}$. **22.56.** Вказівка: використайте теорему Чеви. **22.57.** Вказівка: використайте теорему Чеви та подібність трикутників AC_1B_2 і BC_1A_1, AB_1C_2 і CB_1A_1. **22.58.** Відповідь: $CD>\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **22.59.** Відповідь: $\angle C=45^\circ$, $\angle A$ і $\angle B$ рівні 75° і 60° (або навпаки). Вказівка: нехай $\angle A>\angle B$. Тоді маємо $\angle A=\angle B+15^\circ$. З подібності трикутників CED і CAB та відношення їх площ отримуємо $CE:CA=1:\sqrt{2}$. Застосувавши до трикутника AEC теорему Піфагора, отримуємо $CE=EA$, звідки $\angle C=45^\circ$. **22.60.** Вказівка: позначте середини AB, BP і AP відповідно через D, X і Y. Тоді $\angle PAC=\frac{1}{2}\angle PYM$, $\angle PBC=\frac{1}{2}\angle PXK$. Скористайтесь тим, що чотирикутник $DXPY$ паралелограм, та рівністю трикутників DMY та DKX. **22.61.** Вказівка: використовуючи теореми синусів та косинусів, виразіть сторони такого трикутника через кути та радіус описаного навколо даного трикутника кола. **22.62.** Вказівка: припустіть, що потрібний трикутник побудовано та розгляньте поворот відносно даної точки на 60°. **22.63.** Вказівка: розгляньте точку $B_1(5;1)$ та скористайтесь нерівністю трикутника. Відповідь: $M\left(\frac{29}{5};0\right)$, $\max(AM-BM)=\max(AM-B_1M)=AB_1=\sqrt{41}$. **22.64.** Вказівка: нехай A_1, B_1, C_1 - основи висот даного трикутника. Тоді $S_{AB_1C_1}+S_{BA_1C_1}+S_{CA_1B_1}=\frac{3}{4}S_{ABC}$. Виразивши через радіус описаного кола та кути даного трикутника ці площі, приходимо до рівності $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}$, звідки отримуємо $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

§ 23. Стереометричні задачі

Більшість обчислювальних стереометричних задач розв'язуються за допомогою методу послідовного розв'язування кількох стандартних планіметричних задач та, у випадку неможливості виділення жодного повністю визначеного трикутника, – за допомогою методу введення допоміжної невідомої величини. Часто допомагають допоміжні проекції, перерізи та розгортки многогранників. При розв'язуванні стереометричних задач на доведення можуть додатково використовуватися теореми, які традиційно розглядаються на факультативних заняттях з математики.

Теорема 23.1. Плоскі кути α, β, γ довільного тригранного кута задовільняють нерівності

$$\alpha < \beta + \gamma,\ \beta < \alpha + \gamma,\ \gamma < \alpha + \beta.$$

Теорема 23.2. Сума плоских кутів довільного опуклого многогранного кута менша за $360°$.

Теорема 23.3. Сума двогранних кутів опуклого n-гранного кута більша за $180°(n-2)$.

Теорема 23.4. Якщо α, β, γ - плоскі кути тригранного кута, а A, B, C - протилежні їм двогранні кути, то справедливі наступні співвідношення між ними:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$ - теорема синусів;

$$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A$$ - перша теорема косинусів;

$$\cos A = -\cos B\cdot\cos C + \sin B\cdot\sin C\cdot\cos\alpha$$ - друга теорема косинусів.

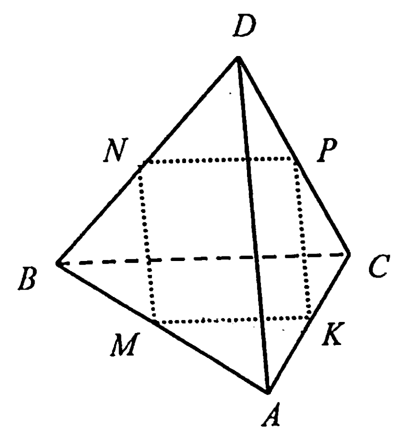
Теорема 23.5. Радіус кулі, вписаної у многогранник, дорівнює $r = \frac{3V}{S}$, де V - об'єм многогранника, S - площа його повної поверхні.

Теорема 23.6. Якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то навколо піраміди можна описати сферу, центр якої лежить на перпендикулярі до площини основи, проведеному через центр кола, описаного навколо основи піраміди.

Доведення цих тверджень можна знайти у [15] (списку основної літератури).

Задача 23.1 (10). Доведіть, що довільну трикутну піраміду можна перетнути площиною так, щоб в перерізі отримався ромб.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ - довільна піраміда. Позначимо через K, M, N, P відповідно середини ребер AC, AB, DB, DC. Тоді $KM = NP = \frac{BC}{2}$, $MN = PK = \frac{AD}{2}$ (як середні лінії відповідних трикутників), а $KMNP$ - паралелограм. Нехай $BC < AD$. Будемо переміщувати точки K, M, N, P по ребрам AC, AB, DB, DC у напрямку ребра BC так, щоб виконувалась умова $\frac{AK}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DB} = \frac{DP}{DC}$. При цьому чотирикутник $KMNP$ залишається паралелограмом, довжина сторін KM, NP збільшується, а довжина сторін MN, PK зменшується. Тому при деякому значенні відношення $\frac{AK}{AC}$ паралелограм $KMNP$ стане ромбом. ◙



Мал. 23.1

Задача 23.2 (11). Довести, що у опуклого многогранника всі грані не можуть бути шестикутниками.

Розв'язання. Припустимо, що такий многогранник існує. Нехай n - кількість його граней. Тоді сума плоских кутів кожної грані - 4π, а сума усіх плоских кутів многогранника - $4\pi n$. З іншого боку, число вершин многогранника не перевищує $\frac{6n}{3} = 2n$, а сума плоских кутів при вершині строго менша за 2π, а тому сума всіх плоских кутів має бути строго менша за $4\pi n$. Протиріччя. ■

Задача 23.3 (КМО-1981, 10). Дано тетраедр $ABCD$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - площини, паралельні парам протилежних ребер AB і CD, BD і AC, BC і AD відповідно. Відомо, що проекції тетраедра на площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є прямокутниками. Довести, що всі грані тетраедра конгруентні, а центри описаної та вписаної сфер співпадають.

Розв'язання. Очевидно, що проекції ребер AB і CD на площину α_1, яка їм паралельна, рівні самим ребрам та є діагоналями прямокутника. Отже, $AB = CD$. Аналогічно показуємо, що й інші пари протилежних ребер рівні: $BD = AC, BC = AD$. Звідси отримуємо рівність граней ABC, ABD, ACD, BCD.

Нехай точка O - центр описаної сфери. Тоді тетраедри $OABC, OABD, OACD, OBCD$ рівні між собою, а тому їх висоти, опущені з точки O також рівні. А це й означає, що точка O є центром вписаної сфери. ■

Задача 23.4 (УМО-1973, 10). Нехай $SABC$ - тригранний кут. Довести, що один з кутів, які утворюють між собою бісектриси плоских кутів при вершині S, є прямим, то два інші також прямі.

Розв'язання. Відкладемо на ребрах даного тригранного кута рівні відрізки SA, SB, SC та позначимо $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Тоді бісектриси плоских кутів при вершині S паралельні векторам $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$. За умовою два з цих векторів перпендикулярні (тобто їх скалярний добуток рівний нулю), довжини цих векторів рівні, а попарні скалярні добутки цих векторів також рівні:

$$\left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c})\right) = \left((\vec{b}+\vec{c}),(\vec{c}+\vec{a})\right) = \left((\vec{a}+\vec{b}),(\vec{c}+\vec{a})\right) =$$

$$= (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{b},\vec{c}) + (\vec{c},\vec{a}) + |\vec{a}|^2 .$$

Отже, вектори $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$, а значить і бісектриси плоских кутів при вершині S, попарно перпендикулярні. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 23.5 (УМО-1962, 10). В основі піраміди лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює $2a$. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Усі п'ять вершин піраміди лежать на циліндричній поверхні, вісь якої перпендикулярна до меншої діагоналі основи піраміди і проходить через її середину. Знайти всі ребра піраміди, якщо кут між віссю циліндричної поверхні та висотою піраміди дорівнює β.

Задача 23.6 (КМО-1936, 10). Навколо конуса, висота якого дорівнює 1 м, описана піраміда, основою якої є ромб з діагоналями 6 м і 8 м. Знайти радіуси куль, які вписані у тригранні кути при основі піраміди і дотикаються бічної поверхні конуса.

Задача 23.7 (КМО-1948, 9-10). Дано два мимобіжних відрізки AB і CD. Знайти геометричне місце середин відрізків, кінці яких лежать на даних відрізках.

Задача 23.8 (КМО-1954, 9). У трикутній піраміді провести плоскі перерізи так, щоб утворився паралелограм.

Задача 23.9 (КМО-1954, 10). У трикутній піраміді проведено плоскі перерізи паралельно її двом мимобіжним ребрам. Знайти переріз найбільшої площі.

Задача 23.10 (КМО-1957, 10). Знайти площину, ортогональна проекція на яку даного правильного тетраедра має найбільшу площу.

Задача 23.11 (КМО-1968, 10). Серед усіх можливих перерізів конуса площинами, які проходять через його вершину, знайти той, який має найбільшу площу.

Задача 23.12 (КМО-1981, 9). Дано тетраедр $ABCD$, точка O - точка перетину медіан грані ABC. Точка A переміщується так, що довжина OD не змінюється. Знайти множину можливих положень точки A.

Задача 23.13 (11). Доведіть, що у трикутній піраміді $ABCD$ ребра AD та BC взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Задача 23.14 (УМО-1961, 10). Центри n куль радіуса r, які мають спільну дотичну площину P, утворюють правильний многокутник із стороною $2r$. Обчислити радіус кулі, яка дотикається до цих куль і площини P.

Задача 23.15 (УМО-1964, 11). Висота посудини, яка має форму циліндра, дорівнює діаметру основи. У посудину вміщено прямий круговий конус, радіус і висота якого такі самі, як у циліндра, і n куль однакового радіуса. Кожна куля дотикається до поверхні посудини, поверхні конуса і д[illegible] куль. Чи видно кулі з посудини?

Задача 23.16 (УМО-1978, 10). Чи можна на поверхні правильного тетраедра з довжиною ребра 1 знайти чотири такі точки, щоб відстань по поверхні тетраедра від довільної точки на тетраедрі до найближчої з цих чотирьох точок не перевищувала 0,5?

Задача 23.17 (УМО-1979, 9). Для того, щоб висоти трикутної піраміди перетинались в одній точці, необхідно та достатньо, щоб суми квадратів протилежних ребер піраміди були рівні між собою. Довести це.

Задача 23.18 (УМО-1974, 9). Наповнену водою високу циліндричну склянку відхилено на кут α. При цьому витікає восьма частина всієї води. Коли склянку відхилити на кут 2α, то витікає ще четверта частина тієї води, що залишилась. Знайти кут α.

Задача 23.19 (УМО-1980, 10). На сфері радіуса R поміщено чотири кола однакового радіуса, що попарно дотикаються одне до одного. Знайти радіус цих кіл.

Задача 23.20 (УМО-1981, 10). На сфері одиничного радіуса розміщено $n \geq 2$ точок. Довести, що сума квадратів довжин усіх відрізків, які визначаються цими точками не перевищує n^2. Чи може ця сума дорівнювати n^2?

Задача 23.21 (УМО-1987, 10). Довести, що кожна площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер трикутної піраміди, перерізує її на дві однакові за об'смом частини.

Задача 23.22 (УМО-1990, 10). У правильному тетраедрі $ABCD$ на грані ABC взято таку точку M, що радіуси сфер, описаних навколо тетраедрів $DABM, DACM, DBCM$, однакові. Довести, що DM - висота тетраедра $ABCD$.

Задача 23.23 (УМО-1971, 10). На площині лежать шість однакових конусів, які послідовно дотикаються один до одного і мають спільну вершину. На конусах лежить куля, яка дотикається до їх поверхонь у точках, що лежать на колах основ. Знайти відношення об'єму кулі до суми об'ємів конусів.

Задача 23.24 (КМО-1985, 10). Чи можуть 4 площини розітнути простір на 11 частин?

Задача 23.25 (КМО-1986, 10). Чи можна на горизонтальній площині розмістити кулі (будь-яких радіусів) так, щоб їх перпендикулярні проекції накрили всю площину?

Задача 23.26 (КМО-1987, 10). У прямому круговому конусі з радіусом основи R і висотою h розташовані n куль однакового радіуса $r (n \geq 3)$. Кожна куля дотикається до основи конуса, до його бічної поверхні та до двох інших куль. Визначити r.

Задача 23.27 (КМО-1989, 10). Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого є перпендикулярні. Вершина піраміди проектується в точку O перетину діагоналей основи. Довести, що основи перпендикулярів, опущених з точки O на бічні грані піраміди, лежать на одному колі.

Задача 23.28 (КМО-1990, 11). Довести, що сума відстаней від будь-якої точки простору до вершин куба з ребром a не менша за $4\sqrt{3}a$.

Задача 23.29 (КМО-1991, 11). Прямі, які проведені перпендикулярно до граней трикутної піраміди через центри вписаних в них кіл, перетинаються в одній точці. Довести, що суми протилежних ребер такої піраміди рівні між собою.

Задача 23.30 (КМО-1992, 11). Основою піраміди є трикутник ABC, у якого $\angle ACB = 30°$, а довжина медіани, що виходить з вершини B, вдвічі менша сторони AC і дорівнює a. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Визначити площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через вершину B паралельно ребру AC і нахилена до площини основи під кутом β.

Задача 23.31 (КМО-1993, 11). У сферу радіуса R вписано два куби. Обчислити суму квадратів усіх відрізків, які сполучають вершини одного куба з вершинами іншого куба.

Задача 23.32 (УМО-1979, 10). Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є чотирикутник $ABCD$ з взаємно перпендикулярними діагоналями. Вершина піраміди проектується в точку O перетину діагоналей основи. З точки O опущено перпендикуляри на бічні грані. Довести, що основи цих перпендикулярів лежать на одному колі.

Задача 23.33 (5 СМО-1998, 11). У просторі дано два ромби $ABCD$ і $EFGH$. Відомо, що:

площини (ABC) і (EFG) перпендикулярні;

відрізок AE перпендикулярний до площин (ABC) і (EFG);

кути BAD і FEH рівні та однаково орієнтовані (один і той же поворот в просторі відносно прямої AE переводить B в D та F в H).

Нехай P і Q - середини відрізків BH і DF відповідно. Доведіть, що прямі PQ і CG - перпендикулярні.

Задача 23.34 (5 СМО-1998, 11). Нехай σ - сфера, описана навколо довільного тетраедра $ABCD$, $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ - сфери, що вписані в тригранні кути тетраедра з вершинами A, B, C, D відповідно дотикаються внутрішнім чином до σ в точках A_1, B_1, C_1, D_1 відповідно. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перетинаються в одній точці.

Задача 23.35 (УМО-2001, 11). Про тетраедр $ABCD$ відомо, що в ньому $\angle BAC + \angle BAD = \angle ABC + \angle ABD = 90^\circ$. Нехай O - це центр кола, описаного навколо трикутника ABC, M - середина ребра CD. Доведіть, що прямі AB і MO взаємно перпендикулярні.

Задача 23.36 (11). У піраміді $SABCD$, основою якої є паралелограм $ABCD$, через ребро AB проведено площину, яка перетинає ребра SC і SD в точках C_1 та D_1 відповідно. Відомо, що $SC_1 : SC = 1:3$. Знайти відношення об'єму піраміди $SABC_1D_1$ до об'єму піраміди $SABCD$.

Задача 23.37 (11). Основа піраміди – паралелограм, сторони якого рівні 16 см та 22 см. Відстань від вершини піраміди до центра основи рівна 4 см. Знайти довжини бічних ребер піраміди, якщо відомо, що вони виражаються послідовними непарними числами.

Задача 23.38 (7 СМО-2000, 10). Чи завжди із шести відрізків можна скласти тетраедр, якщо з будь-яких трьох із них можна скласти трикутник?

Вказівки та відповіді до задач

23.5. Відповідь: $a\sqrt{2+\mathrm{ctg}^2\alpha}, \dfrac{2a}{\sin 2\alpha}, a\sqrt{2+\mathrm{tg}^2\alpha}$. **23.6.** Відповідь: радіуси куль рівні 0,1875 м. **23.7.** Відповідь:множина точок паралелограма $KMNL$, вершини якого є серединами відрізків AC, AD, BC, BD. **23.8.** Відповідь: площина перерізу повинна бути паралельною довільній парі мимобіжних ребер. **23.9.** Відповідь: шуканий переріз піраміди $ABCD$ проходить через середини ребер AB, AC, BD, CD. **23.10.** Вказівка: використайте формулу площі чотирикутника $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$. Відповідь: площина, яка паралельна двом мимобіжним ребрам. В цьому випадку проекцією є квадрат з діагоналлю, рівною ребру тетраедра. **23.11.** Відповідь: якщо кут при вершині осьового перерізу не тупий, то найбільшу площу має осьовий переріз; якщо ж кут при вершині осьового перерізу тупий, то найбільшу площу має переріз, який перетинає основу конуса по прямій, що знаходиться на відстані $d = \sqrt{R^2 - \dfrac{L^2}{2}}$ від центра основи. **23.12.** Вказівка:

розгляньте гомотетію відносно точки K - середини відрізка BC. Відповідь: множина точок сфери $\omega(D_1, R = 3DO)$, де точка D_1 гомотетична точці D відносно точки K з коефіцієнтом $k = 3$ (крім точок сфери, які лежать в площині D_1BC). **23.13.** Вказівка: розгляньте некомпланарні вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ та використайте те, що $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. **23.14.** Відповідь: $R = \dfrac{r}{4\sin^2\dfrac{\pi}{n}}$. **23.15.** Відповідь: кулі видно з посудини при $n = 3,4$ та не видно при $n \geq 5$. **23.16.** Відповідь: можна. Наприклад, середини ребер AB, BC, DC, DA тетраедра $ABCD$. **23.18.** Відповідь: $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{11}}$. **23.19.** Вказівка: знайдіть відстані між центрами цих кіл. Відповідь: $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$. **23.20.** Вказівка. Нехай O - центр сфери, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ - дані точки. Виразіть вказану суму за допомогою векторів $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \ldots, \overrightarrow{OM_n}$. **23.23.** Відповідь: $\dfrac{45\sqrt{5}}{64}$. **23.24.** Відповідь: так. Вказівка: спочатку розгляньте 4 прямі, які ділять площину на 11 частин. **23.25.** Відповідь: так; наприклад, кулі радіусів $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$. **23.26.** Відповідь:

$$r = \frac{R\left(\sqrt{R^2+h^2} - R\right)\sin\dfrac{\pi}{n}}{\sqrt{R^2+h^2} - R + h\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

23.28. Вказівка: скористайтесь нерівністю трикутника, діагональ куба $\sqrt{3}a$. **23.30.** Відповідь: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(2 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)$. **23.31.** Відповідь: $128R^2$. **23.33.** Вказівка: нехай O_1, O_2 - точки перетину діагоналей ромбів $ABCD$ і $EFGH$. Тоді PO_1QO_2 - ромб. Потім розгляньте скалярний добуток векторів $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CG}$. **23.34.** Вказівка: Розгляньте гомотетії з центрами в точках A, B, C, D при яких відповідно сфери $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ переходять у сферу σ. При [illegible] використайте лему: композицію двох гомотетій з центрами O_1 і O_2 ($O_1 \ne O_2$) та коефіцієнтами k_1 і k_2 при умові $k_1 k_2 \ne 1$ є гомотетія з центром на прямій O_1O_2. **23.35.** Вказівка: розгляньте в площині ABC трикутник ABD_1, який рівний трикутнику ABD. **23.36.** Відповідь: 2:9. Вказівка: добудуйте дану та отриману піраміди до трикутних призм. **23.37.** Відповідь: 11 см, 13 см, 15 см, 17 см. Вказівка: скористайтесь формулою довжини медіани трикутника. **23.38.** Відповідь: ні, не завжди. Наприклад, п'ять відрізків довжиною 5 см та один відрізок довжиною 9 см.

§ 24. Послідовності

Функцію, визначену на множині натуральних чисел, називають ***послідовністю***, а значення цієї функції $f(n)$ називають ***членами послідовності*** і позначають a_n.

Числову послідовність вважають заданою, якщо задано її загальний член a_n. Загальний член послідовності a_n найчастіше задають за допомогою формули $a_n = f(n)$ або за допомогою ***рекурентних формул***, які виражають загальний член послідовності через попередні члени. Нагадаємо деякі добре відомі послідовності.

1. Арифметична прогресія. Формула загального члена:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

де a_1 - перший член, d - різниця прогресії. Рекурентна формула:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

2. Геометрична прогресія. Формула загального члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

де b_1 - перший член, q - знаменник прогресії. Рекурентна формула: $b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$.

3. Послідовність чисел Фібоначчі. Більш відоме її рекурентне задання:

$$a_1 = a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Менш відома формула її загального члена (формула Біне):

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Послідовність чисел $\{a_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо існує число $M > 0$, таке, що для всіх членів послідовності виконується оцінка $|a_n| \le M$. Послідовність чисел $\{a_n\}$ називається ***зростаючою***, якщо при всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується нерівність $a_{n+1} > a_n$. У випадках виконання нерівностей $a_{n+1} < a_n$, $a_{n+1} \ge a_n$, $a_{n+1} \le a_n$ послідовність чисел $\{a_n\}$ називається відповідно ***спадною, неспадною, незростаючою***.

Послідовність чисел називається ***періодичною***, якщо існує натуральне число k (***період послідовності***) таке, що для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$ виконується рівність $a_{n+k} = a_n$.

На олімпіадах, як правило, зустрічаються задачі, в яких потрібно встановити певні властивості членів послідовності або, знаючи рекурентне задання послідовності, знайти формулу її загального члена.

Задача 24.1 (УМО-1999, 9). Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ така, що

$$a_{a_n} + a_n = 2n$$

для всіх натуральних n. Довести, що всі $a_n = n$.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що члени послідовності попарно різні. Якщо $a_m = a_n$, то з рівностей

$$a_{a_m} + a_m = 2m, \; a_{a_n} + a_n = 2n, \quad a_{a_m} = a_{a_n}$$

отримуємо, що $m = n$.

Доведемо твердження задачі методом математичної індукції.

При $n = 1$ маємо $a_{a_1} + a_1 = 2$. Оскільки

$$a_1 \ge 1, \quad a_{a_1} \ge 1,$$

то отримуємо $a_1 = 1$.

Припустимо, що твердження задачі справедливе при всіх $n < k$ і доведемо його для $n = k$.

Якщо $a_k < k$, то отримуємо, що $a_k = m = a_m$, де m - деяке натуральне число, $m < k$. Протиріччя з тим, що члени послідовності попарно різні.

Якщо $a_k > k$, то $a_{a_k} < k$ (тому що $a_{a_k} + a_k = 2k$). Тоді $a_{a_k} = m = a_m$, де $m < k$. Але оскільки члени послідовності попарно різні, то маємо $a_k = m < k$. Протиріччя з тим, що $a_k > k$.

Отже, $a_k = k$. ■

Задача 24.2 (КМО-1979, 9). Послідовність $\{a_n\}$ не спадає, $a_0 = 0$. Відомо, що послідовність $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \ge 1)$ не зростає. Довести, що послідовність $c_n = \dfrac{a_n}{n}$ $(n \ge 1)$ також не зростає.

Розв'язання. Оскільки при $n \ge 1$ вірно $a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, а послідовність b_n не зростає, то

$$a_n \ge n \cdot b_n = n(a_n - a_{n-1}).$$

Звідси отримуємо

$$a_n \ge n \cdot a_n - n \cdot a_{n-1},\ n \cdot a_{n-1} \ge (n-1)a_n.$$

При $n \ge 2$ маємо

$$\frac{a_n}{n} \le \frac{a_{n-1}}{n-1},$$

тобто $c_n \le c_{n-1}$, що й потрібно було довести. ■

Задача 24.3 (9-10). Про послідовність $\{a_n\}$ дійсних чисел відомо, що

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$$

при $n \ge 1$. Знайти формулу загального члена послідовності.

