К. І. Швецов, Г. П. Бевз

ДОВІДНИК З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Арифметика, алгебра

НАУКОВА ДУМКА

КИЇВ—1967

Дробові числа

Величини й пропорції

III. АЛГЕБРА

Раціональні числа та алгебраїчні вирази

Ірраціональні числа та алгебраїчні вирази

Рівняння і нерівності

Функції та графіки

ПЕРЕДМОВА

«Довідник з елементарної математики (арифметика, алгебра)» складається з трьох частин: таблиці, арифметика і алгебра. Він складений у відповідності з програмою з математики для загальноосвітніх середніх шкіл.

Що знайде читач у довіднику? Означення і опис понять, формулювання правил, теорем, законів, властивостей, найважливіші формули, найважливіші типи задач і прикладів, їхнє розв'язання, а також деякі методичні вказівки. В розділі «Алгебра» значна увага приділяється розв'язуванню лінійних, квадратних, біквадратних і інших типів рівнянь. Достатнє місце займає розв'язання різних систем рівнянь. Тут дано графіки елементарних функцій і наведено графічні способи розв'язання рівнянь і нерівностей. Довідник має також таблиці, які використовуються в середній школі (квадрати, квадратні корені, куби, десяткові логарифми, антилогарифми, факторіали, біномні коефіцієнти тощо). Є в книзі багато історичних довідок, підготовлених старшим науковим співробітником Інституту історії АН УРСР О. М. Боголюбовим.

У довіднику подано відомості про способи обчислення на рахівниці, арифмометрі і логарифмічній лінійці.

Як користуватися довідником? Якщо читач хоче звернутись до порівняно широкого кола питань, наприклад до комплексних чисел, арифметичних задач, методу математичної індукції, можна користуватися змістом. Якщо читача зацікавлять які-небудь вузькі поняття, термін, формула, краще навести довідку в алфавітному покажчику, вміщеному в кінці книги. В ньому числа вказують номери сторінок, на яких розкривається зміст даного поняття, наводиться потрібна формула і т. ін.

Роблячи першу спробу створити довідник такого типу, автори усвідомлюють, що в ньому можуть бути прогалини і недоліки. Всі зауваження і пропозиції будуть сприйняті з вдячністю. Їх можна направляти на адресу: Київ, 4, Репіна 3, видавництво «Наукова думка».

І. ТАБЛИЦІ

§ 1. Латинський алфавіт

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	ге (же)	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	ха (аш)	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

§ 2. Грецький алфавіт

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
$A\alpha$	$A\alpha$	альфа	$N\nu$	$N\nu$	ню (ні)
$B\beta$	$B\beta$	бета	$\Xi\xi$	$\Xi\xi$	ксі
$\Gamma\gamma$	$\Gamma\gamma$	гамма	$O o$	$O o$	омікрон
$\Delta\delta$	$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\pi$	$\Pi\pi$	пі
$E\varepsilon$	$E\varepsilon$	епсилон	$P\rho$	$P\rho$	ро
$Z\zeta$	$Z\zeta$	дзета	$\Sigma\sigma$	$\Sigma\sigma$	сигма
$H\eta$	$H\eta$	ета	$T\tau$	$T\tau$	тау
$\Theta\theta\vartheta$	$\Theta\theta\vartheta$	тета	$\Upsilon\upsilon$	$\Upsilon\upsilon$	іпсилон (юпсилон)
$I\iota$	$I\iota$	йота	$\Phi\varphi$	$\Phi\varphi$	фі
$K\varkappa$	$K\varkappa$	каппа	$X\chi$	$X\chi$	хі
$\Lambda\lambda$	$\Lambda\lambda$	ламбда	$\Psi\psi$	$\Psi\psi$	псі
$M\mu$	$M\mu$	мю (мі)	$\Omega\omega$	$\Omega\omega$	омега

§ 3. Деякі математичні позначення

$=$	дорівнює	наприклад $a = b$
$\neq$	не дорівнює	» $a \neq b$
$\equiv$	тотожньо дорівнює	» $a + b \equiv b + a$
$\approx$	наближено дорівнює	» $a \approx b$
$>$	більше	» $5 > 2$
$<$	менше	» $3 < 10$
$\geqslant$	більше або дорівнює	» $a \geqslant b$
$\leqslant$	менше або дорівнює	» $a \leqslant b$
( ), [ ], { }	дужки круглі, квадратні, фігурні	
%	процент	» 5%
‰	проміле	» $3‰$
$\vert\ \vert$	абсолютне значення	» $\vert a \vert$
$\sqrt{}$	корінь другого степеня (арифметичний)	» $\sqrt{9} = 3$
$\sqrt[n]{}$	корінь n-ого степеня	» $\sqrt[n]{a}$
$f(x)$	функція від x	» $f(3)$
!	факторіал	» $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times \times 5 \cdot 6 = 240$
$\log_b$	логарифм при основі b	» $\log_2 32 = 5$
lg	логарифм десятковий (логарифм при основі 10)	» $\lg 1000 = 3$
ln	логарифм натуральний (логарифм при основі e)	» $\ln e = 1$
$\to$	прямує до ...	» $x \to a$
lim	границя	» $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = C$
const	стала величина	» π — const
$\sum$	сума	» $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
i	уявна одиниця	» $\sqrt{-1} = i$
$\triangle$	трикутник	» $\triangle ABC$

$\angle$ або $\measuredangle$	кут	наприклад	$\angle ABC$ або $\measuredangle ABC$
$\smile$ або $\frown$	дуга	»	$\overset{\smile}{AB}$ або $\overset{\frown}{AB}$, частіше $\smile AB$
$\parallel$	паралельно	»	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	»	$AB \perp CD$
$\sim$	подібно	»	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$
π	відношення довжини кола до діаметра	»	$\pi \approx 3{,}14$
$^\circ$	градус		
$'$	мінута } кутові або дугові міри	»	$40^\circ 36' 25''$
$''$	секунда		
sin	синус	»	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	косинус	»	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
tg	тангенс	»	$\mathrm{tg}\, 45^\circ = 1$
ctg	котангенс	»	$\mathrm{ctg}\, 15^\circ 18' = 3{,}655$
sec	секанс	»	$\sec 60^\circ = 2$
cosec	косеканс	»	$\mathrm{cosec}\, 30^\circ = 2$
Arcsin	множина всіх дуг, що відповідають даному значенню тригонометричної функції	»	$\mathrm{Arcsin}\, \frac{1}{2} = 30^\circ \cdot (-1)^n + 180^\circ \cdot n$
arcsin	головне значення дуги, що відповідає даному значенню тригонометричної функції	»	$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$

§ 4. Деякі сталі

$\pi \approx 3{,}14\,159\,26536$

$\lg \pi \approx 0{,}49\,714\,98727$

$l \approx 2{,}71\,828\,18285$

$\lg l \approx 0{,}43\,429\,44819$

$\lg 2 \approx 0{,}30\,102\,99957$

§ 5. Квадрати

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	11	13	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986				6	13	19	25	31	38	44	50	56
3,1								10,05	10,11	10,18	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	2	3	4	5	6	7	7

Продовження

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,5	30,25	30,36	30,67	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14

7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2	4	6	8	10	12	14	16	18

§ 6. Квадратні корені

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,034	1,039	1,044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,1	1,049	1,054	1,058	1,063	1,068	1,072	1,077	1,082	1,086	1,091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,2	1,095	1,100	1,105	1,109	1,114	1,118	1,122	1,127	1,131	1,136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,3	1,140	1,145	1,149	1,153	1,158	1,162	1,166	1,170	1,175	1,179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,4	1,183	1,187	1,192	1,196	1,200	1,204	1,208	1,212	1,217	1,221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,5	1,225	1,229	1,233	1,237	1,241	1,245	1,249	1,253	1,257	1,261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,6	1,265	1,269	1,273	1,277	1,281	1,285	1,288	1,292	1,296	1,300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,7	1,304	1,308	1,311	1,315	1,319	1,323	1,327	1,330	1,334	1,338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,8	1,342	1,345	1,349	1,353	1,356	1,360	1,364	1,367	1,371	1,375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,9	1,378	1,382	1,386	1,389	1,393	1,396	1,400	1,404	1,407	1,411	0	1	1	1	2	2	3	3	3
2,0	1,414	1,418	1,421	1,425	1,428	1,432	1,435	1,439	1,442	1,446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,1	1,449	1,453	1,456	1,459	1,463	1,466	1,470	1,473	1,476	1,480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,2	1,483	1,487	1,490	1,493	1,497	1,500	1,503	1,507	1,510	1,513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,3	1,517	1,520	1,523	1,526	1,530	1,533	1,536	1,539	1,543	1,546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,4	1,549	1,552	1,556	1,559	1,562	1,565	1,568	1,572	1,575	1,578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,5	1,581	1,584	1,587	1,591	1,594	1,597	1,600	1,603	1,606	1,609	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2,6	1,612	1,616	1,619	1,622	1,625	1,628	1,631	1,634	1,637	1,640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,7	1,643	1,646	1,649	1,652	1,655	1,658	1,661	1,664	1,667	1,670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2,8	1,673	1,676	1,679	1,682	1,685	1,688	1,691	1,694	1,697	1,700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2,9	1,703	1,706	1,709	1,712	1,715	1,718	1,720	1,723	1,726	1,729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,0	1,732	1,735	1,738	1,741	1,744	1,746	1,749	1,752	1,755	1,758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,1	1,761	1,764	1,766	1,769	1,772	1,775	1,778	1,780	1,783	1,786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3,2	1,789	1,799	1,794	1,797	1,800	1,803	1,806	1,808	1,811	1,814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,3	1,817	1,817	1,822	1,825	1,828	1,830	1,833	1,836	1,838	1,841	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,4	1,844	1,842	1,849	1,852	1,855	1,857	1,860	1,863	1,865	1,868	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,5	1,871	1,873	1,876	1,879	1,881	1,884	1,887	1,889	1,892	1,895	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,6	1,897	1,900	1,903	1,905	1,908	1,910	1,913	1,916	1,918	1,921	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,7	1,924	1,926	1,929	1,931	1,934	1, 36	1,939	1,942	1,944	1,947	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,8	1,949	1,952	1,954	1,957	1,960	1,962	1,965	1,967	1,970	1,972	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3,9	1,975	1,977	1,980	1,982	1,985	1,987	1,990	1,992	1,995	1,997	0	1	1	1	1	2	2	2	2
4,0	2,000	2,002	2,005	2,007	2,010	2,012	2,015	2,017	2,020	2,022	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,1	2,025	2,027	2,030	2,032	2,035	2,037	2,040	2,042	2,045	2,047	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,2	2,049	2,052	2,054	2,057	2,059	2,062	2,064	2,066	2,069	2,071	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,3	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,086	2,088	2,090	2,093	2,095	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,4	2,098	2,100	2,102	2,105	2,107	2,110	2,112	2,114	2,117	2,119	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,5	2,121	2,124	2,126	2,128	2,131	2,133	2,135	2,138	2,140	2,142	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,6	2,145	2,147	2,149	2,152	2,154	2,156	2,159	2,161	2,163	2,166	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,7	2,168	2,170	2,173	2,175	2,177	2,179	2,182	2,184	2,186	2,189	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,8	2,191	2,193	2,195	2,198	2,200	2,202	2,205	2,207	2,209	2,211	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4,9	2,214	2,216	2,218	2,220	2,223	2,225	2,227	2,229	2,232	2,234	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,0	2,236	2,238	2,241	2,243	2,245	2,247	2,249	2,252	2,254	2,256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,1	2,258	2,261	2,263	2,265	2,267	2,269	2,272	2,274	2,276	2,278	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,2	2,280	2,283	2,285	2,287	2,289	2,291	2,293	2,296	2,298	2,300	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,3	2,302	2,304	2,307	2,309	2,311	2,313	2,315	2,317	2,319	2,322	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5,4	2,324	2,326	2,328	2,330	2,332	2,335	2,337	2,339	2,341	2,343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,5	2,345	2,347	2,349	2,352	2,354	2,356	2,358	2,360	2,362	2,364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,6	2,366	2,369	2,371	2,373	2,375	2,377	2,379	2,381	2,383	2,385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,7	2,387	2,390	2,392	2,394	2,396	2,398	2,400	2,402	2,404	2,406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,8	2,408	2,410	2,412	2,415	2,417	2,419	2,421	2,423	2,425	2,427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5,9	2,429	2,431	2,433	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,445	2,447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,0	2,449	2,452	2,454	2,456	2,458	2,460	2,462	2,464	2,466	2,468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,1	2,470	2,472	2,474	2,476	2,478	2,480	2,482	2,484	2,486	2,488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,2	2,490	2,492	2,494	2,496	2,498	2,500	2,502	2,504	2,506	2,508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,3	2,510	2,512	2,514	2,516	2,518	2,520	2,522	2,524	2,526	2,528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,4	2,530	2,532	2,534	2,536	2,538	2,540	2,542	2,544	2,546	2,548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,5	2,550	2,551	2,553	2,555	2,557	2,559	2,561	2,563	2,565	2,567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,6	2,569	2,571	2,573	2,575	2,577	2,579	2,581	2,583	2,585	2,587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,7	2,588	2,590	2,592	2,594	2,596	2,598	2,600	2,602	2,604	2,606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,8	2,608	2,610	2,612	2,613	2,615	2,617	2,619	2,621	2,623	2,625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6,9	2,627	2,629	2,631	2,632	2,634	2,636	2,638	2,640	2,642	2,644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,0	2,646	2,648	2,650	2,651	2,653	2,655	2,657	2,659	2,661	2,663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,1	2,665	2,666	2,668	2,670	2,672	2,674	2,676	2,678	2,680	2,681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,2	2,683	2,685	2,687	2,689	2,691	2,693	2,694	2,696	2,698	2,700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,3	2,702	2,704	2,706	2,707	2,709	2,711	2,713	2,715	2,717	2,718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,4	2,720	2,722	2,724	2,726	2,728	2,729	2,731	2,733	2,735	2,737	0	0	1	1	1	1	1	1	2

Продовження

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,739	2,740	2,742	2,744	2,746	2,748	2,750	2,751	2,753	2,755	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,6	2,757	2,759	2,760	2,762	2,764	2,766	2,768	2,769	2,771	2,773	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,7	2,775	2,777	2,778	2,780	2,782	2,784	2,786	2,787	2,789	2,791	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,8	2,793	2,795	2,796	2,798	2,800	2,802	2,804	2,805	2,807	2,809	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,9	2,811	2,812	2,814	2,816	2,818	2,820	2,821	2,823	2,825	2,827	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,0	2,828	2,830	2,832	2,834	2,835	2,837	2,839	2,841	2,843	2,844	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,1	2,846	2,848	2,850	2,851	2,853	2,855	2,857	2,858	2,860	2,862	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,2	2,864	2,865	2,867	2,869	2,871	2,872	2,874	2,876	2,877	2,879	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,3	2,881	2,883	2,884	2,886	2,888	2,890	2,891	2,893	2,895	2,897	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,4	2,898	2,900	2,902	2,903	2,905	2,907	2,909	2,910	2,912	2,914	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,5	2,915	2,917	2,919	2,921	2,922	2,924	2,926	2,927	2,929	2,931	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,6	2,933	2,934	2,936	2,938	2,939	2,941	2,943	2,944	2,946	2,948	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,7	2,950	2,951	2,953	2,955	2,956	2,958	2,960	2,961	2,963	2,965	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,8	2,966	2,968	2,970	2,972	2,973	2,975	2,977	2,978	2,980	2,982	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8,9	2,983	2,985	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,997	2,998	0	0	1	1	1	1	1	1	2
9,0	3,000	3,002	3,003	3,005	3,007	3,008	3,010	3,012	3,013	3,015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	3,017	3,018	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,028	3,030	3,032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,2	3,033	3,035	3,036	3,038	3,040	3,041	3,043	3,045	3,046	3,048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,3	3,050	3,051	3,053	3,055	3,056	3,058	3,059	3,061	3,063	3,064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,4	3,066	3,068	3,069	3,071	3,072	3,074	3,076	3,077	3,079	3,081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,5	3,082	3,084	3,085	3,087	3,089	3,090	3,092	3,094	3,095	3,097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,6	3,098	3,100	3,102	3,103	3,105	3,106	3,108	3,110	3,111	3,113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,7	3,114	3,116	3,118	3,119	3,121	3,122	3,124	3,126	3,127	3,129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,8	3,130	3,132	3,134	3,135	3,137	3,138	3,140	3,142	3,143	3,145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,9	3,146	3,148	3,150	3,151	3,153	3,154	3,156	3,158	3,159	3,161	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10	3,162	3,178	3,194	3,209	3,225	3,240	3,256	3,271	3,286	3,302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11	3,317	3,332	3,347	3,362	3,376	3,391	3,406	3,421	3,435	3,450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	3,464	3,479	3,493	3,507	3,521	3,536	3,550	3,564	3,578	3,592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	3,606	3,619	3,633	3,647	3,661	3,674	3,688	3,701	3,715	3,728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14	3,742	3,755	3,768	3,782	3,795	3,808	3,821	3,834	3,847	3,860	1	3	4	5	7	8	9	11	12
15	3,873	3,886	3,899	3,912	3,924	3,937	3,950	3,962	3,975	3,987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	4,000	4,012	4,025	4,037	4,050	4,062	4,074	4,087	4,099	4,111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	4,123	4,135	4,147	4,159	4,171	4,183	4,195	4,207	4,219	4,231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	4,243	4,254	4,266	4,278	4,290	4,301	4,313	4,324	4,336	4,347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	4,359	4,370	4,382	4,393	4,405	4,416	4,427	4,438	4,450	4,461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20	4,472	4,483	4,494	4,506	4,517	4,528	4,539	4,550	4,561	4,572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21	4,583	4,593	4,604	4,615	4,626	4,637	4,648	4,658	4,669	4,680	1	2	3	4	5	6	8	9	10

22	4,690	4,701	4,712	4,722	4,733	4,743	4,754	4,764	4,775	4,785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	4,796	4,806	4,817	4,827	4,837	4,848	4,858	4,868	4,879	4,889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	4,899	4,909	4,919	4,930	4,940	4,950	4,960	4,970	4,980	4,990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	5,000	5,010	5,020	5,030	5,040	5,050	5,060	5,070	5,079	5,089	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26	5,099	5,109	5,119	5,128	5,138	5,148	5,158	5,167	5,177	5,187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27	5,196	5,206	5,215	5,225	5,235	5,244	5,254	5,263	5,273	5,282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	5,292	5,301	5,310	5,320	5,329	5,339	5,348	5,357	5,367	5,376	1	2	3	4	5	6	7	7	8
29	5,385	5,394	5,404	5,413	5,422	5,431	5,441	5,450	5,459	5,468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30	5,477	5,486	5,495	5,505	5,514	5,523	5,532	5,541	5,550	5,559	1	2	3	4		5	6	7	8
31	5,568	5,577	5,586	5,595	5,604	5,612	5,621	5,630	5,639	5,648	1	2	3	3	4	5	6	7	8
32	5,657	5,666	5,675	5,683	5,692	5,701	5,710	5,718	5,727	5,736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33	5,745	5,753	5,762	5,771	5,779	5,788	5,797	5,805	5,814	5,822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34	5,831	5,840	5,848	5,857	5,865	5,874	5,882	5,891	5,899	5,908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35	5,916	5,925	5,933	5,941	5,950	5,958	5,967	5,975	5,983	5,992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36	6,000	6,008	6,017	6,025	6,033	6,042	6,050	6,058	6,066	6,075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37	6,083	6,091	6,099	6,107	6,116	6,124	6,132	6,140	6,148	6,156	1	2	2	3	4	5	6	6	7
38	6,164	6,173	6,181	6,189	6,197	6,205	6,213	6,221	6,229	6,237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	6,245	6,253	6,261	6,269	6,277	6,285	6,293	6,301	6,309	6,317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	6,325	6,332	6,340	6,348	6,356	6,364	6,372	6,380	6,387	6,395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	6,403	6,411	6,419	6,427	6,434	6,442	6,450	6,458	6,465	6,473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42	6,481	6,488	6,496	6,504	6,512	6,519	6,527	6,535	6,542	6,550	1	2	2	3	4	5	5	6	7
43	6,557	6,565	6,573	6,580	6,588	6,595	6,603	6,611	6,618	6,626	1	2	2	3	4	5	5	6	7
44	6,633	6,641	6,648	6,656	6,663	6,671	6,678	6,686	6,693	6,701	1	2	2	3	4	5	5	6	7
45	6,708	6,716	6,723	6,731	6,738	6,745	6,753	6,760	6,768	6,775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46	6,782	6,790	6,797	6,804	6,812	6,819	6,826	6,834	6,841	6,848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47	6,856	6,863	6,870	6,877	6,885	6,892	6,899	6,907	6,914	6,921	1	1	2	3	4	4	5	6	7
48	6,928	6,935	6,943	6,950	6,957	6,964	6,971	6,979	6,986	6,993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49	7,000	7,007	7,014	7,021	7,029	7,036	7,043	7,050	7,057	7,064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50	7,071	7,078	7,085	7,092	7,099	7,106	7,113	7,120	7,127	7,134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51	7,141	7,148	7,155	7,162	7,169	7,176	7,183	7,190	7,197	7,204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52	7,211	7,218	7,225	7,232	7,239	7,246	7,253	7,259	7,266	7,273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53	7,280	7,287	7,294	7,301	7,308	7,314	7,321	7,328	7,335	7,342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54	7,348	7,355	7,362	7,369	7,376	7,382	7,389	7,396	7,403	7,409	1	1	2	3	3	4	5	5	6
55	7,416	7,423	7,430	7,436	7,443	7,450	7,457	7,463	7,470	7,477	1	1	2	3	3	4	[illegible]	5	6
56	7,483	7,490	7,497	7,503	7,510	7,517	7,523	7,530	7,537	7,543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57	7,550	7,556	7,563	7,570	7,576	7,583	7,589	7,596	7,603	7,609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58	7,616	7,622	7,629	7,635	7,642	7,649	7,655	7,662	7,668	7,675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59	7,681	7,688	7,694	7,701	7,707	7,714	7,720	7,727	7,733	7,740	1	1	2	3	3	4	4	5	6
60	7,746	7,752	7,759	7,765	7,772	7,778	7,785	7,791	7,797	7,804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61	7,810	7,817	7,823	7,829	7,836	7,842	7,849	7,855	7,861	7,868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62	7,874	7,880	7,887	7,893	7,899	7,906	7,912	7,918	7,925	7,931	1	1	2	3	3	4	4	5	6