Розв'язання. Якщо послідовності $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$ задовільняють умови $b_{n+2} = b_{n+1} + 3b_n, c_{n+2} = c_{n+1} + 3c_n$, то послідовність $\{x_n\}$, $x_n = p \cdot b_n + t \cdot c_n$ (p і t - деякі числа) задовільняє таку ж умову. Оскільки при достатньо великих n члени послідовності зростають подібно до членів геометричної прогресії, то загальний член a_n будемо шукати у вигляді $a_n = p \cdot b_n + t \cdot c_n$, де $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$ – геометричні прогресії, що

задовільняють умову $x_{n+2} = x_{n+1} + 3x_n$. Тоді знаменники цих прогресій задовільняють умову $q^2 = q + 3$, звідки

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2},\ q_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2},\ a_n = p \cdot \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} + t \cdot \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}.$$

З умов $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ отримуємо

$$\begin{cases} p + t = 1, \\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \cdot p + \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \cdot t = 2, \end{cases}$$

звідки знаходимо $p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\sqrt{13}}{26}$, $t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\sqrt{13}}{26}$. Отже,

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{13}}{26}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{13}}{26}\right)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}. ■$$

Задача 24.4 (УМО-1985, 10). У послідовності $x_1 = 1$, а кожне x_{n+1} дорівнює сумі цифр добутку числа x_n на дане натуральне число m. Довести, що при будь-якому m ця послідовність, починаючи з деякого місця, буде періодичною.

Розв'язання. Нехай число M записується цифрами $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$, тобто $M = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$. Нехай $S(M) = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0$ - сума його цифр.

Доведемо, що при достатньо великих k виконується нерівність $S(M) < \sqrt{M}$. Для цього достатньо довести, що $10(k+1) < \sqrt{10^k}$, або $k + 1 < 10^{\frac{k}{2}-1}$. При $k = 4$ маємо $5 < 10$, а при більших ця нерівність виконується внаслідок швидкого росту $10^{\frac{k}{2}-1}$. Отже, $S(M) < \sqrt{M}$ при всіх $M \ge 10^4$.

Доведемо тепер методом математичної індукції, що всі члени послідовності менші за $10^4 m$.

Маємо $x_1 = 1, x_{n+1} = S(x_n m)$

Якщо $x_n < 10^4$, то $x_{n+1} = S(x_n m) < x_n m < 10^4 m$.

Якщо ж $x_n \geq 10^4$, то

$$x_{n+1} = S(x_n m) < \sqrt{x_n m} < \sqrt{10^4 mm} = 10^2 m < 10^4 m.$$

Згідно з принципом математичної індукції, $x_n < 10^4 m$ для всіх n.

Оскільки члени послідовності – натуральні числа, то серед них обов'язково зустрінуться однакові: $x_{p+t} = x_p$. Тоді з правила побудови послідовності випливає, що $x_{n+t} = x_n$ для всіх $n \geq p$. ■

Задача 24.5 (УМО-1996, 11). Послідовність $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ дійсних чисел задовільняє умови: $a_0 = 1$, $a_{499} = 0$ і для всіх натуральних n має місце рівність $a_{n+1} = 2a_1 a_n - a_{n-1}$.

а) доведіть, що $|a_n| \leq 1$;

б) знайдіть a_{1996}.

Розв'язання. Якщо $a_1 > 1$, то $a_1 > a_0$, а для $k \geq 1$ маємо

$$a_{k+1} = 2a_1 a_k - a_{k-1} > 2a_k - a_{k-1} = a_k + (a_k - a_{k-1}),$$

тому з припущення, що $a_k > a_{k-1}$, випливає, що $a_{k+1} > a_k$. За принципом математичної індукції послідовність $\{a_n\}$ при $a_1 >$ монотонно зростає.

У випадку $a_1 < -1$ розглянемо послідовність чисел $b_n = (-1)^n a_n$, яка теж задовільняє співвідношення $b_{n+1} = 2b_1 b_n - b_{n-1}$. Оскільки $b_1 > 1$, то послідовність $\{b_n\}$ монотонно зростає, причому $b_n = |a_n|$.

Отже, в обох випадках $|a_{499}| > |a_1| = 1$. Тому з умови $a_{499} = 0$ випливає $|a_1| \leq 1$. Оскільки $|a_1| \leq 1$, то існує такий кут α, що $\cos\alpha = a_1$. Тоді за індукцією легко доводиться, що $a_n = \cos n\alpha$. Справді, для $n = 0$ та $n = 1$ це вірно. Тоді

$$a_{n+1} = 2a_1 a_n - a_{n-1} = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha =$$
$$\cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha = \cos(n+1)\alpha.$$

За умовою $a_{499} = \cos 499\alpha = 0$. Тому

$$a_{1996} = \cos 1996\alpha = 2\cos^2 998\alpha - 1 = 2(2\cos^2 499\alpha - 1)^2 - 1 = 1.$$ ■

Задача 24.6 (КМО-1986, 10). Послідовність задана рекурентно:

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = \left[\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}\right]$$

(тут $[x]$ - ціла частина числа x). Визначити a_{1986}.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну послідовність чисел $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, рекурентне задання якої:

$$b_1 = 1,\ b_{n+1} = b_n + \left[\sqrt{b_n}\right].$$

Тоді $a_n = b_n - b_{n-1}$.

Нехай b_n - перший член послідовності, що належить проміжку $I_k = \left[k^2, (k+1)^2\right)$, тобто $b_{n-1} < k^2, b_n \geq k^2$.

Якщо $b_n = k^2$, то $b_{n+1} = k^2 + k \in I_k$, $b_{n+2} = k^2 + 2k \in I_k$, але вже $b_{n+3} = k^2 + 3k = (k+1)^2 + k - 1 \in I_{k+1}$.

Якщо ж $b_n = k^2 + m$, то з умови $b_{n-1} < k^2$ маємо $b_n = k^2 + m = b_{n-1} + \left[\sqrt{b_{n-1}}\right] < k^2 + k$, звідки $m < k$. Тоді $b_{n+1} = k^2 + m + k < k^2 + 2k$, $b_{n+2} = k^2 + m + 2k = (k+1)^2 + m - 1$, тобто $b_{n+1} \in I_k$, $b_{n+2} \in I_{k+1}$.

Отже, якщо b_n є точним квадратом, то, починаючи з нього, на проміжку I_k знаходяться ще два члени послідовності b_n. Якщо ж число k^2 не є членом послідовності b_n, то то на проміжку I_k знаходяться два члени цієї послідовності, причому при переході від I_k до I_{k+1} різниця $b_n - k^2$ зменшується на 1.

Використовуючи ці "спостереження", дослідимо ріст послідовності a_m між двома послідовними моментами, коли b_n є точним квадратом. Маємо

$$b_n = k^2, b_{n+1} \in I_k, b_{n+2} \in I_k, b_{n+3} = (k+1)^2 + (k-1) \in I_{k+1},$$
$$b_{n+4} \in I_{k+1}, b_{n+5} = (k+2)^2 + (k-2) \in I_{k+2}, b_{n+6} \in I_{k+2},$$
$$b_{n+7} = (k+3)^2 + (k-3) \in I_{k+3}, b_{n+8} \in I_{k+3}, \ldots,$$
$$b_{n+1+2i} = (k+i)^2 + (k-i) \in I_{k+i}, b_{n+2+2i} \in I_{k+i}, \ldots$$

$b_{n+2k-1} = (2k-1)^2 + 1 \in I_{2k-1}, b_{n+2k} \in I_{2k-1}, b_{n+2k} = (2k)^2 \in I_{2k}$.

Оскільки $b_1 = 1 = 1^2$, то послідовно отримуємо $b_{1+2\cdot1+1} = b_4 = 2^2$, $b_{4+2\cdot2+1} = b_9 = 4^2$, $b_{9+2\cdot4+1} = b_{18} = 8^2$ і т.д.

Розглянемо послідовність індексів n_t, при яких $b_{n_t} = \left(2^t\right)^2 = 2^{2t}$.

Маємо $n_0 = 1$, $n_{t+1} = n_t + 2^{t+1} + 1$. Застосувавши цю формулу t разів, отримуємо

$$n_{t+1} = n_t + 2^{t+1} + 1 = 2^{t+1} + 1 + n_{t-1} + 2^t + 1 = \ldots =$$

$$= 2^{t+1} + 2^t + 2^{t-1} + \ldots + 2^1 + n_0 + t + 1 = 2^{t+2} + t.$$

Оскільки $n_9 = 2^{10} + 8 = 1032 < 1986 < n_{10}$, то отримуємо $b_{1032} = 2^{18}$, а при $1 \le t \le 2^9$ маємо $b_{1032+1+2t} = \left(2^9 + t\right)^2 + 2^9 - t$. Тоді $b_{1985} = b_{1032+1+2\cdot476} = \left(2^9 + 476\right)^2 + 2^9 - 476$, звідки

$$b_{1986} = b_{1985} + \left[\sqrt{b_{1985}}\right] = \left(2^9 + 476\right)^2 + 2^{10}.$$

Отже, $a_{1986} = b_{1986} - b_{1985} = 988$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 24.6 (8-9). Довести, що сума перших n чисел Фібоначчі

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1.$$

Задача 24.7 (9). Довести, що для будь-якого цілого m серед перших $\left(m^2 - 1\right)$ чисел Фібоначчі знайдеться хоча б одне, яке ділиться на m.

Задача 24.8 (8-9). Довести, що число Фібоначчі:

а) парне тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 3;

б) ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 4;

в) ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 6;

г) ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 5;

д) ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли його номер ділиться на 8.

Задача 24.9 (8-9). Довести, що сума перших n чисел Фібоначчі з непарними номерами

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}.$$

Задача 24.10 (9-10). Довести, що при будь-яких натуральних m і n для чисел Фібоначчі:

а) $a_{m+n} = a_{m+1} \cdot a_n + a_m \cdot a_{n-1}$;

б) a_{nm} ділиться на a_m.

Задача 24.11 (ОМО-1995, 10). Про дійсне число k та послідовність дійсних чисел $u_0, u_1, u_2, \ldots$ відомо, що

$$u_0 = 1,\ u_{1995} = 100,\ u_1 \cdot u_2 > 0, u_{n+1} \cdot u_{n-1} = k \cdot u_n$$

для всіх натуральних n. Знайти k.

Задача 24.12 (КМО-1979, 9). Нехай a_n - сума перших n простих чисел ($a_1 = 2$, $a_2 = 2+3$, $a_3 = 2+3+5$ і т.д.). Довести, що при довільному n відрізок $\left[a_n, a_{n+1}\right]$ містить квадрат натурального числа.

Задача 24.13 (11). Доведіть, що серед членів послідовності $\{a_n\}$, де $a_n = 2^n + n^2, (n = 1,2,3,\ldots)$ є безліч таких, що діляться на 100.

Задача 24.14 (УМО-1976, 9). Довести, що не існує такої монотонно зростаючої послідовності $n_1, n_2, n_3, \ldots$ натуральних цілих чисел, що $n_{kl} = n_k + n_l$ для всіх натуральних чисел k і l.

Задача 24.15 (4 СМО-1998, 9). Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ будується наступним чином: $a_1 = 1997$ та для кожного натурального n виконується $a_{n+1} = 19a_n + 96$. Чи можуть шість послідовних елементів цієї послідовності бути простими числами?

Задача 24.16 (2 СМО-1996, 10). Нехай у послідовності натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ кожне натуральне число зустрічається один раз. Довести, що існують такі натуральні i, j, k, що $i < j < k$ та

$$a_i + a_k = 2a_j.$$

Задача 24.17 (9-10). Знайти найбільшу можливу кількість частин площини, на які її розбивають n прямих.

Задача 24.18 (8-9). По кругу розписано не менше трьох різних дійсних чисел. Кожне з цих чисел дорівнює добутку двох чисел, що стоять по обидва боки від нього. Скільки чисел може бути виписано?

Задача 24.19 (9-10). В послідовності чисел $\{u_n\}$

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2 \quad (n \ge 1).$$

Чи ділиться u_{1986} на 7?

Задача 24.20 (9-10). Геометрична прогресія містить числа $3-2\sqrt{2}$ та $\sqrt{2}+1$. Чи може число 1 належати даній прогресії?

Задача 24.21 (10). Доведіть, що серед членів послідовності $\{a_n\}$, де

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \ (n = 1,2,3,\ldots)$$

є безліч точних квадратів.

Задача 24.22 (11). Доведіть, що серед членів послідовності $\{a_n\}$, де

$$a_n = \sin(2001n), \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

є безліч членів, модулі яких не перевищують $\frac{1}{2001}$.

Задача 24.23 (10-11). Доведіть, що послідовність $\{a_n\}$, де

$$a_n = n\sin n, \ (n \in N)$$

є необмеженою.

Задача 24.24 (3 СМО-1997, 11). Дано послідовність $a_n = 3^n - 2^n, n \ge 1$. Чи можна з неї деяким чином вибрати три різних числа, які були б трьома різними членами деякої геометричної прогресії?

Задача 24.25 (3 СМО-1997, 10). Нехай для всіх натуральних n

$$a_n = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right], \quad b_n = a_n - \left[\sqrt{a_n}\right].$$

Обчисліть суму $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + nb_n$, де через $[x]$ позначено цілу частину числа x.

Задача 24.26 (9 РМО-1983, 11). Послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$ задана рекурентно: $x_1 = 0, x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Довести, що всі члени послідовності, починаючи з другого, є натуральними числами.

Задача 24.27 (15 РМО-1989, 11). Послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентно $a_0 = \frac{1}{3}$ і $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Довести, що послідовність $\{a_n\}$ монотонна.

Вказівки та відповіді до задач

24.7. Вказівка: розгляньте всі можливі пари залишків при діленні на m чисел a_k, a_{k+1}. **24.8.** Вказівка: послідовність залишків при діленні на m членів послідовності Фібоначчі періодична. **24.10.** Вказівка: використайте метод математичної індукції по n. **24.11.** Відповідь: $k = 10$. Вказівка: знайдіть перші шість членів послідовності та доведіть, що послідовність періодична. **24.12.** Вказівка: достатньо довести, що при досить великих n виконується нерівність $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} \ge 1$, яка рівносильна нерівності $2\sqrt{a_n} \le a_{n+1} - a_n - 1 = p_{n+1} - 1$, де за p_n позначено n-е просте число. Для доведення цієї нерівності покажіть, що послідовність чисел $q_n = (p_n - 1)^2 - 4a_{n-1} = (p_n - 1)^2 - 4(p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1})$ є неспадною при досить великих n та знайдіть перші члени цієї послідовності. **24.13.** Вказівка: доведіть, що n парне та що серед чисел вигляду $4^{k-1} + k^2, k \in N$ є безліч чисел, які діляться на 25. **24.14.** Вказівка: $n_{2^{k+1}} - n_{2^k} = n_{2^k} + n_2 - n_{2^k} = n_2$. Протиріччя з тим, що послідовність монотонно зростає, а тому $n_{2^{k+1}} - n_{2^k} \ge 2^k$. **24.15.** Відповідь: ні. Вказівка: розгляньте залишки при діленні членів даної послідовності на 7, вони утворюють періодичну послідовність (період 6). **24.16.** Вказівка: існує таке j, що серед членів якої зустрічається число 0. **24.16.** Вказівка: існує таке j, що для всіх n таких, що $1 \le n < j$, виконується $a_n < a_j$. Тоді $2a_j - a_1 > a_j$, а тому для деякого $k > j$ маємо $a_k = 2a_j - a_1$. **24.17.** Відповідь: $1 + \frac{n(n+1)}{2}$. **24.18.** Відповідь: 6 чисел (більше чисел утворюватимуть періодичну послідовність). **24.19.** Вказівка: послідовність періодична. Відповідь: ні. **24.20.** Відповідь: так. **24.21.** Вказівка: якщо a_n точний квадрат, то a_{4n^2+4n} також точний квадрат. **24.22.** Вказівка: розгляньте раціональні наближення числа π. **24.23.** Вказівка: доведіть, що існують як завгодно великі $n, k \in N$ такі, що виконується нерівність $\left|n - \frac{\pi}{2} - \pi k\right| < \frac{\pi}{6}$. **24.24.** Відповідь: не можна. **24.25.** Вказівка: доведіть, що

$b_n = n$. Відповідь: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **24.26.** Вказівка: доведіть рівність $x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}$ для $n = 1, 2, \ldots$ **24.27.** Вказівка: покажіть, що $a_n = \cos\left(\frac{\arccos\frac{1}{3}}{2^n}\right)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

§ 25. Границя послідовності і функції

Число a називається ***границею послідовності*** чисел $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число N (яке залежить від ε), що для всіх $n > N$ виконується нерівність: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

або $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Геометрично це означає, що для будь-якого додатного числа ε всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, містяться в інтервалі $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ (який ще називають ε-околом точки a). Отже, існування границі послідовності характеризує розміщення на числовій прямій її членів.

Для доведення того, що послідовність має границю, можна в багатьох випадках користуватись наступним твердженням.

Теорема 25.1 (Вейєрштрасса). Зростаюча (або спадна) обмежена послідовність має границю.

Число a називається ***границею функції*** $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$ (яке залежить від ε), що для всіх x, які задовільняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Символічно це записують так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a,$$

або $f(x) \to a$ при $x \to x_0$. Геометрично це означає, що для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x з виколотого δ-околу точки x_0 значення функції $f(x)$ попадають в ε-окіл точки a.

Якщо $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функція $f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0. Всі елементарні функції, які вивчаються в середній школі, є неперервними на своїй області визначення.

При розв'язуванні багатьох олімпіадних задач на знаходження границь послідовностей використовується ***критерій існування границі функції в точці*** (доведення якого дається в курсі математичного аналізу).

Теорема 25.2. Для того, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границею число a, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності чисел $\{x_n\}$ такої, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, виконувалась рівність $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Задача 25.1 (КМО-1978, 10). Послідовність додатних чисел $\{a_n\}$ монотонно спадає. Відомо, що сума довільного скінченного числа її членів не перевищує одиниці. Довести, що $\lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n) = 0$.

Розв'язання. Позначимо $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Послідовність чисел $\{S_n\}$ зростає і є обмеженою, тому існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Позначимо $b_n = S_{2n} - S_n$. Маємо $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$, $b_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} \geq a_{2n} \cdot n \geq 0$, звідки $0 \leq 2n \cdot a_{2n} \leq 2b_n$, звідки $\lim_{n\to\infty} 2n \cdot a_{2n} = 0$.

Оскільки послідовність чисел a_n спадає, то

$$0 \leq (2n+1)a_{2n+1} < (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2n \cdot a_{2n} < 2 \cdot 2n \cdot a_{2n},$$

звідки $\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=0$. ■

Задача 25.2 (УМО-1977, 10). Послідовність $\{a_n\}$ така, що $a_1=1$,

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}$$

при $n\ge 1$. Довести, що:

а) послідовність $\{a_n\}$ необмежена;

б) $a_{250}<10$.

Розв'язання. Оскільки члени послідовності невід'ємні, то

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}-\frac{a_n}{2}>\sqrt{\frac{a_n^2}{4}}-\frac{a_n}{2}=0,$$

тобто послідовність $\{a_n\}$ зростає. Припустимо, що $\{a_n\}$ - обмежена. Тоді за теоремою Вейєрштрасса вона має границю $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$. Переходячи до границі в рівності $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\sqrt{\frac{a_n^2}{4}+\frac{1}{a_n}}$ та враховуючи неперервність функції $f(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x}}$ на проміжку $(0;\infty)$, отримуємо $a=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{a}}$, звідки $\frac{1}{a}=0$. Протиріччя. Отже, послідовність $\{a_n\}$ необмежена.

Використавши нерівність $\sqrt{1+h}<1+\frac{h}{2}$ $(h\ge -1)$, отримуємо

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{2}\sqrt{1+\frac{4}{a_n^3}}-\frac{a_n}{2}<\frac{a_n}{2}\left(1+\frac{2}{a_n^3}\right)-\frac{a_n}{2}=\frac{1}{a_n^2}.$$

Тому, якщо $a_n<k$, то

$$a_{n+k^2}=a_n+(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+\ldots+(a_{n+k^2}-a_{n+k^2-1})<$$

$$<a_n+\frac{1}{a_n^2}+\frac{1}{a_{n+1}^2}+\ldots+\frac{1}{a_{n+k^2-1}^2}<a_n+\frac{k^2}{a_n^2}<a_n+1<k+1.$$

Тому

$$a_{256}<a_{286}=a_{1+1+2^2+3^2+\ldots+9^2}<a_{1+1+2^2+\ldots+8^2}+1<\ldots<a_1+9=10.$$ ■

Задача 25.3. (УМО-1978, 10). Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ задано умовами:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1};\quad b_n=\frac{a_n}{2^n},\quad n\ge 1.$$

Довести, що послідовність $\{b_n\}$ має границю.

Розв'язання. Оскільки

$$b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_n+\sqrt{a_n^2+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{a_n^2+1}-a_n}{2^{n+1}}>0,$$

то послідовність $\{b_n\}$ – зростаюча.

Покажемо, що послідовність $\{b_n\}$ - обмежена. Маємо

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^{n+1}\left(\sqrt{a_n^2+1}+a_n\right)}<\frac{1}{2^{n+1}},$$

тому

$$b_{n+1}=(b_{n+1}-b_n)+(b_n-b_{n-1})+\ldots+(b_2-b_1)+b_1<$$

$$<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1.$$

За теоремою Вейєрштрасса послідовність $\{b_n\}$ має границю. ■

Задача 25.4. (УМО-1977, 9). Послідовність $\{a_n\}$ така, що

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=a_n^2-2$$

при $n>1$. Для яких a послідовність $\{a_n\}$ має границю?

Розв'язання. Припустимо, що послідовність $\{a_n\}$ має границею число b. Тоді, перейшовши до границі при $n\to\infty$ в рівності $a_{n+1}=a_n^2-2$, отримуємо, що $b^2=b-2$, звідки $b=2$ або $b=-1$. Розглянемо ці випадки окремо.

а) $b=2$. Тоді, поклавши в означенні границі $\varepsilon=1$, отримуємо, що існує номер N, такий, що для всіх $n>N$ виконується нерівність $|a_n-2|<1$. Тобто $1<a_n<3$. Але

$$|a_{n+1}-2|=\left|a_n^2-4\right|=|a_n-2|\cdot|a_n+2|,$$

тому при $n>N$ маємо

$$|a_{n+1}-2|\geq 3\cdot|a_n-2|,\quad |a_{n+2}-2|\geq 3\cdot|a_{n+1}-2|>3^2\cdot|a_n-2|,$$

і т.д., звідки отримуємо

$$1>|a_{n+k}-2|\geq 3^k\cdot|a_n-2|.$$

Оскільки 3^k може бути як завгодно великим, то для виконання цієї умови при всіх k необхідно, щоб $a_n=2$. Враховуючи рекурентну формулу, отримуємо, що починаючи з деякого номера, всі члени послідовності рівні 2. Оскільки

$$a_{n-1}=\pm\sqrt{2+a_n},$$

то знаходимо

$$a=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\pm\sqrt{2\pm1}}},$$

(тут має бути n двійок, розподіл знаків "+" і "–" може бути довільним).

б) $a=-1$. Тоді

$$|a_{n+1}+1|=\left|a_n^2-1\right|=|a_n+1|\cdot|a_n-1|.$$

Аналогічними міркуваннями отримуємо, що починаючи з деякого номера всі члени послідовності $a_n=-1$, а число a має вигляд:

$$a=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\pm\sqrt{2\pm1}}}.\ \blacksquare$$

Задача 25.5 (КМО-1978, 9). Послідовність $\{x_n\}$ задана співвідношеннями $x_1=5,\quad x_{n+1}=x_n^2-2,\quad n\geq1$. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Розв'язання. Маємо

$$x_{n+1}^2-4=(x_n-2)^2-4=x_n^2\cdot\left(x_n^2-4\right)=x_n^2\cdot x_{n-1}^2\cdot\left(x_{n-1}^2-4\right)=$$

$$\ldots=x_n^2\cdot x_{n-1}^2\cdot\ldots\cdot x_1^2\cdot\left(x_1^2-4\right)=(x_n\cdot x_{n-1}\cdot\ldots\cdot x_1)^2\cdot 21,$$

звідки

$$\frac{x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=\sqrt{21+\frac{4}{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2}}.$$

Оскільки всі $x_n>2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)^2}=0$, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=\sqrt{21}.\ \blacksquare$$

Задача 25.6 (10-11). Знайти всі неперервні на множині дійсних чисел функції $f(x)$, які задовільняють рівність $f(x)=f(\sin x)$ при всіх $x\in R$.

Розв'язання. Для значень змінної $x=\pi k\quad(k\in Z)$ маємо $f(x)=f(0)=c$.

Для значень змінної $x\neq\pi k\quad(k\in Z)$ розглянемо послідовності чисел $x_1=x,\ x_2=\sin x_1,\ldots,\ x_{n+1}=\sin x_n,\ldots$ та $z_n=|x_n|$. Послідовність чисел z_n є спадною та обмеженою, тому існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$.

Враховуючи неперервність функції $\sin x$ в точці z_0, за критерієм неперервності функції в точці при граничному переході в рівності $z_{n+1}=\sin z_n$ отримуємо рівняння

$$z_0=\sin z_0,$$

яке має єдиний корінь $z_0=0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Перейдемо до границі при $n\to\infty$ в рівності $f(x)=f(x_n)$. Враховуючи неперервність функції $f(x)$ та критерій неперервності функції в точці, отримуємо

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(0).$$

Отже, $f(x)=c$ для всіх $x\in R$. $\blacksquare$

Задача 25.7 (УМО-1980, 10). Позначимо через a_n найбільше значення функції $f(x)=\sin x-x^n$ на множині $[0,+\infty)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Розв'язання. Нехай x_n - точка максимуму даної функції. Похідна цієї функції $f'(x) = \cos x - nx^{n-1}$. Очевидно, що $f'(x) \le 0$ при $x \ge 1$, тобто дана функція спадає на $[1; +\infty)$, а тому $x_n \in (0; 1)$.

Для $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ при досить великих n виконуються такі нерівності

$$n x^{n-1} \le \frac{n}{2^{n-1}} < \cos\frac{1}{2} \le \cos x,$$

а тому $f'(x) > 0$ при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Отже, $x_n \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ при досить великих n.

При $x = x_n$ виконується умова $\cos x_n - nx_n^{n-1} = 0$. Враховуючи цю умову, обмеженість x_n та функції $\cos x$, неперервність функції $\sin x$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sin x_n - x_n^n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin x_n - \lim_{n\to\infty} x_n^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin x_n - \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cos x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Це рівносильно умові $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1$. З врахуванням того, що $x_n \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, для доведення цього достатньо показати, що для кожного $\varepsilon > 0$ при досить великих n виконується нерівність $\frac{1}{x_n} < 1 + \varepsilon$, або $\frac{1}{x_n^n} < (1+\varepsilon)^n$. Маємо:

$$\frac{1}{x_n^n} = \frac{n}{x_n \cos x_n} < \frac{2n}{\cos x_n} < \frac{2n}{\cos 1},$$

$$(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

Тому при досить великих n та таких, що $n > \frac{4}{\varepsilon^2 \cos 1} + 1$, виконуються нерівності

$$(1+\varepsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > \frac{2n}{\cos 1} > \frac{1}{x_n^n}.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ та $\lim_{n\to\infty} a_n = \sin 1$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 25.8 (УМО-1983, 10). Послідовність $\{a_n\}$ – обмежена і для кожного $n > 3$ виконується нерівність

$$a_n \le 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Довести, що ця послідовність – збіжна.

Задача 25.9 (УМО-1978, 9). Послідовність $\{x_n\}$ така, що $x_1 = 0$ і $x_{n+1} = x_n + (x_n - c)^2$ для $n \ge 1$. Для яких значень c вона має границю?

Задача 25.10 (УМО-1981, 10). Послідовність невід'ємних чисел $\{a_n\}$ така, що $a_{n+1}^{1981} \le a_n^{1980} \cdot a_{n-1}$ для всіх $n > 1$. Довести, що ця послідовність має границю.

Задача 25.11 (УМО-1982, 9). Обчислити для кожного α границю $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{[(n+\alpha)^2]} - n\right)$, де $[x]$ означає найбільше ціле число, що не перевищує x.

Задача 25.12 (УМО-1983, 9). На продовженні сторони AB трикутника ABC вибрано точку O таку, що $AO = 2AB$. Через точку O проведено пряму, яка перетинає сторони AC і BC відповідно в точках K і L. Знайти границю відношення площі трикутника OBL до площі чотирикутника $AKLB$, якщо довжина відрізка AK прямує до нуля.

Задача 25.13 (УМО-1981, 9). Послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ задано рекурентними співвідношеннями $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, $b_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Довести, що обидві послідовності мають границі і знайти їх.

Задача 25.14 (КМО-1980, 9). Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\ldots\cdot\sin n\alpha).$$

Задача 25.15 (КМО-1980, 10). Послідовність $\{a_n\}$ задана співвідношеннями $a_1=2$, $a_{n+1}=4-\dfrac{3}{a_n}$ при $n\geq 1$. Довести, що існує $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ і знайти її.

Задача 25.16 (КМО-1981, 9). Послідовність задана співвідношенням $a_1=2$, $a_2=1$ і $\dfrac{2}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{a_{n+1}}$, $n\geq 2$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Задача 25.17 (КМО-1982, 9). Послідовність $\{a_n\}$ задовільняє співвідношення $a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_{n-1}}{n(n+1)}$, при $(n\geq 2)$ і $a_1=a_2=1$. Довести, що ця послідовність має границю.

Задача 25.18 (УМО-1978, 9). Дано послідовність $\{a_n\}$. Побудуємо дві послідовності $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$: $b_n=2a_{n+1}+a_n$, $n\in N$, $c_n=a_{n+1}+2a_n$, $n\in N$.

а) Нехай послідовність $\{b_n\}$ – збіжна. Чи можна твердити, що послідовність $\{a_n\}$ також збіжна?

б) Нехай послідовність $\{c_n\}$ збіжна. Чи можна твердити, що послідовність $\{a_n\}$ також збіжна?

Задача 25.19 (10-11). Нехай $f(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ та $g(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ такі два многочлени, що при всіх дійсних значеннях змінної x виконуються нерівності $|f(x)|\leq 2000|g(x)|$ та $|g(x)|\leq 2000|f(x)|$. Довести, що $k=m$.

Задача 25.20 (УМО-1981, 10). Довести, що коли для всіх $x\in(-1;1)$ виконується нерівність $|a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\cdots+a_n\sin b_nx|\leq|\sin x|$, то $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leq 1$.

Задача 25.21 (IV ВУТЮМ-2001, 10-11). Дано дві послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, що задовільняють співвідношення $a_1=b_1=1$, $a_{n+1}=a_n+b_n$,

$b_{n+1}=a_n+a_{n+1}$, $n\geq 1$. Доведіть, що відношення $\dfrac{b_n}{a_n}$ є послідовними наближеннями числа $\sqrt{2}$.

Задача 25.22 (3 РМО-1976, 10). Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, якщо послідовність дійс-них чисел $\{x_n\}$ задана рекурентно: $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\left(\sqrt{2}\right)^{x_n}$ для $n\in N$.

Задача 25.23 (3 РМО-1976, 11). Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty}x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}=2.$$

Задача 25.24 (4 РМО-1978, 11). Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}\right\}$$

(тут $\{a\}$ - дробова частина числа a).

Вказівки та відповіді до задач

25.8. Вказівка: без обмеження загальності можна вважати, що всі члени даної послідовності – додатні. Тоді з нерівностей $a_{n+3}\leq 3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$ та $3a_{n+3}-3a_{n+2}+a_{n+1}\geq a_{n+4}>0$ отримуємо $a_{n+2}\geq\dfrac{4}{3}a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n$. Аналогічними міркуваннями отримуємо ланцюжок нерівностей

$$a_{n+2}\geq\frac{2k+2}{k+2}a_{n+1}-\frac{k+1}{k+3}a_n,$$

де $k=0,1,2,\ldots$. Перейшовши до границі при $k\to\infty$, отримуємо нерівність

$$a_{n+2}\geq 2a_{n+1}-a_n.$$

У випадку, коли дана послідовність спадає, твердження задачі випливає з теореми Вейєрштрасса. Якщо ж дана послідовність не спадає, то для деякого номера m виконується нерівність $a_{m+1}\geq a_m$, звідки отримуємо $a_{m+2}\geq a_{m+1}+a_{m+1}-a_m\geq a_{m+1}$, тобто дана послідовність є неспадною, починаючи з номера m. Тому твердження задачі і в цьому випадку випливає з теореми Вейєрштрасса.

25.9. Відповідь: при $c \in [0; 1]$ методом математичної індукції доводимо, що $0 \le x_n \le c$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$; при $c \notin [0; 1]$ послідовність є необмежена.

25.10. Вказівка: розгляньте допоміжну послідовність $\{b_n\}$, де $b_n = \max\{a_{n-1}, a_n\}$. Тоді $a_{n+1} \le b_n$, звідки отримуємо, що послідовність $\{b_n\}$ не зростає, а тому за теоремою Вейєрштрасса збіжна до деякого числа b. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. **25.11.** Відповідь: границя рівна α. **25.12.** Відповідь: границя рівна $\frac{1}{3}$. **25.13.** Вказівка: доведіть методом математичної індукції, що $1 \le a_n \le 2$, $a_{n+1} \ge a_n$, $1 \le b_n \le 2$, $b_{n+1} \ge b_n$. Для знаходження границь викорис-тайте рекурентні співвідношення. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$. **25.14.** Вказівка: покажіть, що для довільного α існує нескінченно багато $m \in N$ таких, що при деякому $k \in Z$ виконується $|m\alpha - \pi k| < \frac{\pi}{6}$. Відповідь: границя рівна 0. **25.15.** Вказівка: доведіть методом математичної індукції, що $1 < a_n < 3$, $a_{n+1} > a_n$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$. **25.16.** Вказівка: розгляньте допоміжну послідовність $\{b_n\}$, де $b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$. Отримуємо $a_n = \frac{2}{n+1}$. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. **25.17.** Вказівка: доведіть методом математичної індукції, що $a_n < \frac{5}{3}$. **25.18.** Відповідь: а) так, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}$; б) ні, наприклад $a_n = (-1)^n 2^n$.

25.19. Вказівка: розгляньте границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. **25.20.** Вказівка: перейдіть до границі при $x \to 0$ в нерівності

$$\frac{|a_1 \sin b_1 x + a_2 \sin b_2 x + \dots + a_n \sin b_n x|}{|x|} \le \frac{|\sin x|}{|x|}.$$

25.21. Вказівка: скористайтесь співвідношеннями $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{b_n}{a_n}}$,

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{b_n}{a_n} = \frac{2a_n^2 - b_n^2}{a_n a_{n+1}} = -\frac{2a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{a_n a_{n+1}} = \ldots = (-1)^{n-1} \frac{2a_1^2 - b_1^2}{a_n a_{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n a_{n+1}}$$

та нерівністю $1 \le \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \le 2$. **25.22.** Відповідь: 2. Вказівка: доведіть $x_n < x_{n+1} < 2$. **25.23.** Відповідь: $\sqrt{2}$. Вказівка: розгляньте послідовність чисел $\{x_n\}$, яка задана рекурентно: $a_1 = x, a_{n+1} = x^{a_n}$ для $n \in N$. За умовою $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, тому, враховуючи неперервність показникової функції, отримуємо рівняння $2 = x^2$. **25.24.** Відповідь: 1. Вказівка: $\left\{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}\right\} = 1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}$.

§ 26. Застосування похідної та інтеграла

Використання похідної часто виступає допоміжним засобом при розв'язуванні багатьох задач. При доведенні нерівностей часто достатньо за допомогою похідної дослідити певну функцію на монотонність, знайти її екстремуми.

Задача 26.1 (КМО-1981, 10). Довести, що для довільного x, що задовільняє умову $0 < x \le a < 1$, виконується нерівність

$$(1-x)^{1/x} \ge (1-a)^{1/a}.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна такій: $\frac{\ln(1-x)}{x} \ge \frac{\ln(1-a)}{a}$, для доведення якої достаньо показати, що функція $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}$ незростаючою на інтервалі $(0;1)$. Маємо

$$f'(x) = -\frac{1}{x(1-x)} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2(1-x)}\left(x + (1-x)\ln(1-x)\right).$$

Звідси отримуємо, що для виконання нерівності $f'(x) \le 0$ при $x \in (0;1)$ достатньо виконання нерівності $x + (1-x)\ln(1-x) \ge 0$, або після заміни $1 - x = z$ нерівності $z\ln z - z + 1 \ge 0$ при $z \in (0;1)$. Позначимо $g(z) = z\ln z - z + 1$. Маємо: $g'(z) = \ln z \le 0$ при $z \in (0;1]$, а тому функція $g(z)$ є незростаючою на півінтервалі $(0;1]$. Тому при $z \in (0;1]$ виконується $g(z) \ge g(1) = 0$. ■

Іноді за допомогою операції диференціювання деякої функції вдається отримати певні наслідки з умов даної задачі.

Задача 26.2 (ОМО-2000, 11). Знайти всі такі пари дійсних чисел a, b, що для будь-якого $x \in R$ справджуватиметься рівність

$$\sin 1999x + \sin ax + \sin bx = 0.$$

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sin 1999x + \sin ax + \sin bx$. Тоді з умови $f(x) \equiv 0$ отримуємо $f'(x) = 1999\cos 1999x + a\cos ax + b\cos bx \equiv 0$, $f'''(x) = -1999^3\cos 1999x - a^3\cos ax - b^3\cos bx \equiv 0$. Звідси при $x = 0$ отримуємо

$$\begin{cases} 1999 + a + b = 0, \\ 1999^3 + a^3 + b^3 = 0. \end{cases}$$

З цих рівнянь отримуємо відповідь: $a = -1999, b = 0$ або $a = 0, b = -1999$. ■

Часто потрібно встановити умови дотику графіків деяких функцій.

Задача 26.3 (10-11). Визначіть кількість дійсних коренів (залежно від параметра a) рівняння

$$|\ln x| = ax\ ?$$

Розв'язання. Порівнявши графіки функцій $f(x) = |\ln x|$ та $g(x) = ax$, отримуємо, що при $a < 0$ рівняння коренів немає, а при $a = 0$ рівняння має один корінь $x = 1$. Порівнюючи графіки цих функцій при $a > 0$, приходимо до необхідності знайти значення параметра a, при якому графіки цих функцій дотикаються.

Нехай x_0 - абсциса точки дотику, k - кутовий коефіцієнт дотичної. Графіки функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ дотикаються при виконанні умов:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ k = f'(x_0) = g'(x_0), \end{cases}$$

або в нашому випадку

$$\begin{cases} ax_0 = \ln x_0, \\ \dfrac{1}{x_0} = a. \end{cases}$$

Звідси отримуємо $x_0 = e$, $a = \frac{1}{e}$. Тому при $0 < a < \frac{1}{e}$ рівняння має три корені, при $a = \frac{1}{e}$ - два корені, при $a > \frac{1}{e}$ - один корінь. ■

Знаходження умов, яким задовільняє похідна шуканої функції, допомагає розв'язати деякі функціональні рівняння.

Задача 26.4 (10-11). Чи існує не рівна постійній функція f, яка визначена на множині всіх дійсних чисел, приймає дійсні значення і така, що при всіх $x, y \in R$ виконується нерівність $(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3$?

Розв'язання. Маємо $(f(x + \Delta x) - f(x))^2 \le |\Delta x|^3$, звідки $0 \le \left|\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right| \le \sqrt{\Delta x}$ при $\Delta x \ne 0$. Тому існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right| = |f'(x)| = 0.$$

Отже, функція $f(x)$ диференційовна, $f'(x) = 0$, $f(x) = c$. Відповідь: не існує. ■

Задача 26.5 (11). Знайдіть всі диференційовні функції $f : (0;+\infty) \to R$, які задовільняють рівнянню

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y).$$

Розв'язання. Легко бачити, що функція $f(x) \equiv 0$ є розв'язком рівняння. Будемо шукати розв'язки, відмінні від тотожного нуля. Тоді значення x_0 аргументу, при якому $f(x_0) \neq 0$. Поклавши $y = \frac{x_0}{x}$, маємо $f(x) \cdot f\left(\frac{x_0}{x}\right) = f(x_0) \neq 0$, звідки ясно, що $f(x) \neq 0$ при довільному $x \in (0;+\infty)$. Якщо ж замінити в рівнянні x та y на $\sqrt{x}$, отримуємо $f(x) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2$, так що $f(x)$ завжди строго додатна. Поклавши $x = y = 1$, отримуємо $f(1) = 1$.

Використаємо диференційовність шуканої функції. Маємо

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(x)}{h} = \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}}.$$

Але

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} = f'(1) = a.$$

Отже, для всіх $x > 0$ виконується рівність $f'(x) = \frac{a \cdot f(x)}{x}$, або

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln f(x)\right)' = \frac{a}{x},$$

звідки $\ln f(x) = a \ln x + b$. З умови $f(1) = 1$ отримуємо $b = 0$. Отже, $f(x) = x^a$.

Відповідь: $f(x) \equiv 0$ або $f(x) = x^a$ (де a - деяке дійсне число). ▩

Також при розв'язуванні олімпіадних задач можуть використовуватись теореми, які розглядаються, як правило, лише у факультативному курсі шкільної математики

Терема 26.1 (Ферма). Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$, в точці $x_0 \in (a;b)$ приймає найбільше (чи найменше) значення та диференційовна в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.

За допомогою теореми Ферма в курсі математичного аналізу доводяться теореми про середнє.

Терема 26.2 (Ролля). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна на інтервалі $(a;b)$ та задовільняє умову $f(a) = f(b)$. Тоді існує хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$ така, що

$$f'(x_0) = 0.$$

Часто використовується такий наслідок теореми Ролля: між двома коренями многочлена $f(x)$ існує хоча б один корінь похідної $f'(x)$ цього многочлена.

Терема 26.3 (Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Тоді існує хоча б одна точка $x_0 \in (a;b)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Задача 26.6 (УМО-1982, 10). Довести, що якщо $2a + 3b + 6c = 0$, то квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має принаймні один корінь на інтервалі $(0;1)$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$, то диференційовна функція $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$ в точках $x = 0$ та $x = 1$ приймає рівні значення: $f(0) = f(1) = 0$. Але $f(x)$ не є постійною, тому існує принаймні одна точка $x_0 \in (0;1)$, в якій функція $f(x)$ приймає найбільше (чи найменше) значення. Тоді за теоремою Ферма $f'(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. ▩

Одним з найбільш знайомих учням застосувань інтегралу є обчислення площі криволінійної трапеції. При розв'язуванні деяких задач також може використуватись означення інтегралу як границі інтегральних сум:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \text{ , де } \Delta x_k = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\,\Delta x_k.$$

Задача 26.7 (11). Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Розв'язання. Покажемо, що шукана границя є границею інтегральної суми деякої функції (а тому може бути обчислена як визначений інтеграл). Маємо

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \text{ , де } f(x)=\frac{1}{1+x},\ x\in[0;1],\ x_k=\frac{k}{n},\ \Delta x_k=\frac{1}{n}.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$ ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 26.8 (10-11). Довести, що для всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\sin x > x.$$

Задача 26.9 (10-11). Довести, що для всіх $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\operatorname{tg}x - 8\sin x + 3\sqrt{3} \ge 0.$$

Задача 26.10 (10-11). Знайти область значень функції

$$y = 2^{5\sin x + 12|\cos x|}.$$

Задача 26.11 (10-11). Функція $f(x)$ задана і має похідну на $[0;+\infty)$. Доведіть, що коли для всіх $x\in[0;+\infty)$ виконуються нерівності $|f(x)|\le 2$ та $f(x)\cdot f'(x)\ge\cos x$, то не існує $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Задача 26.12 (10-11). Довести, що для всіх $x>0$ і натуральних n виконується нерівність

$$x^n < \left(\frac{n}{e}\right)^n e^x.$$

Задача 26.13 (10-11). Яке з двох чисел більше: e^{π} чи π^{e} ?

Задача 26.14 (10-11). При якому натуральному n число $\frac{n^2}{(1{,}5)^n}$ є найбільшим?

Задача 26.15 (10-11). Знайти формулу n-го члена послідовності

$$a_n = 1 + 5\cdot 3^2 + 9\cdot 3^4 + \ldots + (4n-3)\cdot 3^{2n-2}.$$

Задача 26.16 (11). Знайдіть всі диференційовні функції $f:(0;+\infty)\to R$, які задовільняють рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Задача 26.17 (УМО-2000, 11). Чи існує функція f, що визначена на множині всіх дійсних чисел R, приймає дійсні значення та задовільняє три наступні умови:

1) f диференційовна на R;

2) $f'(2000) = 1$;

3) $(f(2000+x))^3 = (f(2000-x))^2 + x$ для всіх $x\in R$?

Задача 26.18 (КМО-1986, 9). Написати рівняння прямої, яка у двох точках дотикається до графіка функції $y = x(x-1)(x-2)(x-4)$.

Задача 26.19 (КМО-1986, 10). Нехай E - точка на стороні AD квадрата $ABCD$. Знайти такі точки M і K на сторонах AB і BC, щоб відрізки MK і EC були паралельні, а чотирикутник $MKCE$ мав найбільшу площу.

Задача 26.20 (КМО-1986, 10). Нехай E - точка на [illegible] AD квадрата $ABCD$. Відшукайте такі точки M і K на сторонах [illegible] щоб відрізки MK і EC були паралельні, а чотирикутник $MKCE$ мав найбільшу площу.

Задача 26.21. В сектор, градусна міра якого $60°$, впишіть прямокутник найбільшої площі (вершини прямокутника лежать на сторонах та дузі сектора).

Задача 26.22 (КМО-1990, 11). Після декількох операцій диференціювання та множення на $(1+x)$, виконаних в довільному порядку, многочлен x^8+x^7 перетворився на $ax+b$. Довести, що різниця $a-b$ ділиться на 49.

Задача 26.23 (КМО-1992, 10). На похилій площині, яка утворює з горизонтальною площиною кут α, кидається зі швидкістю ϑ камінь. В якому напрямку і під яким кутом до похилої площини треба кидати цей камінь, щоб дальність польоту була найбільшою?

Задача 26.24 (КМО-1992, 11). Визначити геометричне місце вершин парабол $y=-x^2+bx+c$, які дотикаються параболи $y=2x^2$.

Задача 26.25 (КМО-1977, 10). Знайти найменше можливе A таке, що для всіх квадратних тричленів $f(x)$, які задовільняють умову $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$, виконується нерівність $f'(0)\le A$.

Задача 26.26 (КМО-1980, 10). Функція $f(x)$ визначена та диференційовна на відрізку $[0;a]$, причому $f(0)=0$. Довести, що для довільного додатного b на інтервалі $(0;a)$ знайдеться таке x, що виконується

$$bf(x)=(a-x)f'(x).$$

Задача 26.27 (УМО-1977, 10). Знайти всі дійсні значення a, для яких функція

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^{3x}+a\cdot 2^{2x-1}+(1-a)\cdot 2^x$$

є монотонно зростаючою на всій числовій прямій.

Задача 26.28 (УМО-1983, 9). Многочлен четвертого степеня має чотири корені, попарні відстані між якими не менші 1. Доведіть, що похідна цього многочлена має хоча б два корені, відстань між якими також не менша 1.

Задача 26.29 (УМО-1977, 10). Довести, що до графіка функції $y=x^3$ можна провести три дотичні, які перетинаються в одній точці.

Задача 26.30 (УМО-1988, 9). Довести, що похідна $f'(x)$ функції

$$f(x)=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x-4}\cdot\frac{x-5}{x-6}\cdot\ldots\cdot\frac{x-1987}{x-1988}$$

від'ємна у всіх точках, в яких функція $f(x)$ визначена.

Задача 26.31 (УМО-1990, 11). Яке існує найбільше скінченне число точок дотику прямої і синусоїди?

Задача 26.32 (УМО-1985, 9). Многочлен n-го степеня $f(x)$ має n різних коренів $x_1,x_2,\ldots,x_n$, а многочлен $(n-1)$-го степеня $g(x)$ має $n-1$ різних коренів $y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}$, причому $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots<y_{n-1}<x_n$. Скільки коренів може мати многочлен $f(x)+g(x)$?

Задача 26.33 (УМО-1985, 10). Яку найбільшу кількість коренів може мати многочлен $P(x)=x^n+ax^2+bx+c$, де $n\ge 3, a,b,c$ - задані числа?

Задача 26.34 (УМО-1979, 9). Маємо фігуру, обмежену лініями $y=x^2+1$, $y=0, x=0, x=1$. У якій точці графіка $y=x^2+1$ потрібно провести дотичну, щоб вона відтинала від даної фігури трапецію найбільшої площі?

Задача 26.35 (УМО-1979, 10). Розглянемо послідовність $\{a_n\}$, утворену за таким законом:

$$a_0=1,\ a_{n+1}=\int_0^{a_n} c^{x^2}dx \quad (n\ge 0, c>0).$$

Вказати всі значення c, при яких послідовність $\{a_n\}$ має границю і обчислити цю границю.