Продовження

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	7,937	7,944	7,950	7,956	7,962	7,969	7,975	7,981	7,987	7,994	1	1	2	3	3	4	4	5	6
64	8,000	8,006	8,012	8,019	8,025	8,031	8,037	8,044	8,050	8,056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65	8,062	8,068	8,075	8,081	8,087	8,093	8,099	8,106	8,112	8,118	1	1	2	2	3	4	4	5	6
66	8,124	8,130	8,136	8,142	8,149	8,155	8,161	8,167	8,173	8,179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67	8,185	8,191	8,198	8,204	8,210	8,216	8,222	8,228	8,234	8,240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68	8,246	8,252	8,258	8,264	8,270	8,276	8,283	8,289	8,295	8,301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69	8,307	8,313	8,319	8,325	8,331	8,337	8,343	8,349	8,355	8,361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	8,367	8,373	8,379	8,385	8,390	8,396	8,402	8,408	8,414	8,420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71	8,426	8,432	8,438	8,444	8,450	8,456	8,462	8,568	8,473	8,479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8,485	8,491	8,497	8,503	8,509	8,515	8,521	8,526	8,532	8,538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73	8,544	8,550	8,556	8,562	8,567	8,573	8,579	8,585	8,591	8,597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74	8,602	8,608	8,614	8,620	8,626	8,631	8,637	8,643	8,649	8,654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75	8,660	8,666	8,672	8,678	8,683	8,689	8,695	8,701	8,706	8,712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8,718	8,724	8,729	8,735	8,741	8,746	8,752	8,758	8,764	8,769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8,775	8,781	8,786	8,792	8,798	8,803	8,809	8,815	8,820	9,826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8,832	8,837	8,843	8,849	8,854	8,860	8,866	8,871	8,877	8,883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8,888	8,894	8,899	8,905	8,911	8,916	8,922	8,927	8,933	8,939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	8,944	8,950	8,955	8,961	8,967	8,972	8,978	8,983	8,989	8,994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9,000	9,006	9,011	9,017	9,022	9,028	9,033	9,039	9,044	9,050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9,055	9,061	9,066	9,072	9,077	9,083	9,088	9,094	9,099	9,105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9,110	9,116	9,121	9,127	9,132	9,138	9,143	9,149	9,154	9,160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9,165	9,171	9,176	9,182	9,187	9,192	9,198	9,203	9,209	9,214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9,220	9,225	9,230	9,236	9,241	9,247	9,252	9,257	9,263	9,268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9,274	9,279	9,284	9,290	9,295	9,301	9,306	9,311	9,317	9,322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9,327	9,333	9,338	9,343	9,349	9,354	9,359	9,365	9,370	9,375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9,381	9,386	9,391	9,397	9,402	9,407	9,413	9,418	9,423	9,429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89	9,434	9,439	9,445	9,450	9,455	9,460	9,466	9,471	9,476	9,482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90	9,487	9,492	9,497	9,503	9,508	9,513	9,518	9,524	9,529	9,534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91	9,539	9,545	9,550	9,555	9,560	9,566	9,571	9,576	9,581	9,586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92	9,592	9,597	9,602	9,607	9,612	9,618	9,623	9,628	9,633	9,638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93	9,644	9,649	9,654	9,659	9,664	9,670	9,675	9,680	9,685	9,690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94	9,695	9,701	9,706	9,711	9,716	9,721	9,726	9,731	9,737	9,742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95	9,747	9,752	9,757	9,762	9,767	9,772	9,778	9,783	9,788	9,793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96	9,798	9,803	9,808	9,813	9,818	9,823	9,829	9,834	9,839	9,844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97	9,849	9,854	9,859	9,864	9,869	9,874	9,879	9,884	9,889	9,894	1	1	1	2	3	3	4	4	5
98	9,899	9,905	9,910	9,915	9,920	9,925	9,930	9,935	9,940	9,945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9,950	9,955	9,960	9,965	9,970	9,975	9,980	9,985	9,990	9,995	0	1	1	2	2	3	3	4	4

§ 7. Куби

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
1,00	1,000	1,003	1,006	1,009	1,012	1,015	1,018	1,021	1,024	1,027	0	1	1	1	2
1,01	1,030	1,033	1,036	1,040	1,043	1,046	1,049	1,052	1,055	1,058	0	1	1	1	2
1,02	1,061	1,064	1,067	1,071	1,074	1,077	1,080	1,083	1,086	1,090	0	1	1	1	2
1,03	1,093	1,096	1,099	1,102	1,106	1,109	1,112	1,115	1,118	1,122	0	1	1	1	2
1,04	1,125	1,128	1,131	1,135	1,138	1,141	1,144	1,148	1,151	1,154	0	1	1	1	2
1,05	1,158	1,161	1,164	1,168	1,171	1,174	1,178	1,181	1,184	1,188	0	1	1	1	2
1,06	1,191	1,194	1,198	1,201	1,205	1,208	1,211	1,215	1,218	1,222	0	1	1	1	2
1,07	1,225	1,228	1,232	1,235	1,239	1,242	1,246	1,249	1,253	1,256	0	1	1	1	2
1,08	1,260	1,263	1,267	1,270	1,274	1,277	1,281	1,294	1,288	1,291	0	1	1	1	2
1,09	1,295	1,299	1,302	1,306	1,309	1,313	1,317	1,320	1,324	1,327	0	1	1	1	2
1,10	1,331	1,335	1,338	1,342	1,346	1,349	1,353	1,357	1,360	1,364	0	1	1	1	2
1,11	1,368	1,371	1,375	1,379	1,382	1,386	1,390	1,394	1,397	1,401	0	1	1	1	2
1,12	1,405	1,409	1,412	1,416	1,420	1,424	1,428	1,431	1,435	1,439	0	1	1	2	2
1,13	1,443	1,447	1,451	1,454	1,458	1,462	1,466	1,470	1,474	1,478	0	1	1	2	2
1,14	1,482	1,485	1,489	1,493	1,497	1,501	1,505	1,509	1,513	1,517	0	1	1	2	2
1,15	1,521	1,525	1,529	1,533	1,537	1,541	1,545	1,549	1,553	1,557	0	1	1	2	2
1,16	1,561	1,565	1,569	1,573	1,577	1,581	1,585	1,589	1,593	1,598	0	1	1	2	2
1,17	1,602	1,606	1,610	1,614	1,618	1,622	1,626	1,631	1,635	1,639	0	1	1	2	2
1,18	1,643	1,647	1,651	1,656	1,660	1,664	1,668	1,672	1,677	1,681	0	1	1	2	2
1,19	1,685	1,689	1,694	1,698	1,702	1,706	1,711	1,715	1,719	1,724	0	1	1	2	2
1,20	1,728	1,732	1,737	1,741	1,745	1,750	1,754	1,758	1,763	1,767	0	1	1	2	2
1,21	1,772	1,776	1,780	1,785	1,789	1,794	1,798	1,802	1,807	1,811	0	1	1	2	2
1,22	1,816	1,820	1,825	1,829	1,834	1,838	1,843	1,847	1,852	1,856	0	1	1	2	2
1,23	1,861	1,865	1,870	1,875	1,879	1,884	1,888	1,893	1,897	1,902	0	1	1	2	2
1,24	1,907	1,911	1,916	1,920	1,925	1,930	1,934	1,939	1,944	1,948	0	1	1	2	2
1,25	1,953	1,958	1,963	1,967	1,972	1,977	1,981	1,986	1,991	1,996	0	1	1	2	2
1,26	2,000	2,005	2,010	2,015	2,019	2,024	2,029	2,034	2,039	2,044	0	1	1	2	2
1,27	2,048	2,053	2,058	2,063	2,068	2,073	2,078	2,082	2,087	2,092	0	1	1	2	2
1,28	2,097	2,102	2,107	2,112	2,117	2,122	2,127	2,132	2,137	2,142	0	1	1	2	2
1,29	2,147	2,152	2,157	2,162	2,167	2,172	2,177	2,182	2,187	2,192	1	1	1	2	3
1,30	2,197	2,202	2,207	2,212	2,217	2,222	2,228	2,233	2,238	2,243	1	1	2	2	3
1,31	2,248	2,253	2,258	2,264	2,269	2,274	2,279	2,284	2,290	2,295	1	1	2	2	3

Продовження

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
1,32	2,300	2,305	2,310	2,316	2,321	2,326	2,331	2,337	2,342	2,347	1	1	2	2	3
1,33	2,353	2,358	2,363	2,369	2,374	2,379	2,385	2,390	2,395	2,401	1	1	2	2	3
1,34	2,406	2,411	2,417	2,422	2,428	2,433	2,439	2,444	2,449	2,455	1	1	2	2	3
1,35	2,460	2,466	2,471	2,477	2,482	2,488	2,493	2,499	2,504	2,510	1	1	2	2	3
1,36	2,515	2,521	2,527	2,532	2,538	2,543	2,549	2,554	2,560	2,566	1	1	2	2	3
1,37	2,571	2,577	2,583	2,588	2,594	2,600	2,605	2,611	2,617	2,622	1	1	2	2	3
1,38	2,628	2,634	2,640	2,645	2,651	2,657	2,663	2,668	2,674	2,680	1	1	2	2	3
1,39	2,686	2,691	2,697	2,703	2,709	2,715	2,721	2,726	2,732	2,738	1	1	2	2	3
1,40	2,744	2,750	2,756	2,762	2,768	2,774	2,779	2,785	2,791	2,797	1	1	2	2	3
1,41	2,803	2,809	2,815	2,821	2,827	2,833	2,839	2,845	2,851	2,857	1	1	2	2	3
1,42	2,863	2,869	2,875	2,881	2,888	2,894	2,900	2,906	2,912	2,918	1	1	2	2	3
1,43	2,924	2,930	2,936	2,943	2,949	2,955	2,961	2,967	2,974	2,980	1	1	2	2	3
1,44	2,986	2,992	2,998	3,005	3,011	3,017	3,023	3,030	3,036	3,042	1	1	2	3	3
1,45	3,049	3,055	3,061	3,068	3,074	3,080	3,087	3,093	3,099	3,106	1	1	2	3	3
1,46	3,112	3,119	3,125	3,131	3,138	3,144	3,151	3,157	3,164	3,170	1	1	2	3	3
1,47	3,177	3,183	3,190	3,196	3,203	3,209	3,216	3,222	3,229	3,235	1	1	2	3	3
1,48	3,242	3,248	3,255	3,262	3,268	3,275	3,281	3,288	3,295	3,301	1	1	2	3	3
1,49	3,308	3,315	3,321	3,328	3,335	3,341	3,348	3,355	3,362	3,368	1	1	2	3	3
1,50	3,375	3,382	3,389	3,395	3,402	3,409	3,416	3,422	3,429	3,436	1	1	2	3	3
1,51	3,343	3,450	3,457	3,464	3,470	3,477	3,484	3,491	3,498	3,505	1	1	2	3	3
1,52	3,512	3,519	3,526	3,533	3,540	3,547	3,554	3,561	3,568	3,575	1	1	2	3	3
1,53	3,582	3,589	3,596	3,603	3,610	3,617	3,624	3,631	3,638	3,645	1	1	2	3	4
1,54	3,652	3,659	3,667	3,674	3,681	3,688	3,695	3,702	3,709	3,717	1	1	2	3	4
1,55	3,724	3,731	3,738	3,746	3,753	3,760	3,767	3,775	3,782	3,789	1	1	2	3	4
1,56	3,796	3,804	3,811	3,818	3,826	3,833	3,840	3,848	3,855	3,863	1	1	2	3	4
1,57	3,870	3,877	3,885	3,892	3,900	3,907	3,914	3,922	3,929	3,937	1	1	2	3	4
1,58	3,944	3,952	3,959	3,967	3,974	3,982	3,989	3,997	4,005	4,012	1	2	2	3	4
1,59	4,020	4,027	4,035	4,042	4,050	4,058	4,065	4,073	4,081	4,088	1	2	2	3	4
1,60	4,096	4,104	4,111	4,119	4,127	4,135	4,142	4,150	4,158	4,166	1	2	2	3	4
1,61	4,173	4,181	4,189	4,197	4,204	4,212	4,220	4,228	4,236	4,244	1	2	2	3	4
1,62	4,252	4,259	4,267	4,275	4,283	4,291	4,299	4,307	4,315	4,323	1	2	2	3	4
1,63	4,331	4,339	4,347	4,355	4,363	4,371	4,379	4,387	4,395	4,403	1	2	2	3	4
1,64	4,411	4,419	4,427	4,435	4,443	4,451	4,460	4,468	4,476	4,484	1	2	2	3	4
1,65	4,492	4,500	4,508	4,517	4,525	4,533	4,541	4,550	4,558	4,566	1	2	2	3	4
1,66	4,574	4,583	4,591	4,599	4,607	4,616	4,624	4,632	4,641	4,649	1	2	2	3	4
1,67	4,657	4,666	4,674	4,683	4,691	4,699	4,708	4,716	4,725	4,733	1	2	3	3	4
1,68	4,742	4,750	4,750	4,767	4,776	4,784	4,793	4,801	4,810	4,818	1	2	3	3	4
1,69	4,827	4,835	4,844	4,853	4,861	4,870	4,878	4,887	4,896	4,904	1	2	3	3	4
1,70	4,913	4,922	4,930	4,939	4,948	4,956	4,965	4,974	4,983	4,991	1	2	3	3	4
1,71	5,000	5,009	5,018	5,027	5,035	5,044	5,053	5,062	5,071	5,080	1	2	3	4	4
1,72	5,088	5,097	5,106	5,115	5,124	5,133	5,142	5,151	5,160	5,169	1	2	3	4	4
1,73	5,178	5,187	5,196	5,205	5,214	5,223	5,232	5,241	5,250	5,259	1	2	3	4	5
1,74	5,268	5,277	5,286	5,295	5,304	5,314	5,323	5,332	5,341	5,350	1	2	3	4	5
1,75	5,359	5,369	5,378	5,387	5,396	5,405	5,415	5,424	5,433	5,442	1	2	3	4	5
1,76	5,452	5,461	5,470	5,480	5,489	5,498	5,508	5,517	5,526	5,536	1	2	3	4	5
1,77	5,545	5,555	5,564	5,573	5,583	5,592	5,602	5,611	5,621	5,630	1	2	3	4	5
1,78	5,640	5,649	5,659	5,668	5,678	5,687	5,697	5,707	5,716	5,726	1	2	3	4	5
1,79	5,735	5,745	5,755	5,764	5,774	5,784	5,793	5,803	5,813	5,822	1	2	3	4	5
1,80	5,832	5,842	5,851	5,861	5,871	5,881	5,891	5,900	5,910	5,920	1	2	3	4	5
1,81	5,930	5,940	5,949	5,959	5,969	5,979	5,989	5,999	6,009	6,019	1	2	3	4	5
1,82	6,029	6,039	6,048	6,058	6,068	6,078	6,088	6,098	6,108	6,118	1	2	3	4	5
1,83	6,128	6,139	6,149	6,159	6,169	6,179	6,189	6,199	6,209	6,219	1	2	3	4	5
1,84	6,230	6,240	6,250	6,260	6,270	6,280	6,291	6,301	6,311	6,321	1	2	3	4	5
1,85	6,332	6,342	6,352	6,362	6,373	6,383	6,393	6,404	6,414	6,424	1	2	3	4	5
1,86	6,435	6,445	6,456	6,466	6,476	6,487	6,497	6,508	6,518	6,529	1	2	3	4	5
1,87	6,539	6,550	6,560	6,571	6,581	6,592	6,602	6,613	6,623	6,634	1	2	3	4	5
1,88	6,645	6,655	6,666	6,677	6,687	6,698	6,708	6,719	6,730	7,741	1	2	3	4	5
1,89	6,751	6,762	6,773	6,783	6,794	6,805	6,816	6,827	6,837	6,848	1	2	3	4	5
1,90	6,859	6,870	6,881	6,892	6,902	6,913	6,924	6,935	6,946	6,957	1	2	3	4	5
1,91	6,968	6,979	6,990	7,001	7,012	7,023	7,034	7,045	7,056	7,067	1	2	3	4	6
1,92	7,078	7,089	7,100	7,111	7,122	7,133	7,144	7,156	7,167	7,178	1	2	3	4	6
1,93	7,189	7,200	7,211	7,223	7,234	7,245	7,256	7,268	7,279	7,290	1	2	3	4	6
1,94	7,301	7,313	7,324	7,335	7,347	7,358	7,369	7,381	7,392	7,403	1	2	3	5	6
1,95	7,415	7,426	7,438	7,449	7,461	7,472	7,484	7,495	7,507	7,518	1	2	3	5	6
1,96	7,530	7,541	7,553	7,564	7,576	7,587	7,599	7,610	7,622	7,634	1	2	3	5	6
1,97	7,645	7,657	7,669	7,680	7,692	7,704	7,715	7,727	7,739	7,751	1	2	4	5	6
1,98	7,762	7,774	7,786	7,798	7,810	7,821	7,833	7,845	7,857	7,869	1	2	4	5	6
1,99	7,881	7,892	7,904	7,916	7,928	7,940	7,952	7,964	7,976	7,988	1	2	4	5	6