Задача 26.36 (УМО-1980, 10). Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\pi x$ та $y=\arcsin 2x$.

Задача 26.37 (УМО-1981, 10). Довести, що площа фігури, обмеженої прямими $x=0, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ та графіком функції $y=\frac{\sin x}{x}$, не менша за 1.

Задача 26.38 (11). Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}.$$

Задача 26.39 (11). Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Задача 26.40 (10-11). Знайти найменшу відстань між точками A і B, які лежать відповідно на кривих $y = x^2 + 4$ та $y = \sqrt{x-4}$.

Задача 26.41 (10-11). Точки $A(-2;3)$, $B(-1;1)$, C, $D(2;7)$ у вказаному порядку лежать на параболі $y = ax^2 + bx + c$. Знайти координати точки C, якщо площа чотирикутника $ABCD$ найбільша.

Задача 26.42 (10-11). Розв'язати рівняння

$$x^3 + 4x + \sin 4x = 4^{-x} - 1.$$

Задача 26.43 (10-11). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 6^{|x|+y} - 2^{|x|+y} = 32; \\ x^2 + xy - y^2 = -4. \end{cases}$$

Задача 26.44 (10-11). Знайти геометричне місце точок, з яких можна провести взаємно перпендикулярні дотичні до параболи $y = (x-2)^2$.

Задача 26.45 (7 РМО-1980, 11). Розв'язати рівняння

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}.$$

Вказівки та відповіді до задач

26.10. Вказівка: позначте $t = \sin x$ та дослідіть при $t \in [-1;1]$ функцію $f(t) = 5t + 12\sqrt{1-t^2}$. Відповідь: $y \in \left[2^{-5}; 2^{13}\right]$. **26.11.** Вказівка: розгляньте функцію $F(x) = f^2(x) - 2\sin x$. **26.12.** Вказівка: спочатку доведіть нерівність $x \le e^{x-1}$. **26.13.** Вказівка: дослідіть на монотонність функцію $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Відповідь: перше. **26.14.** Вказівка: дослідіть на монотонність функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{(1{,}5)^x}$. Відповідь: при $n = 5$. **26.15.** Відповідь: $\dfrac{3^{2n}(8n-7)+7}{16}$. Вказівка: розв'язання задачі зводиться до знаходження значення в точці $x_0 = \sqrt{3}$ функції

$$f(x) = 1 + 5\cdot x^4 + 9\cdot x^8 + \ldots + (4n-3)\cdot x^{4n-4} =$$

$$= \left(x + x^5 + x^9 + \ldots + x^{4n-3}\right)' = \left(\frac{x^{4n+1} - x}{x^4 - 1}\right)'.$$

26.16. Відповідь: $f(x) \equiv 0$ або $f(x) = a\ln x$. **26.17.** Відповідь: не існує. **26.18.** Відповідь: $y = -\dfrac{15}{8}x - \dfrac{49}{64}$. **26.19.** Вказівка. Нехай $AB = a$, $AE = p$, $AM = x \in [0;a)$. Тоді $S(x) = px + \dfrac{a-p}{2}(a-x)^2$. Відповідь: при $0 < p \le \dfrac{2a}{3}$ $AM = \dfrac{(2a-3p)a}{2(a-p)}$, при $\dfrac{2a}{3} \le p < a$ – $M = A$. **26.20.** Вказівка: позначте $AM = x$ та дослідіть функцію $S_{MKCE} = S(x)$. Відповідь: а) $AM = AB\dfrac{2AB - 3AE}{2ED}$ при $AE \le \dfrac{2}{3}AB$; б) $M = A$ при $\dfrac{2}{3}AB \le AE < AB$. **26.21.** Відповідь: це прямокутник, одна з сторін якого лежить на стороні сектора та одна з вершин якого є серединою дуги сектора; $S_{\max} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}$, де R - радіус сектора. Вказівка: потрібно розглянути також випадок симетричного розміщення прямокутника всередині сектора (вісь симетрії сектора є вісс[illegible] симетрії прямокутника). Отримуємо, що найбільша з площ вписаних та[illegible] способом прямокутників $S = R^2(2-\sqrt{3}) < S_{\max} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{6}$. **26.22.** Вказівка: зробіть підстановку $t = 1 + x$. **26.23.** Відповідь: площина траєкторії польоту перпендикулярна до лінії перетину горизонтальної і похилої площин; під кутом $\varphi = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$. **26.24.** Відповідь: шукані параболи мають рівняння вигляду $y = -x^2 + bx - \dfrac{b^2}{12}$, а їх вершини лежать на параболі $y = \dfrac{2}{3}x^2$. **26.25.** Вказівка: розгляньте значення функції

$f(x)=ax^2+bx+c$ в точках $0;\frac{1}{2};1$. Відповідь: $A=8$. **26.26.** Вказівка: розгляньте функцію $g(x)=(a-x)^b f(x)$ та застосуйте до неї теорему Ферма. **26.27.** Відповідь: при $a\in\left[-2(1+\sqrt{2});1\right]$. **26.28.** Вказівка: скористайтесь теоремою Ролля. **26.29.** Відповідь: множиною таких точок є множина $\left\{(x;y): y\cdot(y-x^3)<0\right\}$. **26.30.** Вказівка: покажіть, що на кожному з проміжків $(2k;2k+1]$, $k=1,2,\ldots,993$ дана функція є добутком додатних спадних функцій, а на кожному з проміжків $[2k-1;2k)$, $k=1,2,\ldots,993$ функція $-f(x)=\frac{x-1}{1988-x}\cdot\frac{x-3}{x-2}\cdot\frac{x-5}{x-4}\cdot\ldots\cdot\frac{x-1987}{x-1986}$ є добутком додатних зростаючих функцій. **26.31.** Відповідь: 2. Вказівка: пряма $y=ax+b$ та синусоїда $y=\sin x$ дотикаються в точці з абсцисою x_0 тоді і тільки тоді, коли при $x=x_0$ рівні значення цих функцій та їх похідних. **26.32.** Відповідь: n. Вказівка: розгляньте функцію $\frac{f(x)}{g(x)}$, при умовах задачі дане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{f(x)}{g(x)}=-1$. **26.33.** Відповідь: 4 при $n\geq 4$ та 3 при $n=3$. Вказівка: скористайтесь наслідком з теореми Ролля. **26.34.** Відповідь: у точці $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. **26.35.** Вказівка: скористайтесь ознакою Вейєрштраса збіжності послідовності. Відповідь: при $0<c<1$ – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, при $c=1$ – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, при $c>1$ – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. **26.36.** Вказівка: розгляньте графіки функцій $y=\frac{x}{\pi}$ та $y=\frac{\sin x}{2}$, які є оберненими до даних. Відповідь: $S=1-\frac{\pi}{4}$. **26.37.** Вказівка: скористайтесь нерівністю $\frac{\sin x}{x}>\cos x$ при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$. **26.38.** Відповідь: $\frac{1}{k+1}$. **26.39.** Відповідь: $\frac{2}{\pi}$. **26.40.** Відповідь: $\frac{15\sqrt{2}}{4}$. Вказівка:

права частина кривої $y=x^2+4$ та крива $y=\sqrt{x-4}$ симетричні відносно прямої $y=x$. **26.41.** Відповідь: $C\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$. Вказівка: дотична до параболи у точці C паралельна до прямої BD, рівняння параболи – $y=x^2+x+1$. **26.42.** Відповідь: $x=0$. **26.43.** Відповідь: $x_1=0$, $y_1=2$ та $x_2=6$, $y_2=-4$. Вказівка: дослідіть функцію $f(t)=6^t-2^t$. Маємо $f(t)<0$ при $t<0$, а на проміжку $[0;+\infty)$ функція $f(t)$ зростає. Враховуючи це, отримуємо, що $t=2$ - єдиний корінь рівняння $6^t-2^t=2$, тобто $|x|+y=2$. **26.44.** Відповідь: пряма $y=-0,25$. **26.45.** Відповідь: $x=0$.

§ 27. Задачі з параметрами

В останній час при проведенні математичних олімпіад (особливо на олімпіадах, які проводяться вищими навчальними закладами) часто пропонуються задачі з параметрами.

При розв'язуванні задач з параметром потрібно пам'ятати наступне:

при різних значеннях параметра задача може розв'язуватись по-різному;

при розв'язуванні нерівностей з параметром хід розв'язку може залежати від взаємного розміщення коренів відповідного рівняння;

графічний метод (тобто аналіз властивостей функцій за допомогою зображення їх графіків при різних значеннях параметра) дозволяє полегшити аналітичні викладки.

Задача 27.1 (11). З якими основами a існують числа x, що дорівнюють своєму логарифму (тобто виконується умова $x=\log_a x$)?

Розв'язання. Побудувавши графіки функцій $y=x$ та $y=\log_a x$, бачимо, що при $a\in(0,1)$ рівняння $x=\log_a x$ має єдиний корінь.

Після порівняння графіків функції $y = \log_a x$ з різними основами логарифма стає очевидним, що необхідно знайти таке значення основи a логарифма, при якій графіки функцій $y = x$ та $y = \log_a x$ дотикаються.

Нехай x_0 - точка дотику. Тоді в цій точці рівні відповідно значення цих функцій та значення їх похідних, тобто

$$\begin{cases} x_0 = \log_a x_0; \\ 1 = \dfrac{1}{x_0 \ln a}, \end{cases}$$

звідки отримуємо

$$x_0 = \frac{1}{\ln a}, \quad \frac{1}{\ln a} = \log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}, \quad \frac{1}{\ln a} = e, \quad a = e^{\frac{1}{e}}.$$

Отже, рівняння $x = \log_a x$ при $a \in (0,1) \cup \{e^{\frac{1}{e}}\}$ має один розв'язок, при $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$ має два розв'язки, при $a \in (e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$ не має розв'язків. ■

Задача 27.2 (10-11). Знайти всі значення параметра t, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ x^2 + y^2 = 9y\sin t + 3x\cos t - 18\sin^2 t \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Знайти всі ці розв'язки.

Розв'язання. Записавши друге рівняння у вигляді $(x - 1{,}5\cos t)^2 + (y - 4{,}5\sin t)^2 = 1{,}5^2$, бачимо, що розв'язками системи є координати точок перетину кіл з центрами $O_1(0,0)$ та $O_2(1{,}5\cos t; 4{,}5\sin t)$ та радіусами $R_1 = 3$ та $R_2 = 1{,}5$ відповідно. Ці кола мають єдину спільну точку у таких випадках:

$O_1O_2 = R_1 + R_2$ (зовнішній дотик);

$O_1O_2 = R_1 - R_2$ (внутрішній дотик).

Тому для того, щоб знайти потрібні значення параметра t, достатньо розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} 2{,}25\cos^2 t + 20{,}25\sin^2 t = 20{,}25; \\ 2{,}25\cos^2 t + 20{,}25\sin^2 t = 2{,}25. \end{array}\right.$$

Знаходимо: $t = \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z$. Залишається при цих значеннях параметра t розв'язати дану систему рівнянь.

Відповідь: 1) при $t = 2\pi k, k \in Z$: $(3;0)$; 2) при $t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$: $(0;3)$; 3) при $t = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$: $(0;-3)$; 4) при $t = \pi + 2\pi k, k \in Z$: $(-3;0)$. ■

Часто для обґрунтування розв'язання використовується залежність розміщення графіка квадратичної функції від її коефіцієнтів.

Задача 27.3 (10-11). При яких значеннях параметра a нерівність $a\cos^2 x + 2(a-2)|\cos x| + 1 > 0$ виконується при всіх дійсних x?

Розв'язання. Введемо заміну $|\cos x| = t, t \in [0,1]$. Тоді нерівність $at^2 + 2(a-2)t + 1 > 0$ має виконуватись при всіх $t \in [0,1]$.

При $a = 0$ ця нерівність виконується при $t < 0{,}25$, що не задовільняє умову задачі.

При $a \neq 0$ функція $f(t) = at^2 + 2(a-2)t + 1$ є квадратичною, а її графік парабола. Для того, щоб частина параболи $f(t) = At^2 + Bt + C$, що відповідає $t \in [0,1]$, була розміщена вище осі Ox, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} A < 0; \\ f(0) > 0; \\ f(1) > 0; \end{cases} \text{або} \begin{cases} A > 0; \\ D < 0; \end{cases} \text{або} \begin{cases} A > 0; \\ t_в < 0; \\ f(0) > 0; \end{cases} \text{або} \begin{cases} A > 0; \\ t_в > 1; \\ f(1) > 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що $A = a$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3a - 3$, $t_в = \dfrac{2-a}{a}$, $D = a^2 - 5a + 4$, отримуємо сукупність систем нерівностей:

$$\begin{cases} a<0; \\ 1>0; \\ 3a-3>0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a>0; \\ a^2-5a+4<0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a>0; \\ \dfrac{2-a}{a}<0; \\ 1>0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a>0; \\ \dfrac{2-a}{a}>1; \\ 3a-3>0. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, отримуємо відповідь: при $a>1$. ■

Графічний метод особливо ефективний при розгляді взаємного розміщення графіків двох функцій, одна з яких не залежна від параметра.

Задача 27.4 (9-11). При всіх значеннях параметра a розв'язати нерівність $12-|x-a|>3x^2$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді $12-3x^2>|x-a|$. Розв'язками нерівності є ті значення змінної x, при яких відповідні точки графіка $y=12-3x^2$ розміщені вище відповідних точок графіка

$$y=|x-a|=\begin{cases} x-a, \text{ якщо } x\ge a; \\ a-x, \text{ якщо } x<a. \end{cases}$$

Графік $y=12-3x^2$ перетинає вісь Ox в точках $(-2,0)$ та $(2,0)$ і є "нерухомим" при зміні параметра a, а графік $y=|x-a|$ отримується паралельним перенесенням графіка $y=|x|$ вздовж осі Ox на a одиниць. Тому маємо наступне.

При $a<-2$ розв'язком нерівності є інтервал (x_1,x_2), де x_1,x_2 - розв'язки рівняння $12-3x^2=x-a$ (маємо $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{12a+145}}{6}$ - за умови $a>-\dfrac{145}{12}$).

При $a>2$ розв'язком нерівності є інтервал (x_1',x_2'), де x_1',x_2' - розв'язки рівняння $12-3x^2=a-x$ (маємо $x_{1,2}'=\dfrac{1\pm\sqrt{145-12a}}{6}$ - за умови $a<\dfrac{145}{12}$).

При $a\in[-2;2]$ розв'язком нерівності є інтервал

$$(x_1',x_2)=\left(\frac{1-\sqrt{145-12a}}{6};\frac{-1+\sqrt{12a+145}}{6}\right).$$

Відповідь: 1) $x\in\varnothing$ при $|a|\ge\dfrac{145}{12}$;

2) $x\in\left(\dfrac{-1-\sqrt{12a+145}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{12a+145}}{6}\right)$ при $a\in\left(-\dfrac{145}{12};-2\right)$;

3) $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{145-12a}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{12a+145}}{6}\right)$ при $a\in[-2;2]$;

4) $x\in\left(\dfrac{1-\sqrt{145-12a}}{6};\dfrac{1+\sqrt{145-12a}}{6}\right)$ при $a\in\left(2;\dfrac{145}{12}\right)$. ■

Задача 27.5 (9-11). Знайти всі значення параметра m, при яких один корінь рівняння $x^2-(2m+1)x+m^2+m-2=0$ знаходиться між числами 0 і 2, а другий – між числами 3 і 5.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2+m-2$ є неперервною на всій числовій осі, то з умови $f(0)\cdot f(2)<0$ випливає існування нуля цієї функції на інтервалі $(0;2)$, а з умови $f(3)\cdot f(5)<0$ випливає існування нуля цієї функції на інтервалі $(3;5)$.

Враховуючи властивості квадратичної функції, очевидним є твердження, що з розміщення коренів даного рівняння на інтервалах $(0;2)$ та $(3;5)$ випливає, що одночасно виконуються умови $f(0)\cdot f(2)<0$ та $f(3)\cdot f(5)<0$.

Отже, достатньо розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} f(0)\cdot f(2)<0; \\ f(3)\cdot f(5)<0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} (m^2+m-2)(m^2-3m)<0; \\ (m^2-5m+4)(m^2-9m+18)<0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо відповідь: $m\in(1;3)$. ■

Задача 27.6 (10-11). Знайти всі значення параметра m, при яких рівняння $\cos^2 3x+(2m^2-3{,}5)\cos 3x+m^2-2=0$ має рівно п'ять коренів на відрізку $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$.

Розв'язання. Після заміни $\cos 3x=t$ отримуємо квадратне рівняння $t^2+(2m^2-3{,}5)t+m^2-2=0$, розв'язавши яке відносно змінної t, отримуємо, що $\cos 3x=-0{,}5$ або $\cos 3x=4-2m^2$.

Розв'язками 1-го рівняння є множина коренів вигляду $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$, з якої в проміжок $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$ потрапляють лише два корені $x_1=\frac{2\pi}{9}, x_2=\frac{4\pi}{9}$.

Тому потрібно знайти ті значення параметра m, при яких рівняння $\cos 3x=4-2m^2$ має точно три корені на $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$. Для цього достатньо побудувати графік функції $f(x)=\cos 3x$ на $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$. Після дослідження маємо, що $f(x)$ зростає на $[-\frac{\pi}{6};0]$ та $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]$, спадає на $[0;\frac{\pi}{3}]$, $f(-\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{6})=f(\frac{\pi}{2})=0, f(0)=1, f(\frac{\pi}{3})=-1$. Оскільки кількість коренів рівняння $\cos 3x=4-2m^2$ дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y=\cos 3x$ та прямої $y=4-2m^2$, то таке рівняння має точно три корені на $[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}]$ лише за умови $4-2m^2=0$, тобто при $m=\pm\sqrt{2}$. ■

Задача 27.7 (11). Скільки розв'язків залежно від параметра a має рівняння $x^5+x=a+2x^3$?

Розв'язання. Кількість розв'язків рівняння дорівнює кількості точок перетину графіка функції $f(x)=x^5-2x^3+x$ та прямої $y=a$. Маємо

$f'(x)=5x^4-6x^2+1=(5x^2-1)(x^2-1)$, звідки отримуємо, що $f(x)$ зростає на $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{\sqrt5}{5};\frac{\sqrt5}{5}\right)\cup(1;+\infty)$, спадає на $\left(-1;-\frac{\sqrt5}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt5}{5};1\right)$, причому $f(-1)=f(1)=0$, $f\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)=-\frac{16\sqrt5}{125}$, $f\left(\frac{\sqrt5}{5}\right)=\frac{16\sqrt5}{125}$. Звідси випливає відповідь:

1) при $a\in\left(-\frac{16\sqrt5}{125};\frac{16\sqrt5}{125}\right)$ - три корені; 2) при $a=\pm\frac{16\sqrt5}{125}$ - два корені; 3) при $a\in\left(-\infty;-\frac{16\sqrt5}{125}\right)\cup\left(\frac{16\sqrt5}{125};+\infty\right)$ - один корінь. ■

Задача 27.8 (10-11). При всіх значеннях параметра a знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=2\cos 2a\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x, x\in R$.

Розв'язання. Знайдемо екстремуми функції. Оскільки функція періодична з періодом $T=2\pi$, то достатньо знайти $\max f(x)$ та $\min f(x)$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Позначимо $\cos 2a=m, m\in[-1;1]$.

Маємо: $f'(x)=2\cos x(m-\sin x)=0$ в точках $x_1=-\frac{\pi}{2}, x_2=\frac{\pi}{2}, x_3=\frac{3\pi}{2}$, $x_4=\arcsin m, x_5=\pi-\arcsin m$. Після обчислень отримуємо $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2m-\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m-\frac{1}{2}$, $f(\arcsin m)=f(\pi-\arcsin m)=m^2+\frac{1}{2}$. Порівнюючи ці значення, легко замітити, що при $m \geq 0$ маємо $-2m - \frac{1}{2} \leq 2m - \frac{1}{2} \leq m^2 + \frac{1}{2}$, а при $m \leq 0$ маємо $2m - \frac{1}{2} \leq -2m - \frac{1}{2} \leq m^2 + \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\max f(x) = \cos^2 2a + \frac{1}{2}$; $\min f(x) = -2|\cos 2a| - \frac{1}{2}$ ■

Задача 27.9 (10-11). Дійсні числа x, y, a такі, що

$$\begin{cases} x + y = a - 1; \\ xy = a^2 - 7a + 14. \end{cases}$$

Для якого числа a сума $x^2 + y^2$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Розв'язуючи систему, отримуємо, що дійсні розв'язки існують при $a \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$ і при цьому $x^2 + y^2 = -a^2 + 12a - 27$. Тому достатньо знайти найбільше значення функції $h(a) = -a^2 + 12a - 27$ при $a \in \left[\frac{11}{3}; 5\right]$. Дослідивши цю функцію, знаходимо, що найбільше значення $x^2 + y^2$ досягається при $a = 5$ та дорівнює 8. ■

Задача 27.10 (10-11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$1 + \sin^4 ax = \cos^6 x + \sin^8 x$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Очевидно, що $x = 0$ є розв'язком рівняння. Крім цього, маємо

$$1 + \sin^4 ax \geq 1, \cos^6 x + \sin^8 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

тому рівність можлива (але не обов'язкова) лише при $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Функція $f(x) = 1 + \sin^4 ax$ періодична з періодом $T_1 = \frac{\pi}{a}$, функція $g(x) = \cos^6 x + \sin^8 x$ періодична з періодом $T_2 = \pi$. Тому у випадку, коли періоди T_1 та T_2 сумірні (тобто коли функції $f(x)$ та $g(x)$ мають спільний період T, або, що те ж саме, існують натуральні k та n такі, що

$kT_1 = nT_2$), коренями рівняння будуть також числа вигляду $mn\pi, m \in Z$. Тому для того, щоб дане рівняння мало єдиний розв'язок, необхідно та достатньо, щоб періоди T_1 та T_2 були несумірні, або, що те ж саме, щоб число a було ірраціональним. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 27.11 (11). При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$4^x - 2^{x+1} - a = 0.$$

Задача 27.12 (11). Знайти всі значення параметра a, при яких існують такі додатні x, що числа $16^x + 16^{-x}, a, 2(4^x + 4^{-x})$ є послідовними членами арифметичної прогресії.

Задача 27.13 (10). При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$\sin x + 2\cos ax = 3.$$

Задача 27.14 (10-11). Знайти всі значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} (x^4 + 1)^a + (\sin^2 b + 1)^{3y} = 2; \\ a + bx^2y^2 + xy^3 = 1 \end{cases}$$

має хоча б один розв'язок при довільному значенні b.

Задача 27.15 (11). Знайти всі значення параметрів m, p, при яких найменше значення функції

$$f(x) = (x-1)^8(p-1)\sqrt{4-p} + x\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \left|tg\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right|(m+3)(2p-m) + 3$$

не менше ніж 3 і досягається при $x = 1$.

Задача 27.16 (9). Функція $y = a|x| + b|x - k|$ перетворюється в нуль при $x = -1$ та при $x = 3$ і має найбільше значення 2. Знайти значення параметрів a, b, k.

Задача 27.17 (9-11). Розглянемо всі можливі параболи $y = x^2 + bx + c$, які перетинають осі координат у трьох різних точках. Для кожної такої параболи через ці три точки проведемо коло. Доведіть, що всі ці кола мають спільну точку.

Задача 27.18 (11). Скільки розв'язків залежно від параметра a має рівняння

$$x^{13} = a(1 + x^{14})?$$

Задача 27.19 (9-10). При всіх значеннях параметра a розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax + 2y = a + 2; \\ 2ax + (a+1)y = 2a + 4. \end{cases}$$

Задача 27.20 (9-10). Знайти всі значення параметрів a, b, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} (2a+b)x + 8y = 16; \\ 2x + (4a-5b)y = 4 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

Задача 27.21 (ОМО-1996, 10). Довести, що для довільного a, $1 < a < 2$, площа фігури, обмеженої графіками функцій $y = |x-1|$ і $y = |2x - a|$ менша, ніж $1/3$.

Задача 27.22 (11). Для яких значень параметра a функція $f(x) = \sin x - a\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + 2ax$ зростає на всій числовій прямій?

Задача 27.23 (11). Парабола $y = x^2 + bx + \frac{3}{4}b$ перетинає вісь Ox в точках C і D. Для яких значень параметра b на параболі існує єдина точка M така, що $\angle CMD = 90°$?

Задача 27.24 (11). Для яких значень параметра a функція $f(x) = 5ax - \sin 8x - a\sin 3x - 3x$ зростає на всій числовій прямій і не має при цьому критичних точок?