Продовження

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
2,00	8,000	8,012	8,024	8,036	8,048	8,060	8,072	8,084	8,096	8,108	1	2	4	5	6
2,01	8,121	8,133	8,145	8,157	8,169	8,181	8,194	8,206	8,218	8,230	1	2	4	5	6
2,02	8,242	8,255	8,267	8,279	8,291	8,304	8,316	8,328	8,341	8,353	1	2	4	5	6
2,03	8,865	8,378	8,390	8,403	8,415	8,427	8,440	8,452	8,465	8,477	1	2	4	5	6
2,04	8,490	8,502	8,515	8,527	8,540	8,552	8,565	8,577	8,590	8,603	1	3	4	5	6
2,05	8,615	8,625	8,640	8,653	8,666	8,678	8,691	8,704	8,716	8,729	1	3	4	5	6
2,06	8,742	8,755	8,767	8,780	8,793	8,806	8,818	8,331	8,844	8,857	1	3	4	5	6
2,07	8,870	8,883	8,895	8,908	8,921	8,934	8,947	8,960	8,973	8,986	1	3	4	5	6
2,08	8,999	9,012	9,025	9,038	9,051	9,064	9,077	9,060	9,103	9,116	1	3	4	5	7
2,09	9,129	9,142	9,156	9,169	9,182	9,195	9,208	9,221	9,235	2,248	1	3	4	5	7
2,10	9,261	9,274	9,287	9,301	9,314	9,327	9,341	9,354	9,367	9,381	1	3	4	5	7
2,11	9,394	9,407	9,421	9,434	9,447	9,461	9,474	9,488	9,501	9,515	1	3	4	5	7
2,12	9,528	9,542	9,555	9,569	9,582	9,596	9,609	9,623	9,636	9,650	1	3	4	5	7
2,13	9,664	9,677	9,691	9,704	9,718	9,732	9,745	9,759	9,773	9,787	1	3	4	5	7
2,14	9,800	9,814	9,828	9,842	9,855	9,869	9,883	9,897	9,911	9,925	1	3	4	6	7
2,15	9,938	9,952	9,966	9,980	9,994	10,008	10,022	10,036	10,050	10,064	1	3	4	6	7
2,1							10,08	10,22	10,36	10,50	1	3	4	6	7
2,2	10,65	10,79	10,94	11,09	11,24	11,39	11,54	11,70	11,85	12,01	2	3	5	6	8
2,3	12,17	12,33	12,49	12,65	12,81	12,98	13,14	13,31	13,48	13,65	2	3	5	7	8
2,4	13,82	14,00	14,17	14,35	14,53	14,71	14,89	15,07	15,25	15,44	2	4	5	7	9
2,5	15,62	15,81	16,00	16,19	16,39	16,58	16,78	16,97	17,17	17,37	2	4	6	8	10
2,6	17,58	17,78	17,98	18,19	18,40	18,61	18,82	19,03	19,25	19,47	2	4	6	8	11
2,7	19,68	19,90	20,12	20,35	20,57	20,80	21,02	21,25	21,48	21,72	2	5	7	9	11
2,8	21,95	22,19	22,43	22,67	22,91	23,15	23,39	23,64	23,89	24,14	2	5	7	10	12
2,9	24,39	24,64	24,90	25,15	25,41	25,67	25,93	26,20	26,46	26,73	3	5	8	10	13
3,0	27,00	27,27	27,54	27,82	28,09	28,37	28,65	28,93	29,22	29,50	3	6	8	11	14
3,1	29,79	30,08	30,37	30,66	30,96	31,26	31,55	31,86	32,16	32,46	3	6	9	12	15
3,2	32,77	33,08	33,39	33,70	34,01	34,33	34,65	34,97	35,29	35,61	3	6	10	13	16
3,3	35,94	36,26	36,59	36,93	37,26	37,60	37,93	38,27	38,61	38,96	3	7	10	13	17
3,4	39,30	39,65	40,00	40,35	40,71	41,06	41,42	41,78	42,14	42,51	4	7	11	14	18
3,5	42,88	43,24	43,61	43,99	44,36	44,74	45,12	45,50	45,88	46,27	4	8	11	15	19
3,6	46,66	47,05	47,44	47,83	48,23	48,63	49,03	49,43	49,84	50,24	4	8	12	16	20
3,7	50,65	51,06	51,48	51,90	52,31	52,73	53,16	53,58	54,01	54,44	4	8	13	17	21
3,8	54,87	55,31	55,74	56,18	56,62	57,07	57,51	57,96	58,41	58,86	4	9	13	18	22
3,9	59,32	59,78	60,24	60,70	61,16	61,63	62,10	62,57	63,04	63,52	5	9	14	19	23
4,0	64,00	64,48	64,96	65,45	65,94	66,43	66,92	67,42	67,92	68,42	5	10	15	20	25
4,1	68,92	69,43	69,93	70,44	70,96	71,47	71,99	72,51	73,03	73,56	5	10	16	21	26
4,2	74,09	74,62	75,15	75,69	76,23	76,77	77,31	77,85	78,40	78,95	5	11	16	22	27
4,3	79,51	80,06	80,62	81,18	81,75	82,31	82,88	83,45	84,03	84,60	6	11	17	23	28
4,4	85,18	85,77	86,35	86,94	87,53	88,12	88,72	89,31	89,92	90,52	6	12	18	24	30
4,5	91,12	91,73	92,35	92,96	93,58	94,20	94,82	95,44	96,07	96,70	6	12	19	25	31
4,6	97,34	97,97	98,61	99,25	99,90	100,54	101,19	101,85	102,50	103,16	6	13	19	26	32
4,7	103,8	104,5	105,2	105,8	106,5	107,2	107,9	108,5	109,2	109,9	1	1	2	3	3
4,8	110,6	111,3	112,0	112,7	113,4	114,1	114,8	115,5	116,2	116,9	1	1	2	3	4
4,9	117,6	118,4	119,1	119,8	120,6	121,3	122,0	122,8	123,5	124,3	1	1	2	3	4
5,0	125,0	125,8	126,5	127,3	128,0	128,8	129,6	130,3	131,1	131,9	1	2	2	3	4
5,1	132,7	133,4	134,2	135,0	135,8	136,6	137,4	138,2	139,0	139,8	1	2	2	3	4
5,2	140,6	141,4	142,2	143,1	143,9	144,7	145,5	146,4	147,2	148,0	1	2	2	3	4
5,3	148,9	149,7	150,6	151,4	152,3	153,1	154,0	154,9	155,7	156,6	1	2	3	3	4
5,4	157,5	158,3	159,2	160,1	161,0	161,9	162,8	163,7	164,6	165,5	1	2	3	4	4
5,5	166,4	167,3	168,2	169,1	170,0	171,0	171,9	172,8	173,7	174,7	1	2	3	4	5
5,6	175,6	176,6	177,5	178,5	179,4	180,4	181,3	182,3	183,3	184,2	1	2	3	4	5
5,7	185,2	186,2	187,1	188,1	189,1	190,1	191,1	192,1	193,1	194,1	1	2	3	4	5
5,8	195,1	196,1	197,1	198,2	199,2	200,2	201,2	202,3	203,3	204,3	1	2	3	4	5
5,9	205,4	206,4	207,5	208,5	209,6	210,6	211,7	212,8	213,8	214,9	1	2	3	4	5
6,0	216,0	217,1	218,2	219,3	220,3	221,4	222,5	223,6	224,8	225,9	1	2	3	4	5
6,1	227,0	228,1	229,2	230,3	231,5	232,6	233,7	234,9	236,0	237,2	1	2	3	5	6
6,2	238,3	239,5	240,6	241,8	243,0	244,1	245,3	246,5	247,7	248,9	1	2	4	5	6
6,3	250,0	251,2	252,4	253,6	254,8	256,0	257,3	258,5	259,7	260,9	1	2	4	5	6
6,4	262,1	263,4	264,6	265,8	267,1	268,3	269,6	270,8	272,1	273,4	1	2	4	5	6
6,5	274,6	275,9	277,2	278,4	279,7	281,0	282,3	283,6	284,9	286,2	1	3	4	5	6
6,6	287,5	288,8	290,1	291,4	292,8	294,1	295,4	296,7	298,1	299,4	1	3	4	5	7
6,7	300,8	302,1	303,5	304,8	306,2	307,5	308,9	310,3	311,7	313,0	1	3	4	5	7
6,8	314,4	315,8	317,2	318,6	320,0	321,4	322,8	324,2	325,7	327,1	1	3	4	6	7
6,9	328,5	329,9	331,4	332,8	334,3	335,7	337,2	338,6	340,1	341,5	1	3	4	6	7