Задача 27.25 (11). Для яких значень параметра a нерівність $9^{|\sin x|} + 2(a-2)3^{|\sin x|} + a^2 - 1 > 0$ виконується при всіх $x \in R$?

Задача 27.26 (9-10). Для яких значень параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1; \\ x - y + a \ge 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок? Знайти його.

Задача 27.27 (10-11). Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $2x^3 - 3ax^2 - 2a^2 = 0$ має єдиний корінь і цей корінь додатній.

Задача 27.28 (10-11). При всіх значеннях параметра a розв'язати рівняння

$$\sin 2x - (a+2)(\sin x + \cos x) + 2a + 1 = 0.$$

Задача 27.29 (10-11). При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} |x+y+2| + 2|x-y+2| + |x-3y+5| = 3; \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y = a^2 - 5 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

Задача 27.30 (10-11). При яких значеннях параметра a фігура, що задається рівнянням

$$|x-12| + |x - \sin a| + |y-4| + |y - \cos a| = \sqrt{2}\left(8\sqrt{2} - \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

має найменший периметр?

Задача 27.31 (11). При всіх значеннях параметра a розв'язати нерівність

$$25^{\sin x} + 2(a-1)\cdot 5^{\sin x} + a^2 + 2a + 2 \ge 0.$$

Задача 27.32 (10-11). Скільки розв'язків залежно від параметра a має рівняння

$$(a-1)^x + a^x = 2\ ?$$

Задача 27.33 (10-11). При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x) = (a\cos x - 1)^2 + a^2\sin^2 x - 2a\sin x$ дорівнює 7?

Задача 27.34 (9-11). При всіх значеннях параметра a знайти найбільший та найменший елемент множини $M = \{b_1, b_2, b_3\}$, де $b_1 = -2a$, $b_2 = 3 - a$, $b_3 = 4a - a^2 - 5$.

Задача 27.35 (9-11). При всіх значеннях параметра a розв'язати нерівність

$$\frac{(1+4a)x - 2a - 2}{2ax - 1} \ge 2.$$

Задача 27.36 (10-11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$A_{x+1}^{a+1} P_{x-a} = 56 P_{x-1}$$

має розв'язок? Знайти його.

Задача 27.37 (10-11). При якому значенні параметра a фігура, що задається рівнянням

$$|x-7| + |x - \cos a| + |y-3| + |y - \cos a| = 10 - 2\cos a$$

має найбільший периметр?

Задача 27.38 (4 СМО-1997, 10). Для кожного дійсного значення параметра a знайти всі функції f, які визначені на множині всіх дійсних чисел та приймають дійсні значення, і для всіх x, y задовільняють

$$x^2 f(y) + yf(x^2) = f(xy) + a.$$

Задача 27.39 (11). При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin \pi x = a\left(2^x + 2^{3-x}\right)$$

має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

Задача 27.40 (10-11). При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 5ax - \sin 8x - a\sin 3x - 3x$$

зростає на всій числовій осі?

Задача 27.41 (15 РМО-1989, 11). Довести, що при довільному значенні c рівняння

$$x(x^2-1)(x^2-10) = c$$

не може мати п'ять цілих коренів.

Задача 27.42 (10-11). Пункт A знаходиться на відстані 6 км від прямолінійного шосе. З другої сторони від шосе на відстані 3 км від нього знаходиться пункт B. Відстань по шосе між точками C і D, найближчими відповідно до точок A і B, дорівнює a км. Швидкість пішохода по шосе – 5 км/год, а поза шосе – 4 км/год. Знайти найменший можливий час, за який пішохід може попасти з пункту A в пункт B.

Вказівки та відповіді до задач

27.11. Відповідь: 1) при $a \in (-\infty;-1)$ $x \in \varnothing$; 2) при $a \in [-1;0)$ $x = \log_2(1 \pm \sqrt{a+1})$; 3) при $a \in [0;+\infty)$ $x = \log_2(1+\sqrt{a+1})$. **27.12.** Відповідь: $a > 3$. **27.13.** Відповідь: 1) при $a = \frac{4n}{4k+1}$ $(n,k \in Z)$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) при $a \neq \frac{4n}{4k+1}$ $(n,k \in Z)$ $x \in \varnothing$. **27.14.** Відповідь: $a = 1$. Вказівка: розгляньте друге рівняння як квадратне відносно змінної x. **27.15.** Відповідь: 1) $p = 2$, $m \in (-3;-1) \cup (-1;1) \cup (1;3) \cup (3;4] \cup \{2n, n \in Z\}$; 2) $p = 4$, $m \in (-3;-1) \cup (-1;1) \cup (1;3) \cup (3;5) \cup (5,7) \cup (7;8] \cup \{2n, n \in Z\}$. **27.16.** Відповідь: $a = -\frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}, k = -3$. **27.17.** Відповідь: всі такі кола проходять через точку $M(0;1)$.

27.18. Відповідь: 1) при $a \in \left\{\pm\frac{1}{14}13^{\frac{13}{14}};0\right\}$ - один корінь; 2) при $0 < |a| < \frac{1}{14}13^{\frac{13}{14}}$ - два корені; 3) при $|a| > \frac{1}{14}13^{\frac{13}{14}}$ - немає коренів. **27.19.** Відповідь: 1) при $a = 0$ система не має розв'язків; 2) при $a = 3$ система має безліч розв'язків вигляду $\left(x, y = \frac{5-3x}{2}\right)$, $x \in R$; 3) при $a \neq 0, a \neq 3$ система має єдиний розв'язок $\left(x = 1 + \frac{2}{a}, y = 0\right)$. **27.20.** Відповідь: $a = 3, b = 2$. **27.21.** Вказівка: розглянути випадки $a = 1, a = 2$ $(S(1) = S(2) = \frac{1}{3})$ та дослідити, як змінюється $S(a)$ при $a \in (1;2)$. **27.22.** Відповідь: $a \geq 1$. **27.23.** Відповідь: $b = -1$ або $b = 4$. **27.24.** Відповідь: $a \in (-\infty;-3-\sqrt{13}) \cup (-1+\sqrt{5};+\infty)$ **27.25.** Відповідь: $a \geq 5{,}5$. **27.26.** Відповідь: при $a = -1 : (0;-1)$. **27.27.** Відповідь: при $a \in (-2;0) \cup (0;+\infty)$. **27.28.** Відповідь: 1) при $a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$ $x \in \varnothing$; при $a \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z$. **27.29.** Відповідь: при $a = \pm 1$ або $a = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$. **27.30.** Відповідь: при $a = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$.

27.31. Відповідь: 1) при $a \in (-\infty;-6-\sqrt{19}] \cup \{-0{,}25;+\infty)$ - $x \in R$; 2) при $a \in (-6-\sqrt{19};-6+\sqrt{19})$ - $x \in (-\pi - \arcsin\left(\log_5\left(1-a-\sqrt{-4a-1}\right)\right) + \arcsin\left(\log_5\left(1-a-\sqrt{-4a-1}\right)\right) + 2\pi n)$, $n \in Z$; 3) при $a = -6+\sqrt{19}$ - $x \in (-\pi - \arcsin\left(\log_5\left(1-a-\sqrt{-4a-1}\right)\right) + 2\pi n;$ $\arcsin\left(\log_5\left(1-a-\sqrt{-4a-1}\right)\right) + 2\pi n) \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, n \in Z$;

4) при $a \in (-6+\sqrt{19};-0{,}25)$ - $x \in (\arcsin(\log_5(1-a+\sqrt{-4a-1})) + 2\pi n; \pi - \arcsin(\log_5(1-a-\sqrt{-4a-1})) + 2\pi n) \cup (-\pi - \arcsin(\log_5(1-a-\sqrt{-4a-1})) + 2\pi n; \arcsin(\log_5(1-a-\sqrt{-4a-1})) + 2\pi n)$, $n \in Z$.

27.32. Відповідь: 1) розв'язків нема при $a \in (-\infty;1]$; 2) один розв'язок при $a \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \cup [2;+\infty)$; 3) два розв'язки при $a \in \left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)$. **27.33.** Відповідь: при $a = \pm\sqrt{2}$. Вказівка: $f(x) = AB^2 - 1$, де точка $A(a\cos x; a\sin x)$ знаходиться на колі з центром в початку координат та радіуса $R = |a|$, точка $B(1;1)$.

27.34. Відповідь: $\max M = \begin{cases} -2a, & якщо\ a \in (-\infty;-3]; \\ 3-a, & якщо\ a \in (-3;+\infty), \end{cases}$

$\min M = \begin{cases} 4a - a^2 - 5, & якщо\ a \in (-\infty;1] \cup [5;+\infty); \\ -2a, & якщо\ a \in (1;5). \end{cases}$

27.35. Відповідь: 1) при $a < -0{,}5$ - $x \in [2a;\frac{1}{2a})$; 2) при $a = -0{,}5$ - $x \in \varnothing$; 3) при $a \in (-0{,}5;0)$ - $x \in (\frac{1}{2a};2a]$; 4) при $a = 0$ - $x \in (-\infty;0]$; 5) при $a \in (0;0{,}5)$ - $x \in (-\infty;2a] \cup (\frac{1}{2a};+\infty)$; 6) при $a = 0{,}5$ - $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$; 7) при $a > 0{,}5$ - $x \in (-\infty;\frac{1}{2a}) \cup [2a;+\infty)$.

27.36. Відповідь: $x = 7$ при $a \in \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$. **27.37.** Відповідь: $a = \pi + 2\pi n, n \in Z$. Вказівка: скористайтесь нерівністю $|a+b+c+d| \le |a| + |b| + |c| + |d|$. **27.38.** Відповідь: для $a = 0$ $f(x) = 0$,

для $a \neq 0$ - розв'язків нема. **27.39.** Відповідь: $x = \frac{3}{2}$ при $a = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$. Вказівка: використайте симетричність графіків відповідних функцій відносно прямої $x = \frac{3}{2}$. **27.40.** Відповідь: при $a \ge 5{,}5$. **27.41.** Вказівка: розгляньте графік функції $f(x) = x(x^2-1)(x^2-10)$. **27.42.** Відповідь: $t_{\min} = \frac{a}{5} + 1{,}35$ год при $a \ge 12$ км, $t_{\min} = \frac{\sqrt{a^2+81}}{4}$ год при $0 \le a < 12$ км.

§ 28. Нерівність Ієнсена

Функція $y = f(x)$ називається ***опуклою вниз*** на інтервалі (a,b), якщо для довільних $x_1, x_2 \in (a,b)$ та довільних невід'ємних λ_1, λ_2 таких, що $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, виконується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Якщо ж виконується протилежна нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

то функція $f(x)$ називається ***опуклою вгору*** на (a,b). Часто в літературі використовують термін "угнута" замість "опукла вгору" та термін просто "опукла" замість "опукла вниз".

Ці означення мають просту геометричну інтерпретацію. Для опуклої вниз (вгору) функції $f(x)$ довільна хорда, що сполучає дві довільні точки графіка $y = f(x)$, лежить не нижче (не вище) відповідної дуги графіка функції.

Для двічі диференційовних на (a,b) функцій є простий ***критерій опуклості***: якщо $f''(x) \ge 0$ на (a,b), то $f(x)$ є опуклою вниз на (a,b), якщо ж $f''(x) \le 0$ на (a,b), то $f(x)$ є опуклою вгору на (a,b).

Методом математичної індукції нескладно доводиться, що для опуклої вниз на (a,b) функції $y = f(x)$ довільних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з цього інтервалу та довільних невід'ємних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, таких що $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ виконується ***нерівність Ієнсена***:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Вона перетворюється на рівність при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ або коли $f(x)$ - лінійна функція. Для опуклої вгору функції виконується нерівність Ієнсена з протилежним знаком.

У літературі найчастіше використовується нерівність Ієнсена у випадку $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Застосовуючи нерівність Ієнсена до різних опуклих функцій, досить просто встановлюються узагальнена нерівність Коші, нерівності Гельдера, Коші-Буняковського та інші класичні нерівності. Тому більшість нерівностей, які доводяться за допомогою цих нерівностей, можуть бути простіше доведеними за допомогою нерівності Ієнсена.

Задача 28.1 (10-11). Для довільних додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(a+b+c)^2 \ge 27.$$

Розв'язання. Цю нерівність можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2} \le \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}{3},$$

яка є нерівністю Ієнсена для опуклої вниз функції $f(x) = x^{-2}$ ($f''(x) = 6x^{-4} \ge 0$ на $(0;+\infty)$) при $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ та $\lambda_i = \frac{1}{3}$. ▣

Задача 28.2. Для довільних додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та числа $s = x_1 + x_2 + \ldots x_n$ довести нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s - x_i} \ge \frac{n}{n-1}.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{x}{s-x}$ є опуклою вниз на $(0, s)$ $\left(f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3} > 0\right)$. Поклавши в нерівності Ієнсена $\lambda_i = \frac{1}{n}$, отримаємо $\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}}{s - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s - x_i}$, тобто $\frac{\frac{s}{n}}{s - \frac{s}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s - x_i}$, звідки

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s - x_i} \ge \frac{n}{n-1}. \ ▣$$

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 28.3 (10-11). Для довільних невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при дійсному $m > 1$ довести нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^m \le \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{m-1}.$$

Задача 28.4 (10-11). Для $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ та натурального n довести нерівність

$$\frac{1}{\sin^{n-2}\alpha} + \frac{1}{\cos^{n-2}\alpha} \ge \frac{1}{\sin^{n+2}\alpha + \cos^{n+2}\alpha}.$$

Задача 28.5 (10-11). Нехай α, β, γ - кути деякого трикутника. Довести нерівності:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \le \frac{1}{8}$.

в) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$;

д) $\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\gamma}{2}\ge 6$;

е) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$;

є) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задача 28.6 (10-11). Нехай $x_1,x_2,\ldots,x_n$ - додатні числа, сума яких рівна 1. Довести нерівність

$$\frac{x_1}{2-x_1}+\frac{x_2}{2-x_2}+\ldots+\frac{x_n}{2-x_n}\ge\frac{n}{2n-1}.$$

Задача 28.7 (10-11). Нехай a, b - додатні числа. Довести нерівність

$$a\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^b+b\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^a\ge a+b.$$

Задача 28.8 (11). Довести, що площа фігури, обмеженої осями Ox, Oy, прямою $x=\frac{\pi}{2}$ та графіком функції $y=\frac{\sin x}{x}$, не менша 1.

Вказівки та відповіді до задач

28.3. Вказівка: $f(x)=x^m$, $\lambda_i=\frac{x_i}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$. **28.4.** Вказівка: $f(x)=\frac{1}{x}$, $\lambda_1=\cos^2\alpha$, $\lambda_2=\sin^2\alpha$. **28.5.** Вказівка: розгляньте функції б) $\ln\cos x$; в) $\ln\sin\frac{x}{2}$; е) $\ln\sin x$. **28.6.** Вказівка: розгляньте на $(0;1)$ функцію $f(x)=\frac{x}{2-x}$, $\lambda_i=\frac{1}{n}$. **28.7.** Вказівка: розгляньте функцію $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $\lambda_1=\frac{a}{a+b}$, $\lambda_2=\frac{-b}{a+b}$, $x_1=b$, $x_2=a$. **28.8.**

Вказівка: скориставшись опуклістю вгору функції $y=\sin x$, доведіть для $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ нерівність $\sin x\le\frac{2}{\pi}x$.

§ 29. Множини чисел із заданими властивостями

При розв'язуванні задач на знаходження натуральних чисел з певними властивостями десятковий запис натурального числа $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10+a_0$ часто зручно позначати $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}$. Іноді буває зручним розгляд натурального числа N в системі числення з основою p:

$$N=\left(\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1a_0}\right)_p=a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0,$$

де a_i, $i=0,1,2,\ldots,n$ - цифри цієї системи числення (причому виконуються умови $0\le a_i\le p-1$, $i=0,1,2,\ldots,n$). При цьому часто допомагають різні оцінки та добре відомі ознаки подільності.

Задача 29.1 (КМО-1954, 8). Знайти всі чотирьохзначні числа, які дорівнюють четвертому степеню суми своїх цифр.

Розв'язання. Нехай $\overline{abcd}$ - шукане число. Тоді

$$10^3\le a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d=(a+b+c+d)^4\le10^4,$$

звідки отримуємо, що $6\le a+b+c+d\le9$. Зробивши перевірку, отримуємо, що серед чисел $6^4,7^4,8^4,9^4$ умову задачі задовільняє лише одне число $7^4=2401$. ■

Задача 29.2 (КМО-1954, 9). В якій системі числення число 16324 є квадратом числа 125?

Розв'язання. Нехай основою системи числення є ціле число $x \ (x \geq 7)$. Тоді $(125_x)^2 = 16324_x$, або $(x^2 + 2x + 5)^2 = x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x + 4$. Розв'язуючи рівняння, отримуємо $x = 7$. ■

Часто зустрічаються задачі, в яких властивості шуканого натурального числа N зв'язані з сумою його цифр $S(N)$ (в десятковому записі). Зауважимо, що різниця $N - S(N)$ завжди ділиться на 9.

Задача 29.3 (КМО-1977, 9). Знайти всі натуральні числа, які в 11 разів більші за суму своїх цифр.

Розв'язання. Нехай одне з шуканих чисел N має n знаків. Тоді $N \geq 10^{n-1}$, а сума його цифр $S(n) \leq 9n$. Тому

$$99n \geq 11S(n) = N \geq 10^{n-1},$$

звідки отримуємо $n \leq 3$, тобто $N = \overline{abc}$. З умови задачі маємо $N = 100a + 10b + c = 11(a + b + c)$, або $89a = b + 10c$. Враховуючи, що b, c - цифри, маємо $89a \leq 99$, звідки $a = 0$ або $a = 1$. Якщо $a = 0$, то $b = c = 0$, а число $N = 0$ не є натуральним. Якщо ж $a = 1$, то $b = 9, c = 8$, а число $N = 198$ - шукане. ■

Доведення певних властивостей деяких груп натуральних чисел може бути проведене припущенням супротивного.

Задача 29.4 (КМО-1984, 7). Натуральні числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ поділено на дві групи. Довести, що хоча б в одній з них є три числа, одне з яких є середнім арифметичним двох інших.

Розв'язання. Припустимо, що існує розбиття, яке не задовільняє умову задачі. Тоді в одній з груп є два числа, які відрізняються на 1 (інакше в одній групі були б всі парні числа, а в іншій – всі непарні). Нехай це числа $n, n+1$ першої групи. Тоді до другої групи обов'язково відносяться числа $n-1, n+2$. Послідовно отримуємо, що тоді до першої групи потрібно віднести числа $n-4, n+5$; до другої групи потрібно віднести числа $n-2, n+3$; до першої групи потрібно віднести числа $n-3, n+4, n+6, n-6, n-5, n+7, n-7$. Отримали, що в першій групі є або трійка $n-6, n-5, n-4$, або трійка $n+4, n+5, n+6$. Отже, припущення невірне, а тому всі розбиття задовільняють умову задачі. ■

Задача 29.5 (КМО-1984, 9). Дано 125 різних натуральних чисел, які не перевищують 1984. Довести, що серед їх попарних різниць існує принаймні п'ять однакових.

Розв'язання. Нехай $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{125}$ - дані числа, записані у порядку зростання. Доведемо, що серед чисел множини $M = \{a_2 - a_1; a_3 - a_2; a_4 - a_3; \ldots; a_{125} - a_{124}\}$ є хоча б 5 однакових.

Упорядкуємо числа множини M у порядку зростання: $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots \leq b_{124}$. Сума цих чисел

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{124} = a_{125} - a_1 \leq 1983.$$

Припустимо, що серед чисел множини M нема 5 однакових. Тоді $b_1 \geq 1, b_5 \geq 2, b_9 \geq 3, \ldots, b_{4n+1} \geq n+1, \ldots, b_{121} \geq 31$, звідки отримуємо

$$S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{124} \geq 4(b_1 + b_5 + b_9 + \ldots + b_{121}) \geq$$
$$\geq 4(1 + 2 + 3 + \ldots + 31) = 1984.$$

Прийшли до протиріччя. Отже, множина M містить хоча б п'ять однакових чисел. ■

Часто застосовується принцип Діріхле.

Задача 29.6 (КМО-1988, 8). Чи існує такий цілий степінь числа 13, що його десятковий запис закінчується на 00001?

Розв'язання. Розглянемо послідовність, утворену останніми п'ятьма цифрами чисел вигляду 13^n. Всього відповідних п'ятизначних чисел є 10^5, а тому серед перших $10^5 + 1$ членів цієї послідовності є хоча б два однакових; нехай вони відповідають натуральним m і $k, m > k$. Тоді число $13^m - 13^k = 13^k(13^{m-k} - 1)$ ділиться на 10^5. Оскільки числа 13^k і 10^5 взаємно прості, то $13^{m-k} - 1$ має ділитись на 10^5, тобто число 13^{m-k} закінчується на 00001. ■

Іноді корисним є розбиття даної множини чисел на деякі підмножини.

Задача 29.7 (5 СМО-1998, 10). Числа 1, 2, 3, ..., 1998 якимсь чином поділено на 5 груп (серед яких можуть бути і порожні). Доведіть, що можна знайти 6 таких чисел a, b, c, d, e, f, що належать одній групі і задовільняють рівність $a + b + c = d + e + f$.

Розв'язання. Позначимо групи, на які поділено дані числа, за B_k, $k = 1,\ldots,5$. Розглянемо множини $A_1 = \{1,2,\ldots,11\}$, $A_2 = \{12,13,\ldots,22\}$,..., $A_{181} = \{1981,1982,\ldots,1991\}$. Оскільки кожна з множин A_i містить 11 елементів, то за принципом Діріхле вона містить хоча б 3 елементи, що належать одній з груп B_k. Але $181 = 5 \cdot 36 + 1$, тому можна вибрати 37 множин A_i, для яких ця група одна і та ж. Позначимо цю групу B, а числа цієї групи, що входять до однієї з множин A_i, через x_i, y_i, z_i, вважаючи при цьому, що $x_i < y_i < z_i$, $i = 1,2,\ldots,37$. Покажемо, що шукані числа a,b,c,d,e,f можна вибрати з групи B.

Різниця $z_i - x_i = (z_i - y_i) + (y_i - x_i)$ може набувати значень 9 значень (а саме 2, 3,..., 10), а тому існує значення цієї різниці d, яке серед 37 трійок чисел x_i, y_i, z_i зустрічається не менше 5 разів. Але кожне натуральне число $d < 10$ може бути подане у вигляді суми двох натуральних чисел не більше ніж 4 способами, а число $d = 10$ - 5 способами (перевірте це самостійно). Тому отримуємо наступне.

При $d < 10$ маємо два однакових подання $d = (z_i - y_i) + (y_i - x_i)$, $d = (z_n - y_n) + (y_n - x_n)$, тобто такі, що $z_i - y_i = z_n - y_n$, або $z_i - y_i = y_n - x_n$. В першому з цих випадків маємо
$d = (z_i - y_i) + (y_i - x_i) = (z_n - y_n) + (y_i - x_i) = z_t - x_t$, де $t \neq i,n$, звідки отримуємо $z_n + y_i + x_t = z_t + y_n + x_i$. В другому випадку маємо $d = (z_i - y_i) + (y_i - x_i) = (y_n - x_n) + (y_i - x_i) = z_t - x_t$, де $t \neq i,n$, звідки отримуємо $y_n + y_i + x_t = z_t + x_n + x_i$.

При $d = 10$ у випадку різних подань $10 = (z_i - y_i) + (y_i - x_i)$ для вказаних п'яти трійок чисел знайдуться такі різні i,n,t, що $z_i - y_i = 1$ (або $y_i - x_i = 1$), $z_n - y_n = 2$ (або $y_n - x_n = 2$), $z_t - y_t = 3$ (або $y_t - x_t = 3$). Тоді виконується $(z_n - y_n) + (z_i - y_i) = z_t - y_t$ (або інша подібна рівність), звідки $z_n + y_t + z_i = z_t + y_n + y_i$. ■

При знаходженні невідомих наборів чисел часто допомагає перебір можливих варіантів та використання при цьому різноманітних оцінок.

Задача 29.8 (ОМО-2000, 10). На дошці записані в рядок цілі невід'ємні числа $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$, кожне з яких не перевищує 10, і при цьому для кожного цілого i, $0 \le i \le 10$ число i зустрічається серед записаних точно a_i разів. Які числа записано на дошці?