Продовження

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
7,0	343,0	344,5	345,9	347,4	348,9	350,4	351,9	353,4	354,9	356,4	1	3	4	6	7
7,1	357,9	359,4	360,9	362,5	364,0	365,5	367,1	368,6	370,1	371,7	2	3	5	6	8
7,2	373,2	374,8	376,4	377,9	379,5	381,1	382,7	384,2	385,8	387,4	2	3	5	6	8
7,3	389,0	390,6	392,2	393,8	395,4	397,1	398,7	400,3	401,9	403,6	2	3	5	6	8
7,4	405,2	406,9	408,5	410,2	411,8	413,5	415,2	416,8	418,5	420,2	2	3	5	7	8
7,5	421,9	423,6	425,3	427,0	428,7	430,4	432,1	433,8	435,5	437,2	2	3	5	7	9
7,6	439,0	440,7	442,5	444,2	445,9	447,7	449,5	451,2	453,0	454,8	2	4	5	7	9
7,7	456,5	458,3	460,1	461,9	463,7	465,5	467,3	469,1	470,9	472,7	2	4	5	7	9
7,8	474,6	476,4	478,2	480,0	481,9	483,7	485,6	487,4	489,3	491,2	2	4	6	7	9
7,9	493,0	494,9	496,8	498,7	500,6	502,5	504,4	506,3	508,2	510,1	2	4	6	8	9
8,0	512,0	513,9	515,8	517,8	519,7	521,7	523,6	525,6	527,5	529,5	2	4	6	8	10
8,1	531,4	533,4	535,4	537,4	539,4	541,3	543,3	545,3	547,3	549,4	2	4	6	8	10
8,2	551,4	553,4	555,4	557,4	559,5	561,5	563,6	565,6	567,7	569,7	2	4	6	8	10
8,3	571,8	573,9	575,9	578,0	580,1	582,2	584,3	586,4	588,5	590,6	2	4	6	8	10
8,4	592,7	594,8	596,9	599,1	601,2	603,4	605,5	607,6	609,8	612,0	2	4	6	9	11
8,5	614,1	616,3	618,5	620,7	622,8	625,0	627,2	629,4	631,6	633,8	2	4	7	9	11
8,6	636,1	638,3	640,5	642,7	645,0	647,2	649,5	651,7	654,0	656,2	2	4	7	9	11
8,7	658,5	660,8	663,1	665,3	667,6	669,9	672,2	674,5	676,8	679,2	2	5	7	9	11
8,8	681,5	683,8	686,1	688,5	690,8	693,2	695,5	697,9	700,2	702,6	2	5	7	9	12
8,9	705,0	707,3	709,7	712,1	714,5	716,9	719,3	721,7	724,2	726,6	2	5	7	10	12
9,0	729,0	731,4	733,9	736,3	738,8	741,2	743,7	746,1	748,6	751,1	2	5	7	10	12
9,1	753,6	756,1	758,6	761,0	763,6	766,1	768,6	771,1	773,6	776,2	3	5	8	10	13
9,2	778,7	781,2	783,8	786,3	788,9	791,5	794,0	796,6	799,2	801,8	3	5	8	10	13
9,3	804,4	807,0	809,6	812,2	814,8	817,4	820,0	822,7	825,3	827,9	3	5	8	10	13
9,4	830,6	833,2	835,9	838,6	841,2	843,9	846,6	849,3	852,0	854,7	3	5	8	11	13
9,5	857,4	860,1	862,8	865,5	868,3	871,0	873,7	876,5	879,2	882,0	3	5	8	11	14
9,6	884,7	887,5	890,3	893,1	895,8	898,6	901,4	904,2	907,0	909,9	3	6	8	11	14
9,7	912,7	915,5	918,3	921,2	924,0	926,9	929,7	932,6	935,4	938,3	3	6	9	11	14
9,8	941,2	944,1	947,0	949,9	952,8	955,7	958,6	961,5	964,4	967,4	3	6	9	12	15
9,9	970,3	973,2	976,2	979,1	982,1	985,1	988,0	991,0	994,0	997,0	3	6	9	12	15
10,0	1000,0										3	6	9	12	15

§ 8. Значення дробів виду $\frac{1}{n}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Віднімати, а не додавати!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	1,0000	9990	9980	9970	9960	9950	9940	9930	9921	9911	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,01	0,9901	9891	9881	9872	9862	9852	9843	9833	9823	9814	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,02	0,9804	9794	9785	9775	9766	9756	9747	9737	9728	9718	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,03	0,9709	9699	9690	9681	9671	9662	9653	9643	9634	9625	1	2	3	4	5	6	7	8	8
1,04	0,9615	9606	9597	9588	9579	9569	9560	9551	9542	9533	1	2	3	4	5	5	6	7	8
1,05	0,9524	9515	9506	9497	9488	9479	9470	9461	9452	9443	1	2	3	4	4	5	6	7	8
1,06	0,9434	9425	9416	9407	9398	9390	9381	9372	9363	9355	1	2	3	4	4	5	6	7	8
1,07	0,9346	9337	9328	9320	9311	9302	9294	9285	9276	9268	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,08	0,9259	9251	9242	9234	9225	9217	9208	9200	9191	9183	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,09	0,9174	9166	9158	9149	9141	9132	9124	9116	9107	9099	1	2	3	3	4	5	6	7	8
1,10	0,9091	9083	9073	9066	9058	9050	9042	9033	9025	9017	1	2	2	3	4	5	6	7	7
1,11	0,9009	9001	8993	8985	8977	8969	8961	8953	8945	8937	1	2	2	3	4	5	6	6	7
1,12	0,8929	8921	8913	8905	8897	8889	8881	8873	8865	8857	1	2	2	3	4	5	6	6	7
1,13	0,8850	8842	8834	8826	8818	8811	8803	8795	8787	8780	1	2	2	3	4	5	5	6	7
1,14	0,8772	8764	8757	8749	8741	8734	8726	8718	8711	8703	1	2	2	3	4	5	5	6	7
1,15	0,8696	8688	8681	8673	8666	8658	8651	8643	8636	8628	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,16	0,8621	8613	8606	8598	8591	8584	8576	8569	8562	8554	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,17	0,8547	8540	8532	8525	8518	8511	8503	8496	8489	8482	1	1	2	3	4	4	5	6	7
1,18	0,8475	8467	8460	8453	8446	8439	8432	8425	8418	8410	1	1	2	3	4	4	5	6	6
1,19	0,8403	8396	8389	8382	8375	8368	8361	8354	8347	8340	1	1	2	3	4	4	5	6	6
1,20	0,8333	8326	8319	8313	8306	8299	8292	8285	8278	8271	1	1	2	3	3	4	5	6	6
1,21	0,8264	8258	8251	8244	8237	8230	8224	8217	8210	8203	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,22	0,8197	8190	8183	8177	8170	8163	8157	8150	8143	8137	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,23	0,8130	8123	8117	8110	8104	8097	8091	8084	8078	8071	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,24	0,8065	8058	8052	8045	8039	8032	8026	8019	8013	8006	1	1	2	3	3	4	5	5	6
1,25	0,8000	7994	7987	7981	7974	7968	7962	7955	7949	7943	1	1	2	3	3	4	4	5	6
1,26	0,7937	7930	7924	7918	7911	7905	7899	7893	7886	7880	1	1	2	2	3	4	4	5	6
1,27	0,7874	7868	7862	7855	7849	7843	7837	7831	7825	7819	1	1	2	2	3	4	4	5	6
1,28	0,7812	7806	7800	7794	7788	7782	7776	7770	7764	7758	1	1	2	2	3	4	4	5	5
1,29	0,7752	7746	7740	7734	7728	7722	7716	7710	7704	7698	1	1	2	2	3	4	4	5	5

Продовження

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Віднімати, а не додавати!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,30	0,7692	7686	7680	7675	7669	7663	7657	7651	7645	7639	1	1	2	2	3	4	4	5	5
1,31	0,7634	7628	7622	7616	7610	7605	7599	7593	7587	7582	1	1	2	2	3	3	4	5	5
1,32	0,7576	7570	7564	7559	7553	7547	7541	7536	7530	7524	1	1	2	2	3	3	4	5	5
1,33	0,7519	7513	7508	7502	7496	7491	7485	7479	7474	7468	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,34	0,7463	7457	7452	7446	7440	7435	7429	7424	7418	7413	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,35	0,7407	7402	7396	7391	7386	7380	7375	7369	7364	7358	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,36	0,7353	7348	7342	7337	7331	7326	7321	7315	7310	7305	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,37	0,7299	7294	7289	7283	7278	7273	7267	7262	7257	7252	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,38	0,7246	7241	7236	7231	7225	7220	7215	7210	7205	7199	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,39	0,7194	7189	7184	7179	7174	7168	7163	7158	7153	7148	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,40	0,7143	7138	7133	7128	7123	7117	7112	7107	7102	7097	1	1	2	2	3	3	4	4	5
1,41	0,7092	7087	7082	7077	7072	7067	7062	7057	7052	7047	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,42	0,7042	7037	7032	7027	7022	7018	7013	7008	7003	6998	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,43	0,6993	6988	6983	6978	6974	6969	6964	6959	6954	6949	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,44	0,6944	6940	6935	6930	6925	6920	6916	6911	6906	6901	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,45	0,6897	6892	6887	6882	6878	6873	6868	6863	6859	6854	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,46	0,6849	6845	6840	6835	6831	6826	6821	6817	6812	6807	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,47	0,6803	6798	6793	6789	6784	6780	6775	6770	6766	6761	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,48	0,6757	6752	6748	6743	6739	6734	6729	6725	6720	6716	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,49	0,6711	6707	6702	6698	6693	6689	6684	6680	6676	6671	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,50	0,6667	6662	6658	6653	6649	6645	6640	6636	6631	6627	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1,51	0,6623	6618	6614	6609	6605	6601	6596	6592	6588	6583	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,52	0,6579	6575	6570	6566	6562	6557	6553	6549	6545	6540	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,53	0,6536	6532	6527	6523	6519	6515	6510	6506	6502	6498	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,54	0,6494	6489	6485	6481	6477	6472	6468	6464	6460	6456	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1,55	0,6452	6447	6443	6439	6435	6431	6427	6423	6418	6414	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,56	0,6410	6406	6402	6398	6394	6390	6386	6382	6378	6373	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,57	0,6369	6365	6361	6357	6353	6349	6345	6341	6337	6333	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,58	0,6329	6325	6321	6317	6313	6309	6305	6301	6297	6293	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,59	0,6289	6285	6281	6277	6274	6270	6266	6262	6258	6254	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1,60	0,6250	6246	6242	6238	6234	6231	6227	6223	6219	6215	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,61	0,6211	6207	6203	6200	6196	6192	6188	6184	6180	6177	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,62	0,6173	6169	6165	6161	6158	6154	6150	6146	6143	6139	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1,63	0,6135	6131	6127	6124	6120	6116	6112	6109	6105	6101	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,64	0,6098	6094	6090	6086	6083	6079	6075	6072	6068	6064	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,65	0,6061	6057	6053	6050	6046	6042	6039	6035	6031	6028	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,66	0,6024	6020	6017	6013	6010	6006	6002	5999	5995	5992	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1,67	0,5988	5984	5981	5977	5974	5970	5967	5963	5959	5956	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,68	0,5952	5949	5945	5942	5938	5935	5931	5928	5924	5921	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,69	0,5917	5914	5910	5907	5903	5900	5896	5893	5889	5886	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,70	0,5882	5879	5875	5872	5869	5865	5862	5858	5855	5851	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,71	0,5848	5845	5841	5838	5834	5831	5828	5824	5821	5817	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,72	0,5814	5811	5807	5804	5800	5797	5794	5790	5787	5784	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,73	0,5780	5777	5774	5770	5767	5764	5760	5757	5754	5750	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,74	0,5747	5744	5741	5737	5734	5731	5727	5724	5721	5718	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,75	0,5714	5711	5708	5705	5701	5698	5695	5692	5688	5685	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,76	0,5682	5679	5675	5672	5669	5666	5663	5659	5656	5653	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,77	0,5650	5647	5643	5640	5637	5634	5631	5627	5624	5621	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,78	0,5618	5615	5612	5609	5605	5602	5599	5596	5593	5590	0	1	1	1	2	2	2	3	3
1,79	0,5587	5583	5580	5577	5574	5571	5568	5565	5562	5559	0	1	1	1	2	2	2	2	3
1,8	0,5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	18	20	23	26
1,9	0,5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2,0	0,5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2,1	0,4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	6	9	11	13	15	17	19
2,2	0,4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2,3	0,4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2,4	0,4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2,5	0,4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2,6	0,3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	9	10	11	13
2,7	0,3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2,8	0,3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2,9	0,3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3,0	0,3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	8	9	10
3,1	0,3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,2	0,3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Продовження