Розв'язання. З умови випливає, що сума записаних чисел дорівнює їх кількості:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 11,$$

крім того, $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + 10 \cdot a_{10}$, звідки отримуємо

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + 9a_{10}.$$

Якщо $a_0 = 0$, то отримуємо, що $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_{10} = 0$ - протиріччя з тим, що число 0 зустрічається серед записаних точно a_0 разів.

Якщо $a_0 = 1$, то отримуємо, що $a_2 = 1, a_3 = a_4 = \ldots = a_{10} = 0$ - протиріччя з тим, що число 1 зустрічається серед записаних точно a_1 разів.

Якщо $a_0 = 2$, то отримуємо, що або $a_2 = 2, a_3 = a_4 = \ldots = a_{10} = 0$, звідки $a_1 = 7$ - протиріччя з тим, що число 7 зустрічається серед записаних точно $a_7 = 0$ разів; або $a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = a_5 = \ldots = a_{10} = 0$, звідки $a_1 = 8$ - протиріччя з тим, що число 8 зустрічається серед записаних точно $a_8 = 0$ разів

Отже, $a_0 = k \ge 3$. Тоді $a_k \ge 1$. Але

$$k = a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + 9a_{10} \ge (k-1)a_k,$$

звідки отримуємо, що

$$a_k \le \frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1} < 2.$$

Отже, $a_k = 1$. Тому маємо наступне:

$$k = a_2 + 2a_3 + \ldots + (k-2)a_{k-1} + k - 1 + ka_{k+1} + \ldots + 9a_{10},$$

або

$$a_2 + 2a_3 + \ldots + (k-2)a_{k-1} + ka_{k+1} + \ldots + 9a_{10} = 1,$$

звідки $a_2 = 1, a_3 = \ldots = a_{k-1} = a_{k+1} = \ldots = a_{10} = 0$. При цьому одиниця зустрічається двічі, а тому $a_1 = 2$, звідки $a_0 = k = 7$. ■

Отже, шукана послідовність 7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0.

При розв'язуванні задач, в яких потрібно встановити деякі властивості числових множин, можуть використовуватись найрізноманітніші ідеї.

Задача 29.9 (2 СМО-1996, 10). Довести, що десятковий запис не менше ніж 300 чисел з набору $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots, 2^{1000}$ починається з цифри 1.

Розв'язання. Число 2^n починається з цифри 1 тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число m таке, що виконується нерівність $10^m \le 2^n < 2 \cdot 10^m$, яка рівносильна нерівності $5 \cdot 10^{m-1} \le 2^{n-1} < 10^m$. Якщо ж число 2^n не починається з цифри 1, то існує натуральне число m таке, що виконується нерівність $2 \cdot 10^m \le 2^n < 10^{m+1}$, яка рівносильна нерівності $10^m \le 2^{n-1} < 5 \cdot 10^m$. Отже, число 2^n починається з цифри 1 тоді і тільки тоді, коли число 2^{n-1} має в десятковому записі на одну цифру менше, ніж число 2^n. Тому в наборі чисел $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots, 2^{1000}$ з цифри 1 починається стільки чисел, скільки цифр у числа $2^{1000} = 1024^{100} > 1000^{100} = 10^{300}$. ■

Задача 29.10 (УМО-2001, 9). На дошці записані всі п'ятицифрові числа, в записі кожного з яких цифри розташовані в строго зростаючому зліва направо порядку. Чи можна з кожного з них закреслити по одній цифрі так, щоб утворились всі чотирицифрові числа з такою ж властивістю?

Розв'язання. Оскільки з нуля такі числа починатися не можуть, то для їх запису маємо 9 цифр. Тому для довільного такого п'ятицифрового числа з чотирьох цифр, що в ньому не зустрічаються, єдиним способом утворюється чотирицифрове число з такою ж властивістю, та навпаки. Отже, кількість таких п'ятицифрових та чотирицифрових чисел однакова.

Один з варіантів закреслювання цифр такий. У кожного п'ятицифрового числа знайдемо остачу від ділення на 5 суми його цифр і викреслимо його цифру, зліва від якої стоїть така кількість цифр. Для того, щоб показати, що після такого закреслювання різних п'ятицифрових чисел не можна отримати одне і те ж чотирицифрове число, достатньо показати, що за отриманим після такого закреслювання числом $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ єдиним способом відновлюється початкове п'ятицифрове число. Потрібна для відновлення цифра міститься серед цифр $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$. Неважко замітити, що $b_k - k$ дорівнює кількості цифр числа $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, що менші за b_k.

Оскільки $b_k + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (b_k - k) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + k$, то номер k можна (однозначно) вибрати так, щоб число $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + k$ ділилося на 5. Тоді дійсно сума $b_k + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ та різниця $b_k - k$ при діленні на 5 дають один залишок, а тому при закреслюванні вказаним способом цифри в числі, утвореному цифрами b_k, a_1, a_2, a_3, a_4, закреслюється саме цифра b_k. ■

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 29.11 (КМО-1956, 7). Знайти найменше число, яке записується за допомогою лише одиниць та ділиться на число, яке складене з ста трійок.

Задача 29.12 (КМО-1956, 8). Знайти двозначне число, квадрат якого дорівнює кубу суми його цифр.

Задача 29.13 (КМО-1957, 8). Деяке шестизначне число починається цифрою 1. Якщо цю цифру закреслити, а справа дописати 1, то отримаємо число, яке втричі більше. Знайти ці числа.

Задача 29.14 (КМО-1963, 9). Знайти всі трьохзначні числа, у яких при їх збільшенні на 3 сума цифр зменшується у 3 рази.

Задача 29.15 (КМО-1964, 8). Знайти трьохзначне число, яке в 12 разів більше за суму своїх цифр.

Задача 29.16 (КМО-1968, 8). Довести, що шестизначне число вигляду $\overline{abcabc}$ не може бути квадратом цілого числа.

Задача 29.17 (КМО-1972, 9). Підряд написано 99 дев'яток. Довести, що справа від них можна дописати рівно 100 цифр, щоб отримане 199-цифрове число було повним квадратом.

Задача 29.18 (КМО-1985, 10). Довести, що серед будь-яких 99 послідовних натуральних чисел є 5 таких, що мають однакову суму цифр. Чи завжди є 6 таких чисел?

Задача 29.19 (КМО-1988, 9). Чи існує натуральне число, яке ділиться на $5^{1000000}$ і не має у своєму десятковому запису жодного нуля.

Задача 29.20 (УМО-1969, 8). Скільки різних прямокутних таблиць, які мають m рядків і n стовпців, можна скласти з чисел $+1$ та -1 так, щоб добутки чисел кожного рядка і кожного стовпця дорівнювали 1?

Задача 29.21 (УМО-1973, 10). Дано набір $2n$ різних додатних чисел. Як розбити цей набір на n пар так, щоб сума добутків кожної пари чисел була: а) найбільшою; б) найменшою?

Задача 29.22 (УМО-1975, 8). Дано 75 цілих чисел. Дозволяється одночасно додавати по одиниці до деяких 50 з них. Довести, що, повторюючи цю операцію скінченну кількість разів, можна зробити всі числа рівними.

Задача 29.23 (УМО-1976, 8). Довільний дріб $\frac{a}{b}$ можна замінити на один з дробів $\frac{a-b}{b}, \frac{a+b}{b}, \frac{b}{a}$. Чи можна кількома замінами з дробу $\frac{1}{2}$ дістати дріб $\frac{67}{91}$?

Задача 29.24 (УМО-1971, 10). Кожне з чисел $N_1, N_2, ..., N_k$ є сумою квадратів двох цілих чисел. Довести, що добуток $N_1 \cdot N_2 \cdot ... \cdot N_k$ також є сумою квадратів двох цілих чисел.

Задача 29.25 (УМО-1977, 7). Знайти всі такі стоцифрові числа a, які задовільняють рівність: a = "сума всіх цифр числа a" + "сума всіх попарних добутків цих цифр" + "сума всіх добутків по три цифри" + ... +"добуток всіх цифр".

Задача 29.26 (УМО-1978, 9). Числа 1, 2, ..., 64 довільно розмістили в клітинках шахівниці розміром 8×8. Довести, що на шахівниці знайдеться принаймні три квадрати розміром 2×2, сума чисел у кожному з яких більша за 100.

Задача 29.27 (УМО-1979, 8). Розглядаються набори цілих чисел $a_1, a_2, ..., a_{10}$ такі, що $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_{10} \le 10$ і сума $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ кратна числу 5. Нехай N - число всіх таких наборів, а M - число тих наборів, для яких $a_{10} < 10$. Довести, що $N = 2M$.

Задача 29.28 (УМО-1983, 8). На дошці в рядок записано 105 одиниць. У кожної третьої з них змінено знак, потім у кожного п'ятого з отриманих чисел також змінено знак, потім знак змінено у кожного сьомого числа. Чому дорівнює сума отриманих чисел?

Задача 29.29 (УМО-1979, 9). Множина M складається з усіх чисел вигляду $x^2 + x$, де x - довільне натуральне число. Довести, що для кожного натурального $k \ge 2$ у множині M знайдуться різні між собою числа $a_1, a_2, ..., a_k, b_k$ такі, що $a_1 + a_2 + ... + a_k = b_k$.

Задача 29.30 (УМО-1989, 8). Знайти всі трійки чисел натуральних чисел, які мають таку властивість: добуток будь-яких двох з цих чисел в сумі з 1 ділиться на третє число.

Задача 29.31 (УМО-1975, 9). Знайти всі цілі значення n, при яких число $(n+2)^4 - n^4$ є кубом цілого числа.

Задача 29.32 (3 СМО-1997, 9). Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Довести, що для довільного натурального n виконується нерівність $S(n^2) \le S^2(n)$.

Задача 29.33 (КМО-1952, 10). Знайти трьохзначне число, яке дорівнює сумі факторіалів своїх цифр.

Задача 29.34 (5 СМО-1998, 11). Знайти всі натуральні числа n, які мають 16 дільників $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{16} = n$ таких, що $d_6 = 18$ і $d_9 - d_8 = 17$.

Задача 29.35 (5 СМО-1998, 11). По колу в деякій послідовності розставлені числа 1, 2,..., 1998. Доведіть, що серед них знайдуться два числа a, b, які стоять підряд або через одне, і такі, що $|a-b| < 750$.

Задача 29.36 (ОМО-2000, 7). Нехай $S(n)$ позначає суму цифр натурального числа n.

1) Чи існує натуральне число n, для якого $n + S(n) = 2000$?

2) Чи існує натуральне число n, для якого

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2000?$$

Задача 29.37 (8-9). В якій системі числення справедливо $41 \cdot 23 = 243$?

Задача 29.38 (10-11). Нехай f – визначена на множині N всіх натуральних чисел функція, яка приймає дійсні значення. Відомо, що для деякої скінченної множини X при всіх $k \in N$ $(f(k) + f(2k)) \in X$ та $(f(2k) + f(4k)) \in X$. Чи вірно, що в цьому випадку обов'язково знайдеться така скінченна множина M, що $f(k) \in M$ при довільному $k \in N$.

Задача 29.39 (7). Знайти всі чотирьохзначні числа, при дописання яких справа до числа 400 отримується квадрат цілого числа.

Задача 29.40 (УМО-2000, 9). Знайдіть усі натуральні числа, які у 2000 разів більші за суму своїх цифр.

Задача 29.41 (УМО-2000, 8). Побудуйте на координатній площині множину точок (x, y), які задовільняють співвідношення

$$3|x| + 3|y| = \left||x| - |y|\right| + 6.$$

Задача 29.42 (ОМО-2001, 10). Для кожного натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$, через S позначимо множину всіх значень $a(n), n \ge 1$.

1. Доведіть, що для кожного натурального n число $a(n)a(n+1)\in S$.

2. Доведіть, що існують n і k більші за 2001 такі, що число $a(n)a(k)\notin S$.

Задача 29.43 (9-10). Знайти площу фігури, координати точок якої задовільняють нерівність

$$\left|y+x^2\right|+\left|y-x^2\right|<6-4x.$$

Задача 29.44 (9 РМО-1983, 11). Дано числа $x_1, x_2, \ldots, x_{1983}$ такі, що

$$x_1=x_{1983}=1983 \text{ і } x_n=\frac{x_{n+1}+2x_{n-1}}{3}$$

при $n=2,3,\ldots,1982$. Довести, що всі числа x_n дорівнюють 1983.

Вказівки та відповіді до задач

29.11. Відповідь: число, яке записане за допомогою 300 одиниць. **29.12.** Відповідь: 27. **29.13.** Відповідь: 142857 та 428571. **29.14.** Відповідь: 117, 207, 108. **29.15.** Відповідь: 108. **29.16.** Вказівка: всі такі числа діляться на $1001=7\cdot 11\cdot 13$. **29.17.** Вказівка: покажіть, що існує натуральне число n таке, що $10^{199}-10^{100}\le n^2<10^{199}$. **29.18.** Вказівка: серед цих чисел хоча б 50 лежать в межах однієї сотні, їх і розгляньте. Відповідь: не завжди, наприклад: числа від 9951 до 10049. **29.19.** Відповідь: існує. **29.20.** Відповідь: $2^{(m-1)(n-1)}$. **29.21.** Відповідь. Нехай дані числа: $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{2n}$. Тоді: а) $(a_1,a_2),(a_3,a_4),\ldots,(a_{2n-1},a_{2n})$; б) $(a_1,a_{2n}),(a_2,a_{2n-1}),\ldots,(a_n,a_{n+1})$. **29.22.** Вказівка: $3\cdot 75-4\cdot 56=1$. Скориставшись цим, організуйте процес, при якому всі числа, крім найменшого збільшаться на n, а це найменше – на $n+1$. **29.23.** Відповідь: можна. Вказівка: доведіть, що будь-який нескоротний дріб можна трансформувати до дробу $\frac{1}{1}$ та врахуйте, що вказані перетворення є взаємнообберненими. **29.24.** Вказівка: $\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=\left(a_1a_2-b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)^2$, далі скористайтесь методом математичної індукції. **29.25.** Відповідь: числа вигляду $\overline{b_1 99\ldots 99}$, де b_1 - довільна цифра, відмінна від 0. Вказівка: умову задачі можна

записати у вигляді рівняння $b_1\cdot 10^{99}+b_2\cdot 10^{98}+\ldots+b_{99}\cdot 10+b_{100}=(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_{100}+1)-1$ та оцініть його праву частину. **29.26.** Вказівка: таких квадратів 2×2 є 49. Припустіть супротивне та різними способами оцініть суму всіх чисел таблиці. **29.27.** Вказівка: на дошці 10×10 набори 1-го виду зобразіть у вигляді відповідного зафарбування клітинок таблиці по горизонталям, а набори 2-го виду зобразіть у вигляді відповідного зафарбування клітинок таблиці по вертикалям. **29.28.** Відповідь: 15. **29.29.** Вказівка: скористайтесь методом математичної індукції. При цьому розгляньте числа $a_{k+1}=\left(\frac{b_k-2}{2}\right)^2+\frac{b_k-2}{2}$, $b_{k+1}=\left(\frac{b_k}{2}\right)^2+\frac{b_k}{2}$. **29.30.** Відповідь: (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3), (2,3,7). Вказівка: для шуканої трійки чисел (x,y,z) розгляньте число $N=xy+yz+zx+1$. **29.31.** Відповідь: $n=-1$. Вказівка: $(n+2)^4-n^4=2^3(k^3+k)$, $k^3<k^3+k<(k+1)^3$ для $k\in N$. **29.32.** Вказівка: спочатку доведіть (а потім використайте) такі нерівності: $S(n)\le n$, $S(n+10^k)\le S(n)+1$, $S(m+n)\le S(m)+S(n)$, $S(mn)\le mn$. **29.33.** Відповідь: 145. **29.34.** Відповідь: $n=2\cdot 3^3\cdot 37$ і $n=2\cdot 3^3\cdot 71$. **29.35.** Вказівка: розбийте числа на три множини $A_1=\{1,2,\ldots,750\}$, $A_2=\{751,752,\ldots,1500\}$, $A_3=\{1501,1502,\ldots,1998\}$ та припустіть супротивне. **29.36.** Відповідь: 1) так, наприклад $n=1981$. 2) ні, числа $n,S(n),S(S(n))$ мають однаковий залишок при діленні на 3. **29.37.** Відповідь: в п'ятиричній. **29.38.** Відповідь: так. **29.39.** Відповідь: 4001 та 8004. **29.40.** Відповідь: 18000. **29.41.** Відповідь: контур чотирикутної зірки з вершинами в точках $(3;0),(1;1),(0;3)$, $(-3;0),(-1;1),(-1;-1)$, $(0;-3),(1;-1)$. **29.42.** Вказівка: 2) $a(n)a(n)\notin S$. **29.43.** Відповідь: дана фігура є трапецією з вершинами в точках (-3;9), (-3;-9), (1;1); (1;-1), площа якої дорівнює 40 кв. од. **29.44.** Вказівка: розгляньте числа $b_n=x_{n+1}-x_n$, $b_{n+1}=2b_n$.

"Правила, як робити відкриття. Перше правило - потрібно мати здібності, а також везіння. Друге правило - стійко триматись і не відступати, поки не з'явиться щаслива ідея".

Д. Пойа

Частина II. Приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків

37-а Всеукраїнська олімпіада (1997 р., м. Одеса)

8 клас

1. Яке з чисел більше $4^{4^{4^4}}$ чи $5^{5^{5^5}}$?

2. На столі лежать n цукерок. Петрик та Миколка по черзі беруть зі столу по декілька цукерок за таким правилом: той з хлопців, хто підходить до столу перший, може взяти одну цукерку. Той, хто підходить другим, може взяти i цукерок, де i є дільником 2. Той, хто підходить до столу третій, може взяти i цукерок, де i є дільником 3, і т. д. Той з хлопців, хто візьме останню цукерку, отримає приз: "Снікерс". Хто з хлопців може забезпечити собі виграш, якщо Петрик бере цукерку першим?

3. Дані гострокутні трикутники ABC та APQ такі, що т. P та т. Q лежать на стороні BC. Довести, що центр кола, описаного навколо ΔABC, лежить ближче до прямої BC, ніж центр кола, описаного навколо ΔAPQ.

4. За допомогою циркуля та лінійки побудувати бісектрису даного кута за умови, що в середині кута не дозволяється відмічати ніяких окремих точок (лише дозволяється провести саму бісектрису).

5. Двоє гравців по черзі вписують числа від 1 до 7 в кругові поля таблиці, зображеної на малюнку. Після заповнення таблиці обчислюється суми чисел вздовж кожної прямої, зображеної на малюнку. Якщо серед отриманих сум є принаймні три однакові, то виграє перший гравець, інакше виграє другий. Хто з гравців може забезпечити собі виграш - той, хто починає гру, чи його суперник?

6. Знайти всі натуральні числа n, для яких $2^n - n^2$ ділиться на 7.

9 клас

1. На столі лежать 4 яблука ваги 600г, 400г, 300г і 250г. Двоє суперників по черзі підходять до столу і беруть по яблуку, а потім по команді починають їсти. Наступне яблуко дозволяється брати лише після того, як гравець з'їв попереднє. Суперники їдять з однаковою швидкістю. Як повинен поводитися гравець, що починає, щоб з'їсти якомога більше? (Вказати, яку найбільшу кількість грамів може забезпечити собі той, хто починає, при протидії суперника).

2. Розв'язати в дійсних числах рівняння:

$$9^x + 4^x + 1 = 6^x + 3^x + 2^x.$$

3. В трикутник ABC вписане коло; M, N і K - точки його дотику до сторін AB, BC і CA відповідно, BD - медіана. Пряма l проходить через т. D паралельно MN і перетинає прямі BC і BA в точках T та S відповідно. Довести, що $TC = KD = AS$.

4. Чи існує таке натуральне число a, що кожне з чисел $a, 2a, 3a, \ldots, 1997a$ є степенем, тобто має вигляд m^k, де m і k - натуральні числа, причому $k \geq 2$?

5. Знайти найменше натуральне число, яке не менш ніж двома різними способами представляється у вигляді $19n + 97m$, де m і n - натуральні числа.

6. Клітини довільної прямокутної дошки розфарбовані в шаховому порядку. В кожній з них записане деяке ціле число. Відомо, що в кожному рядку і в кожному стовпчику сума чисел парна. Довести, що сума всіх чисел в чорних клітинах парна.

7. Довести, що для кожного натурального n виконується не...

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}<5,$$

де в лівій частині n двійок та n шісток.

8. Трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ не є рівними, але $AC=A_1C_1=b$, $BC=B_1C_1=a$ та $BH=B_1H_1$, де BH та B_1H_1 - висоти трикутників. Довести нерівність

$$a\cdot AB+b\cdot A_1B_1\le\sqrt{2}(a^2+b^2)$$

10 клас

1. Знайти найбільше значення функції:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x,\text{ на проміжку } (0;+\infty).$$

2. Кожну сторону правильного трикутника поділили точками на 1997 однакових відрізків. Кожну вершину трикутника з'єднали відрізками з усіма точками поділу відповідної протилежної сторони та відмітили всі точки перетину цих відрізків, які лежать в середині трикутника. Скільки одержали відмічених точок?

3. Послідовність $\{a_n\}$ така, що $a_1=a_2=a_3+1$, $a_{n+3}=-a_n-a_{n+1}$ для всіх натуральних n. Довести, що ця послідовність необмежена, тобто для кожного дійсного числа M існує таке натуральне n, що $|a_n|>M$.

4. У просторі розташовано два правильних п'ятикутники $ABCDE$ та $AEKPL$ так, що $\angle DAK=60°$. Довести, що площини (ACK) та (BAL) взаємно перпендикулярні.

5. Задача 9.5.

6. Розв'язати в дійсних числах систему рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=1997,\\ x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{1997}^4=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{1997}^3.\end{cases}$$

7. У паралелограмі $ABCD$ т. M - середина сторони BC, N довільна точка сторони AD. Нехай P - точка перетину відрізків MN та AC, а Q - точка перетину відрізків AM та BN. Довести, що площі трикутників BDQ та DMP рівні.

8. Позначимо через $d(n)$ найбільший непарний дільник натурального числа n. Визначимо функцію $f:N\to N$ таким чином: $f(2n-1)=2^n$, $f(2n)=n+\dfrac{2n}{d(n)}$ для всіх натуральних n. Знайдіть усі натуральні k такі, що $f(f(\ldots f(1)\ldots))=1997$, де функцію f застосовано k разів.

11 клас

1. Дано паралелограм $ABCD$, в якому $AB=1$. На стороні AD є точка K така, що $KD=1$, $\angle ABK=90°$, $\angle DBK=30°$. Знайдіть довжину AD.

2. Довести, що серед будь-яких чотирьох різних чисел з інтервалу $(0,\pi/2)$ можна вибрати два числа x та y такі, що виконується нерівність: $8\cos x\cos y\cos(x-y)+1>4(\cos^2 x+\cos^2 y)$.

3. В просторі дані 1997 точок. Нехай m - найменша з відстаней між двома з цих точок, а M - найбільша з них. Довести, що відношення $(M/m)>9$.

4. Відомо, що рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$ відносно x має три дійсні корені. Скільки різних дійсних коренів має рівняння $4(ax^3+bx^2+cx+d)(3ax+b)=(3ax^2+2bx+c)^2$?

5. Розв'язати в дійсних числах рівняння:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+1=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x..$$

6. Нехай Q^+ - множина додатних раціональних чисел. Знайти всі функції $f:Q^+\to Q^+$, які для кожного $x\in Q^+$ задовільняють умовам:

1) $f(x+1)=f(x)+1$;

2) $f(x^2)=(f(x))^2$.

7. Знайти найменше n таке, що серед будь-яких n цілих чисел можна вибрати 18 чисел так, що їх сума ділиться на 18.

8. На ребрах AB, BC, CD та DA паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяли точки K, L, M, N відповідно. Довести, що центри чотирьох сфер, описаних навколо тетраедрів A_1AKN, B_1BKL, C_1CLM, D_1DMN є вершинами паралелограма.

38-а Всеукраїнська олімпіада (1998 р., м. Миколаїв)

8 клас

1. В сім'ї, що складається з п'яти осіб (тата, мами та троє дітей), помітили, що коли перемножити вік всіх членів сім'ї між собою, то отримаємо 1998. Який вік мають члени сім'ї, якщо тато за матір старший на 10 років?

2. Площина вимощена правильними шестикутниками. На ній відмічено довільним чином 1998 шестикутників. Довести, що серед відмічених шестикутників можна вибрати 666 таких, що жодні два з них не мають спільних вершин.