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Віднімати, а не додавати!								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,3	0,3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3,4	0,2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3,5	0,2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3,6	0,2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,7	0,2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,8	0,2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,9	0,2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4,0	0,2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4,1	0,2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4,2	0,2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,3	9,2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,4	0,2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4,5	0,2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,6	0,2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,7	0,2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4,8	0,2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4,9	0,2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5,0	0,2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5,1	0,1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5,2	0,1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5,3	0,1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,4	0,1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,5	0,1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,6	0,1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5,7	0,1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5,8	0,1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5,9	0,1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6,0	0,1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6,1	0,1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6,2	0,1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6,3	0,1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,4	0,1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,5	0,1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,6	0,1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,7	0,1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,8	0,1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6,9	0,1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2
7,0	0,1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,1	0,1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,2	0,1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,3	0,1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7,4	0,1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,5	0,1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,6	0,1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7,7	0,1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7,8	0,1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7,9	0,1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,0	0,1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,1	0,1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,2	0,1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,3	0,1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,4	0,1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,5	0,1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,6	0,1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,7	0,1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,8	0,1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8,9	0,1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,0	0,1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9,1	0,1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,2	0,1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,3	0,1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,4	0,1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,5	0,1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,6	0,1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,7	0,1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,8	0,1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9,9	0,1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0	0	0	0	0	1	1	1	1

§ 9. Десяткові логарифми*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 4 4 4	9 9 8 8	13 13 12 12	17 17 16 16	22 21 21 20	26 25 25 24	30 30 29 28	35 34 33 32	39 38 37 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 4 4	8 8 7	12 11 11	16 15 15	20 19 18	24 23 22	27 27 26	31 30 29	35 34 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 4 3	7 7 7	11 11 10	14 14 14	18 17 17	21 21 20	25 24 24	28 28 27	32 31 30
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 3 3	7 6 6	10 10 9	13 13 13	17 16 16	20 19 19	23 23 22	27 26 25	30 29 28
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 3 3	6 6 6	9 9 9	13 12 11	16 15 14	19 18 17	22 21 20	25 24 23	28 27 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 3	6 5	9 8	11 11	14 14	17 16	20 19	23 22	26 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 3	5 5	8 8	11 10	13 13	16 15	19 18	21 20	24 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 2	5 5	8 7	10 10	13 12	15 15	18 17	20 19	23 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 2	5 5	7 7	9 9	12 11	14 13	16 16	19 18	21 20
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 2	4 4	7 6	9 8	11 11	13 13	16 15	18 17	20 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 2	4 4	6 6	8 8	11 10	13 12	15 14	17 17	19 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15

27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6446	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	6324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6

* Як користуватися таблицею див. стор. 320.

Продовження

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	6079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9686	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

§ 10. Антилогарифми*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
,08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
,11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
,13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
,19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
,21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
,23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
,28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,31	2042	2062	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4

* Як користуватися таблицею див. стор. 321.

Продовження

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
,34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
,39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
,45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
,48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
,49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
,50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	2	4	4	5	6	7
,51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
,53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
,55	3548	3556	3565	3573	3581	3689	3697	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
,56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
,58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
,59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	6	6	7	8
,60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
,61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9

,65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
,67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
,68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
,69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
,70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
,71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
,72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
,73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
,74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
,75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
,76	5754	5758	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
,77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
,78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
,79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
,80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
,81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
,83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
,84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
,85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
,87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
,88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
,89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
,90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
,91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
,92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
,93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
,95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
,96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
,97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
,98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
,99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

§ 11. Факторіали

n	$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$	n	$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$
0	1		
1	1	11	399 16800
2	2	12	4790 01600
3	6	13	62270 20800
4	24	14	8 71782 91200
5	120	15	130 76743 68000
6	720	16	2092 27898 88000
7	5040	17	35568 74280 96000
8	40 320	18	6 40237 37057 28000
9	362 880	19	121 64510 04088 32000
10	3 628 800	20	2432 90200 81766 40000

§ 12. Біноміні коефіцієнти

n	$C_n^0, C_n', \ldots, C_n^n$
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

§ 13. Прості числа, не більші за 6000

2	151	353	577	811	1049	1297	1559	1823	2089	2377
3	157	359	587	821	1051	1301	1567	1831	2099	2381
5	163	367	593	823	1061	1303	1571	1847	2111	2383
7	167	373	599	827	1063	1307	1579	1861	2113	2389
11	173	379	601	829	1069	1319	1583	1867	2129	2393
13	179	383	607	839	1087	1321	1597	1871	2131	2399
17	181	389	613	853	1091	1327	1601	1873	2137	2411
19	191	397	617	857	1093	1361	1607	1877	2141	2417
23	193	401	619	859	1097	1367	1609	1879	2143	2423
29	197	409	631	863	1103	1373	1613	1889	2153	2437
31	199	419	641	877	1109	1381	1619	1901	2161	2441
37	211	421	643	881	1117	1399	1621	1907	2179	2447
41	223	431	647	883	1123	1409	1627	1913	2203	2459
43	227	433	653	887	1129	1423	1637	1931	2207	2467
47	229	439	659	907	1151	1427	1657	1933	2213	2473
53	233	443	661	911	1153	1429	1663	1949	2221	2477
59	239	449	673	919	1163	1433	1667	1951	2237	2503
61	241	457	677	929	1171	1439	1669	1973	2239	2521
67	251	461	683	937	1181	1447	1693	1979	2243	2531
71	257	463	691	941	1187	1451	1697	1987	2251	2539
73	263	467	701	947	1193	1453	1699	1993	2267	2543
79	269	479	709	953	1201	1459	1709	1997	2269	2549
83	271	487	719	967	1213	1471	1721	1999	2273	2551
89	277	491	727	971	1217	1481	1723	2003	2281	2557
97	281	499	733	977	1223	1483	1733	2011	2287	2579
101	283	503	739	983	1229	1487	1741	2017	2293	2591
103	293	509	743	991	1231	1489	1747	2027	2297	2593
107	307	521	751	997	1237	1493	1753	2029	2309	2609
109	311	523	757	1009	1249	1499	1759	2039	2311	2617
113	313	541	761	1013	1259	1511	1777	2053	2333	2621
127	317	547	769	1019	1277	1523	1783	2063	2339	2633
131	331	557	773	1021	1279	1531	1787	2069	2341	2647
137	337	563	787	1031	1283	1543	1789	2081	2347	2657
139	347	569	797	1033	1289	1549	1801	2083	2351	2659
149	349	571	809	1039	1291	1553	1811	2087	2357	2663
									2371	2671

2677	2939	3257	3541	3833	4129	4447	4751	5051	5399	5683
2883	2953	3259	3547	3847	4133	4451	4759	5059	5407	5689
2687	2957	3271	3557	3851	4139	4457	4783	5077	5413	5693
2689	2963	3299	3559	3853	4153	4463	4787	5081	5417	5701
2693	2969	3301	3571	3863	4157	4481	4789	5087	5419	5711
2699	2971	3307	3581	3877	4159	4483	4793	5099	5431	5717
2707	2999	3313	3583	3881	4177	4493	4799	5101	5437	5737
2711	3001	3319	3593	3889	4201	4507	4801	5107	5441	5741
2713	3011	3323	3607	3907	4211	4513	4813	5113	5443	5743
2719	3019	3329	3613	3911	4217	4517	4817	5119	5449	5749
2729	3023	3331	3617	3917	4219	4519	4831	5147	5471	5779
2731	3037	3343	3623	3919	4229	4523	4861	5153	5477	5783
2741	3041	3347	3631	3923	4231	4547	4871	5167	5479	5791
2749	3049	3359	3637	3929	4241	4549	4877	5171	5483	5801
2753	3061	3361	3643	3931	4243	4561	4889	5179	5501	5807
2767	3067	3371	3659	3943	4253	4567	4903	5189	5503	5813
2777	3079	3373	3671	3947	4259	4583	4909	5197	5507	5821
2789	3083	3389	3673	3967	4261	4591	4919	5209	5519	5827
2791	3089	3391	3677	3989	4271	4597	4931	5227	5521	5839
2797	3109	3407	3691	4001	4273	4603	4933	5231	5527	5843
2801	3119	3413	3697	4003	4283	4621	4937	5233	5531	5849
2803	3121	3433	3701	4007	4289	4637	4943	5237	5557	5851
2819	3137	3449	3709	4013	4297	4639	4951	5261	5563	5857
2833	3163	3457	3719	4019	4327	4643	4957	5273	5569	5861
2837	3167	3461	3727	4021	4337	4649	4967	5279	5573	5867
2843	3169	3463	3733	4027	4339	4651	4969	5281	5581	5869
2851	3181	3467	3739	4049	4349	4657	4973	5297	5591	5879
2857	3187	3469	3761	4051	4357	4663	4987	5303	5623	5881
2861	3191	3491	3767	4057	4363	4673	4993	5309	5639	5897
2879	3203	3499	3769	4073	4373	4679	4999	5323	5641	5903
2887	3209	3511	3779	4079	4391	4691	5003	5333	5647	5923
2897	3217	3517	3793	4091	4397	4703	5009	5347	5651	5927
2903	3221	3527	3797	4093	4409	4721	5011	5351	5653	5939
2909	3229	3529	3803	4099	4421	4723	5021	5381	5657	5953
2917	3251	3533	3821	4111	4423	4729	5023	5387	5659	5981
2927	3253	3539	3823	4127	4441	4733	5039	5393	5669	5987

II. АРИФМЕТИКА

ПРЕДМЕТ АРИФМЕТИКИ

Арифметика — наука про числа. Назва «арифметика» походить від грецького слова α'ριθμητικη, що складається з двох частин α'ριθμος — число і τεχνη — мистецтво. Арифметика, як і багато інших наук, виникла з потреб практичної діяльності людей. Ще задовго до нашої ери у людей виникла необхідність підраховувати кількість здобичі, вести рахунок часу і т. ін. Спочатку люди оперували лише конкретними іменованими числами і тільки пізніше почали вживати абстрактні числа; їм були відомі тільки натуральні числа, проте пізніше життя примусило розширити поняття числа, розглядати і дробові числа. Коли вперше з'явилось поняття дробу, невідомо. Проте дослідження показують, що древні єгиптяни, китайці, хорезмійці за багато століть до нашої ери були знайомі з дробовими числами і вміли виконувати найпростіші арифметичні дії над ними.