3. На дошці розміром $n \times n$ (n - натуральне число, $n \geq 2$) в лівому нижньому кутку стоїть фішка. За один хід гравець може пересунути її на одну клітинку вправо, або вгору, або по діагоналі вправо вгору. Двоє гравців по черзі роблять такі ходи, а виграє той, хто поставить фішку в правий верхній кут дошки. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, що починає, чи його суперник?

4. Знайти чотири останні цифри числа $1997 \cdot 5^{1998}$ в його десятковому запису.

5. На площині задані пряма l та дві точки A та B, які лежать по один бік від прямої l. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку C так, щоб пряма l перетинала відрізки AC і BC відповідно в таких точках M і N, що відрізок BM - висота, а відрізок AN - медіана ΔABC.

6. Довести, що в клітинки прямокутної таблиці розміром 5×120 (5 - стовпчиків, 120 - рядків) можна вписати числа з набору $\{1,2,3,4,5\}$ так, щоб виконувались наступні умови:

1) всі числа кожного рядка різні;
2) всі рядки різні;
3) можна розбити таблицю на 24 таблиці розмірами 5×5 і, не повертаючи їх, скласти таблицю розміром 120×5 (120 - стовпчиків, 5 - рядків), в якій всі стовпчики різні.

9 клас

1. Чи існує на координатній площині трикутник, в якого координати вершини, точок перетину медіан, висот, бісектрис і серединних перпендикулярів є цілими числами?

2. Сторона AD чотирикутника $ABCD$ співпадає з діаметром описаного навколо нього кола. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте який-небудь вписаний в це саме коло трикутник, площа якого дорівнює площі чотирикутника $ABCD$.

3. Довести, що для довільних додатних чисел a, b та c, що задовільняють рівність $abc = 1$, виконується нерівність:

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

4. Відомо, що дійсні числа x та y не менші за 1. Крім того, для довільного n виконується рівність:

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]}$$

(через $[a]$ позначено цілу частину числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує число a). Доведіть, що $x = y$, або x та y є цілими числами, перше з яких ділиться на друге.

5. Доведіть, що рівняння $x^3 - x = y^2 - 19y + 98$ не має розв'язків у цілих числах.

6. Доведіть, що сума квадратів довжин медіан довільного трикутника не менша за квадрат його півпериметра.

7. Двоє гравців по черзі вписують у клітини квадратної дошки $n \times n$ натуральні числа згідно наступних правил: у клітину, яка знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпчика, перший гравець має право вписати найбільший спільний дільник чисел i та j, а другий гравець має право вписати найменше спільне кратне цих чисел. Після заповнення дошки усі числа першого стовпчика діляться на 1, усі числа другого стовпчика діляться на 2, усі числа третього стовпчика діляться на 3 і так далі, аж до останнього стовпчика, усі числа якого діляться на n. Потім рахується добуток усіх отриманих чисел. Якщо результат менше 1, виграє перший гравець, в іншому випадку виграє другий гравець. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу - той, хто починає гру, чи його суперник?

8. На площині дано опуклий 2000-кутник. Доведіть, що на площині можна відмітити 1998 точок так, щоб кожен трикутник, вершини якого є вершинами даного 2000-кутника, містив всередині (але не на сторонах) рівно одну з відмічених точок.

10 клас

1. Знайти всі пари дійсних чисел (x, y), які задовільняють рівність:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

2. На стороні AC трикутника ABC довільно обирається точка M. Нехай O - точка перетину перпендикулярів, опущених з середини відрізків AM та MC відповідно на прямі BC та AB. При якому положенні т. M довжина відрізка OM досягає найменшого значення?

3. На прямій задана скінченна множина відрізків, яка задовільняє такій умові: серед будь-яких1998 відрізків цієї множини знайдуться два таких, що мають хоча б одну спільну точку. Довести, що на цій прямій можна відмітити 1997 точок так, щоб будь-який відрізок нашої множини містив хоча б одну з цих точок.

4. Функція f задана на проміжку $[1,\infty)$ і при всіх $x \geq 1$ задовільняє нерівності $\frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq x$. Довести, що $f(x) < \sqrt{2x}$ при кожному $x \geq 1$.

5. Нехай m - найменше з чотирьох чисел $1, x^9, y^9, z^7$, де x, y, z - невід'ємні числа. Довести, що $m \leq xy^2z^3$.

6. AB і CD - діаметри кола з центром в точці O. Точка M належить меншій з дуг CB. Прямі MA і MD перетинають хорду CB в точках P і Q. Довести, що сума площ трикутників CPM та MQB рівна площі трикутника DPQ.

7. Барон Мюнхаузен стверджує, що довільну кількість гостей він зможе розселити по кімнатах свого будинку так, що в кожній кімнаті або всі гості будуть знайомі, або всі попарно незнайомі. Чи правду каже барон? (Вважаємо, що в кожну кімнату можна поселити довільну кількість гостей, але кількість кімнат в будинку Мюнхаузена скінченна.)

8. Знайти всі пари многочленів $f(x)$, $g(x)$ таких, що для всіх чисел x, y виконана рівність: $f(xy) = f(x) + g(x)f(y)$.

11 клас

1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$

($[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a, $\{a\} = a - [a]$).

2. Висота CD трикутника ABC перетинає бісектрису BK цього трикутника в т. M, а висоту KL трикутника BKC - в т. N. Навколо трикутника BKN описано коло, яке перетинає сторону AB в точці $P \neq B$. Довести, що трикутник KPM рівнобедрений.

3. Довести, що для будь-яких чисел x, y, z з проміжку $(0;1]$, виконується нерівність:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+x+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{3}{x+y+z}.$$

4. Функція $f(x)$ визначена на відрізку і $[0;1]$ набуває значень з цього відрізку. Відомо, що існує таке число λ з проміжку $(0;1)$, для якого $f(\lambda) \neq 0$ та $f(\lambda) \neq \lambda$, і також $f(f(x)+y) = f(x) + f(y)$ для всіх x та y, що входять до області визначення цієї рівності.

а) Навести приклади такої функції.

б) Довести, що для будь-якого $x \in [0;1]$

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{19} = \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{98}.$$

5. Скільки дійсних коренів має рівняння:

$$\frac{2}{\pi}\arccos x = \sqrt{1-x^2} + 1?$$

6. На дошці написано числа 1,1998,1999. За один крок дозволяється витерти одне з чисел і замість нього записати різницю між його квадратом та потроєним добутком двох інших чисел. Чи можна, виконуючи такі дії, з початкового набору отримати трійку чисел, сума яких дорівнює нулю?

7. Дві кулі різних радіусів дотикаються зовнішнім чином в точці P. Дані відрізки AB і CD такі, що одна з куль дотикається до них в точках A і C, друга - в точках B і D. Нехай M і N - це проекції середин відрізків AC і BD на пряму, що проходить через центри даних куль. Довести, що $PM = PN$.

8. Нехай $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$ - це послідовність дійсних чисел така, що

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{n^2}{x_n} + \frac{x_n}{n^2} + 2, \; n \geq 1.$$ Довести, що:

а) $x_{n+1} \geq x_n$ для всіх $n \geq 4$;

б) $[x_n] = n$ для всіх $n \geq 4$ ($[a]$ означає найбільше ціле число, що не перевищує a).

39-а Всеукраїнська олімпіада
(1999 р., м. Запоріжжя)

8 клас

1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2|x|+|y|=1, \\ [|x|]+[2|y|]=2, \end{cases}$$

де $[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a.

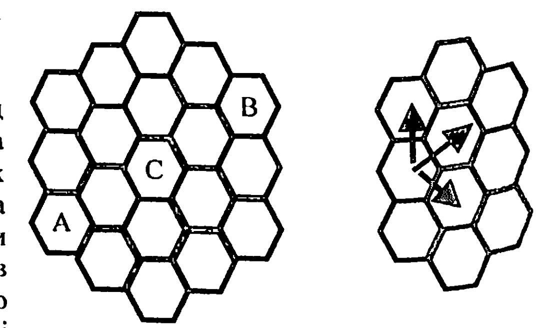
2. Чи можна в клітинки таблиці 7×7 записати цілі числа так, щоб сума чисел у будь-яких квадратах 2×2 і 3×3 таблиці ділились на 1999; а сума усіх чисел таблиці не ділилось на 1999?

3. Чи існує 2000-значне число n, яке є квадратом натурального числа і в його десятковому записі принаймні 1999 п'ятірок?

4. Чи можна число 19991999 подати у вигляді n^4+m^3-m, де n та m - цілі числа?

5. Всередині ромба $ABCD$ відмітили точку N так, що трикутник BNC - рівносторонній. Нехай K - точка перетину бісектриси кута ABN з діагоналлю AC. Довести, що $BK=KN+ND$.

6. Розглянемо фігуру " Соняшник ", яка складається з 19-клітинок, кожна з яких є шестикутником. В цій фігурі відмітили три клітинки: A, B, C. В клітинці A знаходиться фішка. За один хід вона може переміститись на одну клітинку в одному з трьох напрямків, які вказано на малюнку. Скількома різними шляхами фішка може попасти із клітинки A в клітинку B, якщо їй забороняється бути в клітинці C?



9 клас

1. Зобразити на координатній площині множину точок (x,y), що задовільняють умову: $|x^2+xy|>|x^2-xy|$.

2. Нехай x та y – додатні числа, для яких виконується нерівність $(x-1)(y-1)\ge 1$. Довести, що для сторін a,b,c довільного трикутника виконано нерівність:

$$a^2x+b^2y>c^2.$$

3. Довести, що число $9999999+1999000$ – складене.

4. Бісектриси кутів A, B та C трикутника ABC перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1 та C_1 відповідно. Нехай точка P – точка перетину прямих B_1C_1 та AB, Q – точка перетину прямих B_1A_1 та BC. Як за допомогою циркуля та лінійки відновити трикутник ABC, знаючи описане коло, точки P і Q, і знаючи, з якого боку від прямої PQ лежить вершина B?

5. Розв'язати рівняння:

$$[x]+\frac{1999}{[x]}=\{x\}+\frac{1999}{\{x\}},$$

(тут $\{x\}=x-[x]$, $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x).

6. Знайти всі пари (k,l) натуральних чисел, для яких $\frac{k^l}{l^k}=\frac{k!}{l!}$,

(тут використане позначення $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$).

7. Через фіксовану точку M всередині кола проводять дві взаємно перпендикулярні хорди AC і BD. Нехай K і L – середини хорд AB і CD відповідно. Довести, що значення виразу $AB^2+CD^2-2KL^2$ не залежить від хорд AC і BD.

8. Послідовність натуральних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ така, що $a_{a_n}+a_n=2n$ для всіх натуральних n. Довести, що всі $a_n=n$.

10 клас

1. Розв'язати рівняння:

$$\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x+\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1$$

2. Точка M лежить всередині трикутника ABC. Пряма, що паралельна до сторони AC і проходить через точку M, перетинає сторону AB в точці N, а сторону BC – в точці K. Пряма, що паралельна до сторони AB і проходить через точку M, перетинає сторону AC в точці D. Пряма, що паралельна до сторони BC і проходить через точку M, перетинає сторону AC в точці L. Ще одна пряма проходить через точку M і перетинає сторони AB та BC в точках P і R відповідно так, що $PM = MR$. Точка Q ділить відрізок DL навпіл. Знайти площу трикутника PQR, якщо $CK : CB = a$, а площа трикутника ABC дорівнює S.

3. $P(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами. Послідовність цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задовільняє таким умовам: $a_1 = a_{2000} = 1999$, $a_{n+1} = P(a_n)$ для всіх натуральних n. Знайти значення виразу:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{1999}}{a_{2000}}.$$

4. Двоє гравців по черзі записують у рядок цілі числа таким чином: перший записує довільне число a_1, потім другий –довільне число a_2, і далі кожен по черзі записує число, яке дорівнює сумі двох попередніх. Гра закінчується тоді, коли в отриманій послідовності $a_1, a_2, a_3, \ldots$ вперше зустрінуться такі значення індексів $i \neq j$, що $a_i - a_j$ та $a_{i+1} - a_{j+1}$ діляться на 1999. Виграє той, хто зробив останній хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

5. Знайти значення виразу: $[\pi] + \left[\frac{[2\pi]}{2}\right] + \left[\frac{[3\pi]}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{[1999\pi]}{1999}\right]$, де $[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a.

6. Розв'язати в натуральних числах рівняння: $m^3 - n^3 = 7mn + 5$.

7. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_6$ – числа з відрізка $[0,1]$. Довести, що виконується така нерівність:

$$\frac{x_1^3}{x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x_6^5+5} + \frac{x_2^3}{x_1^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+x_6^5+5} + \cdots + \frac{x_6^3}{x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5+5} \le \frac{3}{5}.$$

8. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC, O – довільна точка всередині трикутника $A_1B_1C_1$. Позначимо через M і N основи перпендикулярів, опущених з точки O на прямі AA_1 та BC відповідно, P і Q – з точки O на прямі BB_1 та CA відповідно, R і S – з точки O на прямі CC_1 та AB відповідно. Довести, що прямі MN, PQ та RS перетинаються в одній точці.

11 клас

1. Розв'язати рівняння:
$(\sin x)^{1998} + (\cos x)^{-1999} = (\cos x)^{1998} + (\sin x)^{-1999}$.

2. Знайти усі значення параметра k, при яких система нерівностей

$$\begin{cases} ky^2 + 4ky - 2x + 6k + 3 \le 0, \\ kx^2 - 2y - 2kx + 3k - 3 \le 0 \end{cases}$$ має єдиний розв'язок.

3. Про паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що всі його грані – ромби, а плоскі кути при вершині A рівні α. На ребрах A_1B_1, DC, BC, A_1D_1 відмітили точки M, N, P і Q відповідно так, що $A_1M = BP$ і $DN = A_1Q$. Знайти кут між лініями перетину площини (A_1BD) з площинами (AMN) і (APQ).

4. Задача 10.4.

5. Чи можна число
а) 19991998;
б) 19991999
подати у вигляді $n^4 + m^3 - m$, де n і m – цілі числа?

6. Знайти всі функції $f: R \to R$ такі, що

$$f(xy) + f(xz) - f(x)f(yz) \ge 1$$

для всіх дійсних x, y, z.

7. Нехай функція $f(x) = \mathrm{tg}(a_1x+1) + \mathrm{tg}(a_2x+1) + \cdots + \mathrm{tg}(a_{10}x+1)$, де $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ – деякі додатні числа, має період $T > 0$. Довести, що

$$T \ge \frac{\pi}{10}\min\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_{10}}\right\}.$$

8. Задача 10.8.

37-а обласна олімпіада , 1997р.

7 клас

1. У виразі $\dfrac{6*5*4*3*2*1}{8*7}=17$ розкласти замість зірочок знаки "+" або "-" так, щоб отримана рівність була вірною.

2. На скільки частин можна розбити площину чотирма прямими? Розгляньте всі можливі випадки і для кожного випадку виконайте малюнок.

3. Свіжі ягоди малини містять за масою 90% води , а сухі - 12%. Скільки вийде сухих ягід з 11 кг свіжих?

4. Для нумерації сторінок підручника використали 312 цифр. Скільки сторінок в цій книзі?

5. Пофарбований куб із стороною 12см розрізали на кубики із стороною 2 см . Скільки кубиків мають пофарбовані три грані, скільки - дві і у скількох лише одна грань пофарбована? Скільки кубиків зовсім непофарбовані?

8 клас

1. Шахіст зіграв 40 партій в шахи і отримав в сумі 25 очок (за кожну перемогу давалось 1 очко, за нічию - 0,5 очка, за поразку - 0 очок). Знайти різницю між кількістю його перемог та кількістю його поразок.

2. Знайти усі набори ненульових цифр a,b,c ,.для яких виконується рівність $\overline{a,b}=a+b+c$ (тут $\overline{a,b}$ означає число "a-цілих і b десятих").

3. AE - бісектриса в трикутнику ABC . (Точка D лежить на стороні AC таким чином, що $\angle DBC=\angle A+\angle C$). Довести, що DE - бісектриса кута BDC .

4. На Марсі 2000 країн і для кожної їхньої четвірки принаймні одна з цієї четвірки ворогує з трьома іншими. Знайти найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма одразу.

9 клас

1. Розв'язати рівняння: $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1$.

2. Довести, що для довільного a , $1<a<2$, площа фігури, обмеженої графіками функцій $y=|x-1|$ і $y=|2x-a|$ менша, ніж $1/3$.

3. Дано цілі числа a, b, c такі, що ($a^2+b^2+c^2$) ділиться на 6. а ($ab+bc+ac$) ділиться на 3. Довести, що ($a^3+b^3+c^3$) ділиться на 6.

4. В чотирикутник $ABCD$ вписано коло з центром в т. O . Через точки A , B , C , D перпендикулярно до OA , OB , OC , OD проведено прямі l_a,l_b,l_c,l_d відповідно. Прямі l_a і l_d перетинаються в т. K , l_b і l_c в т. L, l_d і l_c в т. M , l_d і l_a в т. N .

а) Доведіть, що KM і LN перетинаються в т. O .

б) Нехай довжини OK , OL , OM рівні p,q,r відповідно. Знайти довжину ON .

5. Шахівницю 8×8 покрито 32-а плитками доміно (плитки не виходять за межі шахівниці, не перекривають одна одну і кожна накриває рівно дві клітинки). Плитка називається горизонтальною, коли її довша сторона паралельна горизонтальній стороні дошки. Горизонтальна плитка називається чорно-білою, якщо ліва з двох накритих клітинок чорна і біло-чорною в іншому випадку. Довести, що кількість чорно-білих горизонтальних плиток покриття рівна кількості біло-чорних.

10 клас

1. При яких дійсних значеннях параметра a рівняння

$$|x-2|-|x+1|=a$$

має хоча б один цілий розв'язок ?

2. В трикутнику ABC через AA_1, BB_1, CC_1 позначено висоти, а через AA_2, BB_2, CC_2 - медіани. Доведіть, що довжина ламаної $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ дорівнює периметру ΔABC .

3. Для фіксованого простого числа p знайти всі пари (x,y) цілих чисел, що задовільняють співвідношення

$$p(x+y)=xy.$$

4. Точки M та N відмічено на стороні AB трикутника ABC. Відомо, що радіуси кіл, описаних навколо ΔAMC та ΔBNC, співпадають. Також співпадають радіуси кіл, описаних навколо ΔANC та ΔBMC. Доведіть, що ΔABC рівнобедрений.

5. За круглим столом сидять 30 учнів. Кожен з них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 учнів сказали, що рівно один з їх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди брехуни. Скільки брехунів сидить за столом ?

11 клас

1. Знайти всі дійсні числа x, y такі, що $x \geq y \geq 1$ та $2x^2 - xy - 3x + y + 1 = 0$.

2. Чи можна з кубиків розмірами $1 \times 1 \times 1$ склеїти фігуру, площа поверхні якої дорівнює 1997? (При склеюванні кубики з'єднуються так, що їх відповідні грані повністю співпадають).

3. Про функцію f : $R \to R$ відомо, що множина значень суми $f(x) + f(2x)$, $x \in R$, скінченна. Чи обов'язково множина значень $f(x)$, $x \in R$, скінченна ?

4. Двоє гравців у виразі

$$a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \cos 4x + \ldots + a_{1996} \cos 1996x + a_{1997} \sin 1997x$$

по черзі вибирають ще не обрані a_i та замінюють їх будь-якими дійсними числами. Коли всі a_i замінені, отримується функція $f(x)$. Якщо рівняння $f(x) = 0$ має корінь на інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то виграє той, хто почав гру. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш ?

5. Дано опуклий п'ятикутник, в якому кожна діагональ паралельна одній із сторін. Довести, що відношення довжини діагоналі до довжини відповідної паралельної сторони є одним і тим же для всіх п'яти пар таких відрізків. Знайти величину цього відношення.

38-а обласна олімпіада, 1998 р.

7 клас

1. Дано два баки ємністю по 10л з соляним розчином 10%-ої та 15%-ої концентрації та посудини ємністю 3л, 4л, 5л. Як з допомогою переливань отримати 1л 12%-го соляного розчину?

2. Чи можна розмістити в таблиці розміром 3×4 числа -1 та 1 так, щоб усі 7 сум чисел, що стоять в одному рядку або в одному стовпчику були різними?

3. Скільки є нескоротних дробів з чисельником 1997, менших, ніж $\dfrac{1}{1997}$ і більших, ніж $\dfrac{1}{1998}$?

4. Дано смужку 1×17, клітини якої пронумеровані послідовними натуральними числами. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку у смужці або деякі дві послідовні, де перша з них парна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш - починаючий чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.

8 клас

1. Сума трьох тризначних чисел $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$ дорівнює 1998. Знайдіть усі трійки таких чисел.

2. Чи буде число $11\ldots155\ldots56$ (1998 одиниць та 1997 п'ятірок) квадратом цілого числа?

3. Через точку дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

4. На дошці розміром 4×4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утвориться квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш - той, хто починає, чи його суперник? Відповідь обгрунтуйте.

9 клас

1. Довести, що число $11\ldots1$ (1998 одиниць) ділиться на 37.

2. Через точки дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

3. Дано смужку 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку у смужці або деякі дві послідовні. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш - починаючий чи його суперник?

4. На координатній площині відмітили п'ять точок: $(-2;8)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ та $\left(\frac{1}{4};\frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість із цих точок може належати графіку рівняння: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$?

5. З квадратним тричленом ax^2+bx+c дозволяється робити такі дії:

1) замінити в ньому x на $x-\lambda$, де λ - довільне дійсне число;

2) замінити його на тричлен $cx^2+(b+2c)x+(a+b+c)$.

Чи можна за допомогою таких дій із тричлена x^2-3x-4 одержати тричлен x^2-2x-5.

10 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $\frac{n^2}{n+m}$ - ціле число. Доведіть, що число $\frac{m^2}{m+n}$ також ціле число.

2. Доведіть, що якщо в чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою, то цей чотирикутник - трапеція або паралелограм.

3. Знайти всі трійки дійсних чисел x,y,z, які задовільняють трьом рівностям: $x=\sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|}$, $y=\sqrt{\frac{1+z}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

4. У новосформованому 10 класі деякі учні виявились вже знайомими між собою, а деякі - ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилась на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки в класі хлопців і скільки дівчат, якщо усього не більше 40 учнів?

5. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну й ту саму площину є паралелограмами. Чи можна стверджувати, що власне $ABCD$ - паралелограм?

11 клас

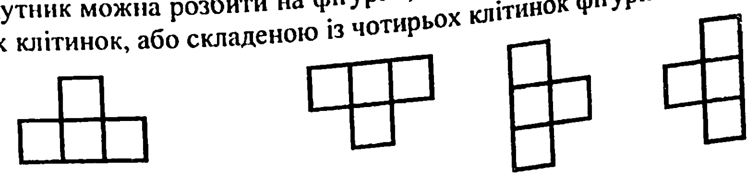
1. Дано невід'ємні дійсні числа x та y, які задовільняють умові: $x-\sqrt{x}\le y-\frac{1}{4}\le x+\sqrt{x}$. Довести, що для цих чисел виконується також і така нерівність: $y-\sqrt{y}\le x-\frac{1}{4}\le y+\sqrt{y}$.

2. Розв'язати рівняння: $\cos 12x=5\sin 3x+9tg^2x+ctg^2x$.

3. Відомо, що на сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ існують такі точки K і M відповідно, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P - точка перетину прямих KM та BD. Знайти відношення площ чотирикутників $ABCD$ та $ABCP$.

4. Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і приймає дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x)=\frac{1}{2}$ має принаймні один корінь та: $f(x)-f(y)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x\ne 0$ та $y\ne 0$. Визначити $f(-1)$.

5. Прямокутник розміром $2^{1998}\times 1998^2$ поділено на одиничні квадратики - клітинки. Довести, що кількість способів, якими цей прямокутник можна розбити на фігурки, кожна з яких є або прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок фігуркою вигляду:



є числом непарним. (Способи, які відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними).

39-а обласна олімпіада, 1999 р.

8 клас

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=1999.$$

2. Чи існують цілі m та n такі, що
$(m+1998)(m+1999)+(m+1999)(m+2000)+(m+1998)(m+2000)=n^2$.

3. Дано трапецію $ABCD$, $AD||BC$. Відомо, що бісектриса кута $\angle ABC$ перетинає середню лінію трапеції в т. P, а основу AD в т. Q. Знайти $\angle APQ$.

4. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких 99 з цих чисел додатна. Довести, що сума всіх чисел є додатна.

9 клас

1. Довести, що десятковий запис числа 1999^6 містить принаймні три однакові цифри.