В арифметиці як науці розглядаються всі види чисел від натуральних до комплексних. Проте в шкільній арифметиці вивчають лише додатні раціональні числа, а решта видів чисел розглядається в алгебрі. Автори даного довідника дотримуються шкільних традицій. В довіднику від'ємні, ірраціональні і уявні числа викладені в розділі «Алгебра», а в розділі «Арифметика» розглядаються лише натуральні і дробові числа.

Перші книги, що містять вчення про лічбу і обчислення, з'явились ще за кілька століть до нашої ери. Багато арифметичних відомостей є в «Початках» Евкліда (III ст. до н. е.), в «Арифметиці» Діофанта (III ст. н. е.) і інших книгах давньогрецьких математиків.

Відомий математик з Хорезму *Мухаммед ібн Муса* (близько 780—850 рр.), використавши відомі йому праці грецьких і індійських математиків, написав книгу з арифметики, яка в латинському перекладі потрапила в Європу в XII ст. і сприяла поширенню десяткової позиційної нумерації.

У Київській Русі досить поширені були елементарні відомості з арифметики, включаючи дії з звичайними дробами. Від XVII ст. збереглися рукописи математичного змісту, з аналізу яких слідує, що знання з арифметики на Русі в той час відповідали рівню, досягнутому в Західній Європі. На початку XVIII ст. з'являються і друковані підручники з арифметики. Так, в 1703 р. була видана «Арифметика» Л. П. Магницького, найпопулярніша книга першої половини XVIII ст., яку М. В. Ломоносов назвав «вратами своей учености». Цей посібник енциклопедичного змісту, крім арифметики, містив елементи геометрії і технічних наук. В 1740 р. був надрукований «Посібник з арифметики» Л. Ейлера. В другій половині XVIII ст. вийшли з друку підручники з арифметики, написані академіками С. К. Котельниковим, С. Я. Румовським і іншими авторами. Найпоширенішими в той час були «Універсальна арифметика» Н. Г. Курганова, а також «Теоретична й практична арифметика» професора Московського університету Д. С. Анічкова.

В 1866 р. були видані «Посібник з арифметики» й «Збірник арифметичних задач» А. Ф. Малініна і К. П. Буреніна, по яких навчалися в російських середніх школах протягом півстоліття. У другій половині XIX ст. вийшли в світ підручники з арифметики Ф. І. Сімашко, В. А. Латишева, В. А. Євтушевського й інших авторів. У 1884 р. видано «Арифметику» А. П. Кисельова, на якій виховувалось кілька поколінь російських, а потім і радянських спеціалістів і яку лише недавно замінив підручник «Арифметика» І. М. Шевченко.

ЦІЛІ НЕВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

§ 1. Нумерація

1. Натуральний ряд чисел. Коли перераховують які-небудь предмети, називають в строго визначеному порядку числа: *один*, *два*, *три*, *чотири*, *п'ять*, *шість* і т. д. Зображають їх символами

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Ці числа називають *натуральними*. Множину натуральних чисел, упорядкованих у строго певній вказаній вище послідовності, називають натуральним рядом чисел, або коротше *натуральним рядом*.

Те з двох натуральних чисел, яке в натуральному ряді стоїть ближче до 1, тобто яке при лічбі з'являється раніше, називається *меншим*, друге число — *більшим**. Отже, в натуральному ряді кожне число, крім 1, більше попереднього. 1 — найменше натуральне число, але найбільшого натурального числа не існує. Яке б не було велике натуральне число, існує ще більше наступне за ним натуральне число. *Натуральний ряд нескінченний*. Це показав ще в III ст. до н. е. давньогрецький математик Архімед.

2. Усна нумерація. За допомогою слів «один», «два», «три», «чотири», «п'ять», «шість», «сім», «вісім», «дев'ять», «десять», «сорок», «сто», «тисяча», «мільйон», «мільярд», певним способом комбінуючи їх, можна назвати дуже великі числа, що зустрічаються на практиці.

* Наведені вище описи не можна вважати строгими означеннями. Строгі означення цих понять дуже складні (див. «Энциклопедия элементарной математики», 1, Гостехиздат, М., 1951, стор. 133, 142 та ін.).

Усна нумерація в більшості народів з'явилась дуже давно. Про велику схожість назв чисел у різних європейських народів див. табл. 1.

3. Письмова нумерація. Для запису натуральних чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Їх називають *цифрами*. За допомогою цих десяти цифр можна записати будь-яке натуральне число.

Приклад. 327 — триста двадцять сім, 1002 — тисяча два.

Такий економний запис чисел досягається завдяки застосуванню *принципу помісного значення цифр*. Залежно від місця, яке займає цифра, вона може позначати різні числа. Так, в наведеному вище прикладі цифра 2 в першому випадку означає двадцять, а в другому — два.

Перша, друга, третя і т. д. цифри числа, якщо рахувати справа наліво, називаються відповідно цифрами одиниць, десятків, сотень і т. д. Їх називають ще одиницями першого, другого, третього і т. д. *розрядів*. Наприклад, у числі 7194 є 4 одиниці першого, 9 одиниць другого, 1 одиниця третього і 7 одиниць четвертого розрядів. Цифрою «0» — нуль позначають відсутність одиниць того чи іншого розряду. Десять одиниць якого-небудь розряду становлять одну одиницю наступного вищого розряду. Тому кажуть, що ми користуємося *десятковою системою числення*.

Десяткова система числення виникла за давніх-давен. Люди стали користуватися нею тому, що звикли рахувати десятками, маючи на руках десять пальців. Проте деякі народи в свій час створили і недесяткові системи числення (див. стор. 75).

Принцип помісного значення цифр і накреслення цифр (дещо відмінних від сучасних) виникли в Індії на початку нашої ери. В Європі вони стали відомі завдяки книзі «Арифметика Індорум», яку написав хорезмський математик Мухаммед ібн Муса. Вона була написана арабською мовою і тому ці цифри стали називати *арабськими*. Пізніше, дізнавшись, що Мухаммед в основу своєї нумерації в книзі поклав практику обчислювачів Індії, ці цифри стали називати *індійськими*.

В Росії з індійською нумерацією познайомилися лише в XIII ст. До цього числа позначали старослов'янськими буквами, лише зверху писали спеціальні позначення ⁓ (титло):

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	ѻ҃	п҃	ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	у҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ҃	ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Усна нумерація деяких народів

Число	Болгарська	Польська	Чеська	Сербо-хорватська	Латиська	Латинська	Англійська	Німецька	Французька	Іспанська
1	един	jeden	jeden	jedan	viens	unus	one	ein	un	uno
2	два	dwa	dva	dva	divi	duo	two	zwei	deux	dos
3	три	trzy	tři	tri	trīs	tres	three	drei	trois	tres
4	четири	cztery	čtyři	četiri	četri	quattuor	four	vier	quatre	cuatro
5	пят	pięć	pět	pet	pieci	quinque	five	fünf	cinq	cinco
6	шест	sześć	šest	šest	sešt	sex	six	sechs	six	seis
7	седем	siedem	sedm	sedam	septiņi	septem	seven	sieben	sept	siete
8	осем	osiem	osm	osam	astoņi	octo	eight	acht	huit	ocho
9	девет	dziewięć	devět	devet	deviņi	noven	nine	neun	neuf	nueve
10	десет	dziesięć	deset	deset	desmit	decem	ten	zehn	dix	diez
20	двадесет	dwadzieścia	dvacet	dvadeset	divdesmit	viginti	twenty	zwanzig	vingt	veinte
30	тридесет	trzydzieści	třicet	trideset	trīsdesmit	triginta	thirty	dreizig	trente	treinta
40	четиридесет	czterdzieści	čtyřicet	četrdeset	četrdesmit	quadraginta	fourty	vierzig	quarante	cuarenta
50	пятдесет	pięćdziesiąt	padesát	pedeset	piecdesmit	quinquaginta	fifty	funfzig	cinquante	cincuenta
60	шестдесет	sześćdziesiąt	šedesát	šezdeset	sešdesmit	sexaginta	sixty	sechzig	soixante	sesenta
70	седемдесет	siedemdziesiąt	sedmdesát	sedamdeset	septiņdesmit	septuaginta	seventy	siebzig	soixante-dix	setenta
80	осемдесет	osiemdziesiąt	osmdesát	osamdeset	astoņdesmit	octoginta	eighty	achtzig	quatre-vingt	ochenta
90	деветдесет	dziewięćdziesiąt	devadesat	devedeset	deviņdesmit	nonaginta	ninety	neunzig	quatre-vingt-dix	noventa
100	сто	sto	sto	sto	simst	centum	hundred	hundert	cent	cien
1000	хиляда	tysiąc	tisic	tisuća	tūkstotis	mille	thousand	Tausend	mille	mil

Тисячі позначали тими самими буквами, але попереду ставили позначку ҂. Наприклад, числа 7205, 1963 записували відповідно так:

҂зсє, ҂ацѯг

В деяких випадках ще й зараз користуються римськими цифрами. Римська система нумерації складається з семи знаків:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

При цьому, якщо менший знак пишуть після більшого, то його додають до більшого числа; якщо ж перед більшим — віднімають, наприклад: 8 — VIII, 24 — XXIV, 26 — XXVI, 46 — XLVI, 176 — CLXXVI, 1963 — MCMLXIII.

4. Цілі числа. Про нуль ми вже говорили, проте розглядали його лише як цифру (знак), а не число. Однак в математиці прийнято розглядати *нуль* не лише як *цифру*, але і як *число*.

0 — число не натуральне. Нуль менше від 1 і будь-якого натурального числа. Якщо розмістити нуль і всі натуральні числа в порядку зростання, одержимо:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

Цю послідовність чисел називають *розширеним натуральним рядом.*

Всі натуральні числа і нуль називаються разом *цілими невід'ємними числами*, оскільки в арифметиці звичайно від'ємних чисел не розглядають, то тут їх називають просто *цілими числами**.

5. Назви великих чисел. Для зручності читання й запам'ятовування великих чисел їх цифри розбивають на класи: праворуч відділяють три цифри — перший клас, наступні три — другий клас і т. д. Останній клас може мати три, дві або одну цифру. Між класами звичайно залишають невеликі проміжки. Наприклад, у числі 2 365 423 перший клас дає число одиниць, другий — число тисяч і третій — число мільйонів. Відповідно з цим записане число читають так: два мільйони триста шістдесят п'ять тисяч чотириста двадцять три.

Одиниці четвертого, п'ятого, шостого і т. д. класів називають відповідно:

мільярд або більйон — 1 000 000 000,
трильйон — 1 000 000 000 000,
квадрильйон — 1 000 000 000 000 000,

* В алгебрі *цілими числами* називають всі натуральні числа, нуль і всі цілі від'ємні числа: -1, -2, -3 і т. д.

квінтильйон — 1 000 000 000 000 000 000,
секстильйон — 1 000 000 000 000 000 000 000,
септильйон — 1 000 000 000 000 000 000 000 000.

Ці назви виникли порівняно недавно. Існуючий тепер у більшості європейських мов термін «мільйон» — 10^6 виник у Італії в XIII ст.* Терміни «більйон», «мільярд» і т. д. виникли в XVI—XVII ст., проте до цього часу мають різне (в різних мовах) значення. Мільярд звичайно означає 10^9. Проте це ж значення має в США і Франції більйон, тоді як у Німеччині більйон означає 10^{12}. Трильйон у США і Франції означає 10^{12}, а в Англії і Німеччині — 10^{18}. В російських математичних рукописах зустрічаються назви великих чисел, що виникли, мабуть, раніше XII ст.: тьма — 10^6, легіон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, колода — 10^{49}.

§ 2. Арифметичні дії

1. Поняття арифметичної дії. Якщо за двома даними числами визначають третє число, яке задовольняє деякі умови, то цей процес в математиці взагалі називають *дією*.

В арифметиці розглядають такі дії: *додавання, віднімання, множення* і *ділення*. Їх називають *арифметичними діями*.