2. Розв'язати рівняння:

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)=\left(1+x+x^2+x^3\right)^2.$$

3. Всередині гострокутного ΔABC відмітили точку H так, що $AB^2+HC^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Довести, що H - точка перетину висот ΔABC.

4. Нехай α - дійсне число, відмінне від нуля. Відомо, що числа x_1 та x_2 - дійсні корені рівняння $x^2+\alpha x-\dfrac{1}{2\alpha^2}=0$. Довести, що $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

5. Три цілих числа a, b, c записати в ряд a, b, c. Під цими числами записати нову трійку: $a-b$, $b-c$, $c-a$ і т.д. Довести, що серед чисел рядків, які розташовані нижче сьомого, не може зустрітись ні 1999, ні 2000.

10 клас

1. Знайти всі трійки дійсних чисел x, y, z, що задовільняють умову:

$$x+yz=y+zx=z+xy=6.$$

2. Нехай O - центр кола, вписаного у довільний ΔABC, S - центр кола, описаного навколо ΔAOC. Довести, що точки B, O, S лежать на одній прямій.

3. Зобразити на координатній площині XOY множину всіх точок, що задовільняють рівняння: $x^2=y+\sqrt{y+x}$.

4. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ... така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k нескінченна послідовність $k+a_1$, $k+a_2$, $k+a_3$, ... містить лише скінченну кількість простих чисел (можливо, жодного)?

5. В країні n^2 міст, розташованих у вигляді квадрата $n\times n$, причому відстань між сусідніми містами рівна 10 км. Міста з'єднані системою доріг, що складається з прямолінійних ділянок, паралельних сторонам квадрата. Яка найменша можлива довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста можна добратися до довільного іншого?

11 клас

1. Розв'язати рівняння:

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^6\right)^2.$$

2. Нехай α та β - гострі кути ($\alpha,\beta\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$), для яких виконується рівність $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Довести, що $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Чи існує функція f, яка визначена на множині всіх дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовільняє наступні обидві умови:

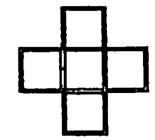
а) при всіх $x\in R$ виконується $f(x)\geq f(x+\sin(x))$;

б) рівняння $f'(x)=0$ має скінченну кількість коренів.

4. Нехай точка P знаходиться в середині гострокутного ΔABC. На сторонах AC і BC відмітили такі точки M і K відповідно, що $\angle PMC=\angle PKC=90^\circ$. Довести, що якщо т. M та K рівновіддалені від середини AB, то $\angle PBC=\angle PAC$.

5. Чи можна шахівницю розміру 7×7, з якої вилучено 4 кутові клітини, так заповнити цілими числами (у кожну клітину записується одне

ціле число), сума яких дорівнюватиме 199919991999, щоб у будь-якій п'ятиклітинковій фігурці вигляду, зображеного на малюнку, сума чисел була від'ємною?



"Те, що ви були змушені відкрити самостійно, залишає у вашому розумі стежку, якою ви зможете знову скористатись, коли в цьому виникне необхідність."

Г. Ліхтенберг.

Частина III. Задачі для самостійного розв'язування

Задачі цієї частини не розбиті ні за тематикою, ні за рівнем складності, тому кожна з них потребує особливого підходу при її розв'язуванні, знаходження якого вимагає інтенсивної розумової праці.

8 клас

1. Знайдіть три попарно взаємно прості числа такі, що сума будь-яких двох з них ділиться на третє.
2. Мандрівник виходить з готелю о 3-ій годині дня і повертається о 9-ій годині вечора за тим же маршрутом. Відомо, що по рівним ділянкам шляху він йде із швидкістю 4 км/год, вгору – 3 км/год і вниз – 6 км/год. Знайти відстань, яку пройшов мандрівник, якщо він йшов без відпочинку.
3. Довести, що не існує цілих чисел x, y, z, не рівних нулю одночасно і таких, що

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

4. Обчислити суму

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx},$$

якщо відомо, що $xyz = 1$.

5. Картки послідовно пронумеровані натуральними числами від 1 до $2n+1$. Яку найбільшу кількість карток можна вибрати так, щоб жоден з номерів не дорівнював сумі якихось двох інших номерів карток?

6. Знайти всі трійки натуральних чисел, які мають таку властивість: добуток будь-яких двох з цих чисел в сумі з 1 ділиться на третє число.

7. Довести, що для кожного натурального n число $f(n)=5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

8. По колу записано 100 різних чисел, що не дорівнюють нулю. Довести, що серед цих чисел знайдуться такі три числа a,b,c які йдуть підряд, що $b(a-c)>0$.

9. Ваня, Андрій і Олексій грали в теніс. Той, хто програв партію, кожен раз звільняв місце тому, хто в ній не приймав участі. За день Ваня зіграв 10 партій, Андрій – 21 партію. Скільки партій зіграв Олексій?

10. Довести, що при даній сумі додатних чисел їх добуток максимальний тоді, коли всі вони рівні.

11. Знайти найменше значення виразу

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$$

за умов $1\le x\le y\le z\le t\le 100$.

12. Виконати множення

$$(x^2-x+1)\cdot(x^4-x^2+1)\cdot\ldots\cdot(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1).$$

13. Дано многочлен $f(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ з цілими коефіцієнтами a_1,a_2,a_3,a_4. Відомо, що при деяких цілих m і n $|f(m)-f(n)|=1$. Довести, що $|m-n|=1$.

14. Усередині прямого кута дано точку A. Побудувати рівносторонній трикутник, одною з вершин якого є точка A, а дві інші лежать на сторонах кута (по одній на кожній стороні).

15. Квадрат 8×8 складений із кісточок доміно **1×2.** Доведіть, що якісь дві з них утворюють квадрат **2×2.**

16. Що більше: 2^{300} чи 3^{200} ?

17. Що більше: 50^{99} чи $99!$?

18. Чи існують такі натуральні a і b, що $ab(a-b)=45045$?

19. Пряму пофарбовано в два кольори. Доведіть, що знайдеться відрізок ненульової довжини, середина і кінці якого пофарбовані в один колір.

20. Чи можна розташувати по колу 15 цілих чисел так, щоб сума будь-яких чотирьох чисел підряд дорівнювала 1 або 3?

21. Знайдіть два звичайних дроби – один з знаменником 8, а другий з знаменником 13 такі, що вони не рівні нулю, а модуль їх різниці найменший.

22. Доведіть, що якщо середня лінія чотирикутника дорівнює півсумі основ, то такий чотирикутник – трапеція.

23. Довести, що довільні 10 точок на площині є кінцями п'яти відрізків, що не перетинаються.

24. В краплину води, яка містить 1000 бактерій, потрапив один вірус. Кожної хвилини відбувається наступне: кожен вірус знищує одну бактерію, після чого кожна бактерія ділиться на дві бактерії, а кожен вірус – на два віруси. Чи вірно, що через деякий час не залишиться жодної бактерії?

25. Є 100 різнокольорових перлин. Відомо, що перлин кожного кольору може бути не більше 50. Довести, що з цих перлин можна скласти намисто, у якому будь-які дві сусідні перлини мають різний колір.

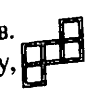
9 клас

1. Чи існує натуральне число, добуток цифр якого дорівнює 1980?

2. В гострокутному трикутнику ABC проведені висота CH і медіана BK, причому $BK=CH$, а також кути KBC і HCB рівні. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

3. Прості числа p і q та натуральне число n задовільн... співвідношення $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=1$. Знайдіть ці числа.

4. Доведіть, що натуральне число, десятковий запис якого складається із однієї одиниці, двох двійок, трьох трійок, … , дев'яти дев'яток, не може бути точним квадратом.

5. Клітинки аркуша зошита розфарбовано у вісім кольорів.  Доведіть, що знайдеться фігура вигляду, зображеного на малюнку, всередині якої є дві клітини одного кольору.

6. Побудувати прямокутний трикутник за довжинами m_a,m_b відрізків медіан, опущених на його катети.

7. Довести, що для будь-яких дійсних чисел a,b,c,d справджуєть... нерівність

$$(a+c)(b+d)\le\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

8. Годинникова і хвилинна стрілки годинника не відрізняються одна від одної. Скільки разів на добу неможливо точно встановити час? (Вважати, що розміщення стрілок на циферблаті можна встановити як завгодно точно).

9. Додатні числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ утворюють арифметичну прогресію. Довести нерівність

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{2n}{a_1 + a_n}.$$

10. Нехай h_a, h_b, h_c – висоти, m_a, m_b, m_c – медіани гострокутного трикутника, проведені до сторін a, b, c; r і R – радіуси вписаного і описаного кіл. Довести, що

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} < 1 + \frac{R}{r}.$$

11. Довести, що обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

12. Нехай a, b, c – довжини сторін трикутника, а S – його площа. Відомо, що $S = \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)$. Довести, що $\angle C = 135°$.

13. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x.$$

14. Нехай a, b, c – додатні числа, сума яких дорівнює одиниці. Довести, що

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

15. Довести, що для кожного $n \in N$ виконується рівність

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right],$$

де через $[x]$ позначено цілу частину числа x.

16. Довести, що для сторін a, b, c довільного трикутника виконується нерівність $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| < 1$.

17. Нехай $p(x)$ – довільний многочлен. Довести, що многочлен $q(x) = (x-1)^{1980} \cdot p(x)$ має не менше ніж 990 від'ємних коефіцієнтів.

18. Відомо п'ять послідовних сторін описаного шестикутника. Знайти шосту сторону.

19. Довести, що якщо число ділиться на 99, то сума його цифр не менша за 18.

20. Президент акціонерного товариства на зборах акціонерів сказав, що за кожні п'ять послідовних місяців витрати фірми перевищували прибутки, але за весь рік прибуток перевищує витрати. Чи повинні акціонери подати на нього в суд?

21. Знайдіть на даній прямій точку, з якої даний відрізок видно під найбільшим кутом.

22. На площині відмічено два мільйони точок. Чи існує пряма, з кожної сторони якої знаходиться рівно по мільйону точок?

23. Знайдіть суму $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}$.

24. Доведіть, що при $n > 3$ вписаний чотирикутник можна розрізати на n вписаних чотирикутників.

25. Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{n}. \end{cases}$$

10 клас

1. Дано n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, кожне з яких дорівнює $+1$ або -1, та $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Довести, що n ділиться на 4.

2. Довести, що при будь-якому натуральному n

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right) < 2.$$

3. Натуральне число y одержано з числа x перестановкою цифр. Відомо, що $x + y = 10^{200}$. Доведіть, що x ділиться на 50.

4. Площину розфарбовано: а) в **2**; б) в **3**; в) в **100** кольорів. Доведіть, що знайдеться прямокутник з вершинами одного кольору.

5. На площині дано 25 точок. Відомо, що з будь-яких трьох точок можна вибрати дві, відстань між якими менша 1. Доведіть, що серед них точок знайдеться 13, що лежать в колі радіуса 1.

6. Шахіст грає не менше однієї партії в день і не більше 12 щотижня. Доведіть, що протягом року знайдуться декілька днів, що йдуть підряд, протягом яких він зіграв рівно 20 партій.

7. В коробці – 1001 сірник. За хід можна витягнути із коробки сірники в кількості p^n штук (де p – будь-яке просте число, $n = 0,1,2,3,\ldots$). Виграє той, хто бере останній сірник. Який з гравців (перший чи другий) може забезпечити собі виграш?

8. Відмітьте на площині 6 точок так, щоб будь-які три з них лежали у вершинах рівнобедреного трикутника.

9. В ряд викладено 100 чорних і 100 червоних куль, причому найлівіша і найправіша – чорні. Доведіть, що можна вибрати зліва підряд кілька куль (але не всі) так, що серед них кількість червоних дорівнюватиме кількості чорних.

10. Число x отримано перестановкою цифр числа y. Довести, що сума цифр числа $5x$ дорівнюватиме $5y$.

11. Серед чисел в межах мільйону яких більше: тих, десятковий запис яких містять цифру 1, чи тих, десятковий запис яких не містить цифру 1.

12. Чи може $3^n + 1$ ділитись на 10^{10}?

+ 13. Чи може десятковий запис степеня двійки закінчуватись чотирма однаковими цифрами?

14. Довести, що для довільного трикутника виконується нерівність

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C \le p,$$

де a,b,c – сторони трикутника, A,B,C – відповідні їм протилежні кути, p – півпериметр.

15. Обчислити значення виразу

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin 99x,$$

якщо відомо, що $\cos 100x + 2\sin x = 1$.

16. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = \ldots = x_{99}^3 + x_{100} = x_{100}^3 + x_1, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 100. \end{cases}$$

17. Нехай a,b,c – додатні числа. Довести, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

18. Довести, що сума цифр числа 5^{317} менша ніж 1990.

19. Відомо, що рівняння $x^{12} - abx + a^2 = 0$ має корінь $x_0 > 2$. Довести, що $|b| > 64$.

20. Про числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ відомо, що $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = 1$. Довести, що

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_9 a_{10} + a_{10} a_1 \ge -1.$$

21. Відрізок $[0;1]$ розбито на частини раціональними точками $\frac{p}{q}$, де p,q – натуральні числа і $q \le 100$. Довести, що серед цих частин знайдеться вісім, довжина кожної з яких не менша **0,003**.

22. Нехай $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le \frac{1}{2}$. Довести, що

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \ge \frac{1}{2}.$$

23. Довести, що для кожного натурального числа $m > 2$ сума всіх натуральних чисел, менших від m і взаємно простих з m, кратна m.

24. Нехай a,b,c – сторони трикутника та $a+b+c=1$. Довести нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

25. Розв'яжіть рівняння: $(x-1)(x+1)^3 = x^2 + 2$.

11 клас

1. В квадраті 1×1 розміщено кілька кіл, сума радіусів яких дорівнює **0,6**. Доведіть, що існує пряма, паралельна стороні квадрата, яка перетинає не менше ніж два кола.

2. Король за хід може поставити по хрестику в будь-які дві вільні клітини нескінченного аркуша паперу. Міністр за хід може поставити нулик у будь-яку вільну клітину. Чи може король поставити 100 хрестиків у ряд?

3. Чи можна записати в ряд 10 чисел так, щоб сума будь-яких п'яти чисел підряд була додатною, а сума будь-яких семи підряд – від'ємною?

4. Доведіть, що серед будь-яких 39 послідовних натуральних чисел знайдеться одне, сума цифр якого ділиться на 11.

5. В клітинах прямокутної таблиці розставлено дійсні числа. Дозволяється одним ходом змінити знак у всіх чисел, що стоять в будь-якому рядку чи будь-якому стовпчику. Доведіть, що такими операціями можна добитись того, щоб сума чисел в таблиці була невід'ємною.

6. Послідовність $\{a_n\}$ така, що $a_1 = 1$, і $a_{n+1} - a_n$ дорівнює 0 або 1 при будь-якому n. Відомо, що $a_n = \frac{n}{1000}$ для деякого n. Доведіть, що $a_m = \frac{m}{500}$ для деякого m.

7. Натуральні числа a і b такі, що $a^2 + ab + 1$ ділиться на $b^2 + ab + 1$. Доведіть, що $a = b$.

8. Про числа a, b, c відомо, що $a + b + c = 7$ та $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{7}{10}$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

9. Знайдіть максимум виразу $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

10. Чи періодична функція:

$$y = \cos x + \cos(x\sqrt[5]{2}) - \cos(x\sqrt[5]{4}) + \cos(x\sqrt[5]{8})?$$

11. Кожен член послідовності дорівнює арксинусу попереднього члена. Довести, що всі вони – нулі.

12. На відрізку [0,1] задана функція $f(x)$.Відомо, що вона невід'ємна і $f(1) = 1$. Крім того, для будь-яких $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ таких що $x_1 + x_2 \le 1$ виконується нерівність $f(x_1 + x_2) \ge f(x_1) + f(x_2)$. Доведіть, що для всіх $x \in [0;1]$ виконується нерівність

$$f(x) \le 2x.$$

13. Чи існує функція, яка неперервна на всій числовій осі і кожне своє значення приймає рівно два рази?

14. Знайдіть всі такі функції $f(x)$, що для будь-яких x, y виконується

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$

15. Доведіть, що при непарному натуральному k сума $(1^k + 2^k + \ldots + n^k)$ ділиться на $(1 + 2 + \ldots n)$.

16. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки простору до вершин куба з ребром a не менша $4\sqrt{3}a$.

17. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числа, які належать проміжку [0,1]. Довести, що

$$0 \le (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) + (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \le 2^n.$$

18. Розв'язати рівняння

$$\cos x\sqrt{1+\sin^2 x} + \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin^4 x - \cos^2 x} = 1.$$

19. Довести, що для всіх $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ має місце нерівність

$$x\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

20. Знайти всі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x + \cos y + \cos z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

21. Довести, що для будь-яких α, β, γ хоча б одне з чисел $\sin\alpha\cos\beta, \sin\beta\cos\gamma, \sin\gamma\cos\alpha$ не більше $\frac{1}{2}$.

22. Знайти всі натуральні числа m і n, для яких виконується рівність

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{m} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

23. Знайдіть найбільше значення виразу $\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\phi$, якщо $\alpha + \beta + \gamma + \phi = \pi$.

24. Розв'яжіть рівняння: $13 + 4\cos 2x = 9\cos x + 6\sin 2x$.

25. Розв'язати в цілих числах рівняння: $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

Поради учаснику олімпіади

1. Уважно прочитайте умови задач і визначте порядок, в якому будете їх розв'язувати (краще починати з легших задач, які, як правило, розміщені перші).
2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не вибирайте найзручніший для себе, а зверніться за консультацією до членів журі.
3. Якщо неясно, чи вірне деяке твердження, спробуйте його довести або спростувати.
4. Не зациклюйтесь на одній задачі. Якщо немає ідеї розв'язку, то задачу краще (хоча б на деякий час) залишити.
5. Розв'язавши задачу, зразу ж оформляйте розв'язок. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.
6. Кожен, навіть очевидний, крок розв'язання потрібно записувати. Громіздкі розв'язки краще записувати у вигляді кількох тверджень (лем).
7. Перед тим, як здати роботу, уважно перечитайте її "очима членів журі" – чи зможуть вони в ній розібратись?

Критерії оцінювання олімпіадних робіт

Ціль математичної олімпіади – виявити учнів, здатних нестандартно (і при цьому вірно) думати, здатних застосовувати набуті в школі знання до розв'язування "нешкільних" задач. Тому часто при перевірці робіт описки та дрібні помилки прощаються (це не відноситься до олімпіад, які проводяться вищими навчальними закладами і за результатами яких учасники зараховуться студентами цих закладів). Традиційною є наступна система оцінок:

$+$ (або 7 балів) – задача розв'язана правильно;

$+_{\circ}$ (або 6 балів) – задача розв'язана, але є дрібні зауваження до розв'язку;

$\pm$ (або 5 балів) – задача розв'язана в цілому (недоліки розв'язку легко усуваються);

$+/2$ (або 4 бали) – задача розв'язана "наполовину", тобто є значний прогрес в розв'язуванні, але повний розв'язок вимагає інших істотних ідей;

$\mp$ (або 3 бали) – задача нерозв'язана, але підхід до розв'язку правильний;

$-_{\bullet}$ (або 2 бали) – задача нерозв'язана, але є деякі розумні міркуван

$-$ (або 1 бал) – задача розв'язана неправильно;

0 (0 балів) – задача не розв'язувалась або розв'язок не записувався;

! (або 1 додатковий бал) – розв'язок задачі містить яскраві ідеї.

При цьому часто зарахованими вважаються лише задачі, розв'язок яких оцінено $+, +_{\bullet}, \pm, +/2$.

Список літератури

Основна література

1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. - Москва, "Наука", 1975.
2. Васильев Н. Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. - Москва, "Наука", 1988.
3. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.. Заочные математические олимпиады. - Москва, "Наука", 1986.
4. Вишенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. - Издательство при Киевском университете, Киев, 1984.
5. Вишенський В. А., Карташов М. В., Михайловский В. І., Ядренко М. Й. Київські математичні олімпіади 1984-1993 р. р. – Київ, "Либідь", 1993.
6. Вишенський В. А., Ганюшкін О. Г., Карташов М. В., Михайловський В. І., Призва Г. Й., Ядренко М. Й. Українські математичні олімпіади. – Київ, "Вища школа", 1993.
7. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. - Москва, "Просвещение", 1986.
8. Гєнкін С. А., Ітенберг І. В., Фомін Д. В. Ленінградські математичні гуртки. – Київ, "ТВіМС", 1997.
9. Конягин С. В., Тоноян Г. А., Шарыгин И. Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады. - Москва, "Наука", 1987.
10. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. – Київ, Абрис, 1994.
11. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады. - Москва, "Мир", 1976.
12. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування. - Львів, "Євросвіт", 1999.
13. Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. – Москва, "Просвещение", 1976.
14. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Части І и ІІ. - Москва, "Наука", 1991.
15. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. - Москва, "Наука", 1989.
16. Сивашинкий И. Х. Неравенства в задачах. - Москва, "Наука", 1967.

17. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. - Москва, "Мир", 1978.
18. Яковлев Г.Н., Купцов Л.П., Резниченко С.В., Гусятников П.Б. Всероссийские математические олимпиады школьников. - Москва, "Просвещение", 1992.
19. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. - Вінниця, видання Вінницького пед. ун-ту, 1998.

Додаткова література

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. - Москва, "Просвещение", 1979.
2. Бородін О.І. Теорія чисел. – Київ, "Вища школа", 1970.
3. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – Київ, "ТВіМС", 2000.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи (Популярные лекции по математике). - Москва, "Наука", 1969.
5. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. - Київ, "Евроиндекс", 1995.
6. Дороговцев А. Я., Ядренко М. Й. Метод координат. - Київ, "Вища школа", 1972.
7. Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена. - Москва, "Квант" 4(1990).
8. О.С.Істер, Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. – Харків: ТО "Гімназія", НМЦ "Світ дитинства", 1999. –184 с.
9. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решать нестандартные задачи (60-я Московкая мат. ол-да. Подготовительный зборник). Москва. "МЦНМО", 1997.
10. Кругликов А.В., Плакса С.А. Сборник заданий для довузовской подготовки по математике. – Київ: НТУУ "КПІ", 1999.
11. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности (Популярные лекции по математике). - Москва, "Наука", 1975.
12. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир И. С. Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач. - Київ, "Александрия", 1993.
13. Недокіс В. А. Розв'язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановок. - У світі математики, 2(1996), №4.
14. Недокіс В. А. Про функціональні рівняння Коші. - У світі математики, 4(1998), №2.
15. Радченко В. М. Про доведення нерівностей. - У світі математики 2(1996), №1.

16. Тадєєв В.О. Розв'язування планіметричних задач векторно-координатним методом. Навчальний посібник для учнів. (Бібліотечка заочної математичної школи). - Тернопіль, 1998.

17. Федак І.В. Цілі числа. Комбінації. Принцип Діріхле. Ігри. Посібник для підготовки до математичних олімпіад. (Бібліотечка заочної математичної школи). - Тернопіль, 1997.

18. Федак І.В. Розв'язування рівнянь. Доведення нерівностей. Посібник для підготовки до математичних олімпіад. (Бібліотечка заочної математичної школи). - Тернопіль, 1997.

19. Федак І.В. Довжини, кути, площі, цікаві лінії і точки. Посібник для підготовки до математичних олімпіад. (Бібліотечка заочної математичної школи). - Тернопіль, 1998.

20. Хацет Б. І., Ушаков Р. П. Опуклі функції та нерівності. - Київ, "Вища школа", 1986.

21. Шклярский Д.О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. - Москва, "Наука", 1967.

22. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле. (Бібліотечка фізико-математичної школи) - Київ, "Вища школа", 1985.

23. Яглом И. М. Геометрические преобразования. Т.1. - Москва, "Гостехиздат", 1955.

Науково-популярна література

1. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – Москва, "Мир", 1971.

2. Гарднер М. Крестики-нолики. – Москва, "Мир", 1971.

3. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - Москва, "Наука", 1976.

4. Пойа Д. Математическое открытие. - Москва, "Наука", 1976.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Сарана Олександр Анатолійович

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ: ПРОСТЕ І СКЛАДНЕ ПОРУЧ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник

Житомир
Поліграфічний центр Житомирського педуніверситету

Надруковано з оригінал-макета автора.
Підписано до друку 20.02.2002. Формат 60x90/16. Ум.друк.арк.16.0. Обл.вид.арк.18.5.
Друк різографічний. Зам.39. Наклад 300.

Поліграфічний центр ЖДПУ, вул. Велика Бердичівська, 40