2. Додавання. *Додаванням натуральних чисел називають арифметичну дію, за допомогою якої визначають число, що містить стільки одиниць, скільки їх є в даних числах разом.*

Числа, які потрібно додати, називають *доданками*, а результат додавання, тобто число, яке одержується від додавання, називають *сумою*.

Н а п р и к л а д: $11 + 9 = 20$. Тут 11 і 9 — доданки, 20 — сума. Знак додавання + (плюс) ставлять між доданками.

Однозначні ** числа додають, користуючись *таблицею додавання*:

$$1 + 1 = 2,$$
$$2 + 1 = 3 \text{ і т. д.}$$

Цю таблицю діти запам'ятовують ще в першому класі.

Додавання багатозначних чисел зручніше виконувати у «стовпчик», записуючи числа, які додаються так, щоб одиниці були напроти одиниць, десятки напроти десятків і т. д., наприклад

$$\begin{array}{r} 29\,327 \\ +\,4\,398\,186 \\ \hline 4\,427\,513 \end{array}$$

* $10^6 = 1\,000\,000$. Взагалі 10^n позначає число, записане одиницею з n наступними нулями.

** *Однозначними, двозначними* і т. д. називають числа, що записуються однією, двома і т. д. цифрами. Число, записане кількома цифрами, називають також *багатозначним*.

Додавання натуральних чисел завжди можливе і однозначне, тобто, які б числа не були доданками, завжди можна знайти їх суму і ця сума повинна бути для кожних даних чисел одна і та сама.

Додавання до числа нуля не змінює цього числа, наприклад

$$12+0=12;\ 0+12=12;\ 0+0=0.$$

П р и м і т к а. Найдавнішим способом додавання цілих чисел було додавання зліва направо; результат записувався зверху. Джон Холівуд (Сакробоско) запровадив додавання справа наліво; надалі цей спосіб набув поширення у всій Європі. Знак додавання + (плюс) виник не раніше XV ст. Мабуть, він утворився шляхом стилізації латинського сполучника «et» (і). Тоді ж з'явився і термін «сума» в розумінні результату додавання.

У Росії замість «додавання» в XVII—XVIII ст. іноді застосовувався латинський термін «адиція».

3. Віднімання. *Відніманням називається дія, за допомогою якої за даною сумою і одним даним доданком відшукується інший доданок.* Отже, число, яке при додаванні є шуканим, при відніманні виявляється даним, і навпаки. Тому віднімання називають дією, оберненою додаванню.

Число, від якого віднімають, називається *зменшуваним.* Число, яке віднімають — *від'ємником.* Число, яке одержується в результаті віднімання, називається *різницею.*

П р и к л а д. $30-12=18$. Тут 30 — зменшуване, 12 — від'ємник, а 18 — різниця. Знак віднімання — (мінус) ставимо між зменшуваним і від'ємником.

Віднімання у множині натуральних чисел можливе лише при умові, коли зменшуване більше від'ємника. При цьому різниця завжди є певним єдиним натуральним числом.

П р и м і т к а. а) Віднімання нуля від числа не змінює цього числа, наприклад $8-0=8$.

б) Якщо зменшуване дорівнює від'ємнику, то різниця дорівнює нулеві. Наприклад, $9-9=0$.

Подібно додаванню більш старим є спосіб, при якому віднімання ведеться зліва направо. Цей спосіб застосовувався в Західній Європі майже до XV ст. Знак мінус (—) з'явився у підручниках арифметики у XV ст. одночасно зі знаком плюс (+). Латинська назва дії віднімання («субстракціо») застосовувалася і в Росії на початку XVIII ст.

4. Множення. *Множенням натуральних чисел називається дія, що полягає в знаходженні суми однакових доданків.* Наприклад, якщо число 5 потрібно повторити як доданок 7 разів, то записують: $5\times7=35$, і кажуть, що потрібно 5 помножити на 7:

$$5+5+5+5+5+5+5=5\times7.$$

Можна сказати інакше: помножити одне натуральне число на інше — значить взяти перше число доданком стільки разів, скільки одиниць у другому числі. При цьому те число, яке повторюється як доданок, називається *множеним*, число, яке показує, скільки береться таких однакових доданків,— *множником*, а число, що одержується в результаті множення,— *добутком*. Так, у нашому прикладі 5 — множене, 7 — множник, 35 — добуток. Множене і множник називаються також *співмножниками*.

Знак множення (×) ставлять між множеним і множником. За знак множення часто використовують крапку (·), наприклад $3\cdot5=15$*.

П р и м і т к а. а) Якщо один з двох співмножників дорівнює одиниці, то добуток дорівнює другому співмножникові, наприклад

$$1\cdot5=5;\ 10\cdot1=10.$$

б) Якщо хоча б один співмножник дорівнює нулеві, то і добуток дорівнює нулеві:

$$0\cdot342=0;\ 37\cdot0=0;\ 0\cdot0=0.$$

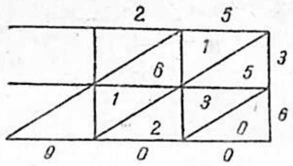
5. Історичні відомості про множення натуральних чисел. В стародавній Індії множення починали з вищих розрядів, тобто зліва направо. Спосіб множення справа наліво був розроблений, мабуть, не раніше XV ст.

Знак множення (×) запроваджено в першій половині XVII ст. Крапка, як знак множення, з'явилася в XV ст.

Назва дії, що прийнята в більшості європейських мов і зустрічається також у староруських авторів, «мультиплікаціо» застосовувалася ще в стародавньому Римі. Середньоазіатські вчені розробили спосіб множення решіткою, яким користувалися також і в Західній Європі. Наприклад, при множенні числа 25 на 36 ці числа записували біля сторін прямокутника, який поділявся горизонтальними і вертикальними відрізками на кілька частин (залежно від числа розрядів). Одержані менші прямокутники поділялись навпіл діагоналями. Результат множення розрядами записувався всередині маленьких прямокутників, починаючи з нижнього ряду так, що вищий розряд був над діагоналлю, а нижчий — під нею. Перемножуємо спочатку 25 на 6 і добуток записуємо в нижньому ряді прямокутника: $5\cdot6=30$, нуль записуємо в нижньому правому прямокутнику під діагоналлю, а 3 — над нею; $2\cdot6=12$; 2 записуємо у другому справа нижньому прямокутнику під діагоналлю (тобто в розряді десятків), а 1 — над діагоналлю (у розряді сотень). Потім перемножуємо 25 на 3 і аналогічно записуємо у верх-

* Перед буквеними множниками знак множення не ставлять. Див. стор. 151.

ньому рядку добуток, після чого відповідні розряди додаємо по діагоналях:



Цікавим є також *давньоруський спосіб множення*. При множенні цим способом один із співмножників послідовно поділяють навпіл (залишок відкидається), а другий подвоюють. Потім додають числа другої послідовності, що відповідають непарним числам першої послідовності.

П р и к л а д. $44 \times 35 = 140 + 280 + 1120 = 1540$

44	35
22	70
11	140
5	280
2	560
1	1120

Давньоруський спосіб множення застосовується зараз на лічильних машинах. Виявляється, що множення цим способом на деяких машинах виконується в 2—2,5 рази швидше, ніж множення на цих же машинах способом послідовного додавання*.

6. Ділення. *Діленням називається дія, за допомогою якої за даним добутком двох співмножників і одним з цих співмножників відшукується інший співмножник.*

Число, яке ділять, називається *діленим*; число, на яке ділять,— *дільником*; число, що одержується в результаті ділення, називається *часткою*, або відношенням**.

Ділення записується так: $40 : 8 = 5$. Тут 40 — ділене, 8 — дільник, а 5 — частка. Знак ділення (:) ставиться між діленим і дільником.

Число, яке при множенні є шуканим, при діленні виявляється даним, і навпаки. Тому ділення називається дією, оберненою множенню.

П р и м і т к а. а) Якщо ділене дорівнює дільникові, то частка дорівнює одиниці, наприклад $14 : 14 = 1$.

б) Якщо дільник дорівнює одиниці, то частка дорівнює діленому, наприклад $14 : 1 = 14$.

в) Частка від ділення нуля на яке-небудь число, відмінне від нуля, дорівнює нулеві, наприклад $0 : 12 = 0$.

---

* П. Г. Хоменко. Умножение на счетных машинах, Машгиз, М., 1962.

** Див. стор. 120.

г) Ділення на нуль неможливе.

Ділення натуральних чисел не завжди можливе. Наприклад, не можна поділити 30 на 7, тому що немає такого натурального числа, яке б при множенні на 7 давало 30.

7. Ділення з остачею. Як видно, поділити 30 на 7 (у вказаному вище розумінні) неможливо. Проте на практиці зустрічаються ситуації, які потребують поширити ділення натуральних чисел і на такі випадки, наприклад, коли треба поділити 30 зошитів між 7 учнями порівну.

Тому розглядають також *ділення з остачею*.

П р и м і т к а. Щоб не змішувати ділення з остачею з розглянутим вище діленням, останнє називають ще діленням без остачі, або діленням націло.

Ділення з остачею — є відшукування найбільшого цілого числа, яке в добутку з дільником дає число, що не перевищує ділене. Шукане число називають *неповною часткою*. Різницю між діленим і добутком дільника на неповну частку називають *остачею*; вона завжди менша від дільника.

П р и к л а д. 19 не ділиться націло на 5. Числа 1, 2, 3 при множенні на 5 дають 5, 10, 15, які не перевищують ділене 19, проте вже 4 дає в добутку з 5 число 20, більше від 19. Тому неповною часткою буде 3, а остачею — 4 (різниця між 19 і добутком $3 \cdot 5 = 15$); $19 = 5 \cdot 3 + 4$.

Для натуральних чисел діленню без остачі і діленню з остачею можна дати таке загальне означення: поділити число a (ділене) на число b (дільник) — значить знайти такі два числа q (частка) і r (остача), які задовольняли б співвідношення: $a = bq + r,\ 0 \leqslant r < b$.

Якщо дільник b не дорівнює нулеві, то ділення завжди можливе і дає єдиний результат.

Остачею від ділення на число b може бути будь-яке з чисел $0, 1, 2, \ldots, b - 1$.

П р и м і т к а. За давніх часів ділення вважалось найважчою дією, якою міг опанувати не кожний. Причиною цього був дуже громіздкий спосіб ділення, який був перенесений в Західну Європу разом з арабськими підручниками і застосовувався до XVIII ст. Спосіб, який тепер є загальноприйнятим, був розроблений італійськими вченими в XV ст. Назва дії, загальноприйнята в західноєвропейських мовах і застосовувана в Росії майже до першої половини XVIII ст.,— «дивізіо», запозичена з латинської мови. Знак ділення (:) був прийнятий у XVIII ст.

8. Піднесення до степеня. Окремий випадок множення, а саме множення однакових чисел, називають *піднесенням до степеня*. Якщо, наприклад, потрібно перемножити 5 однакових чисел, кожне з яких дорівнює 2, кажуть: потрібно число 2 піднести до п'ятого степеня. І замість $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ записують 2^5.

Піднести число до другого, третього, четвертого і т. д. степеня означає взяти його співмножником відповідно два, три, чотири і т. д. рази.

Число, що повторюється співмножником, називається *основою степеня*; число, яке показує, скільки разів береться однаковий співмножник, називається *показником степеня*, а результат — *степенем*.

Запис: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; тут 5 — основа степеня, 3 — показник степеня, 125 — степінь.

Другий степінь називають інакше квадратом, третій степінь — кубом. Першим степенем числа називають саме число, наприклад $7^1 = 7$*.

§ 3. Властивості арифметичних дій

1. Властивості додавання. а) Переставний закон додавання. *Сума не змінюється від зміни місць доданків.* Переставний закон в загальному вигляді записується рівністю:

$$a + b = b + a,$$

де a — перший доданок, b — другий доданок.

Приклади.

$$3 + 5 = 5 + 3;$$
$$4 + 0 = 0 + 4.$$

б) Сполучний закон додавання. *Сума не зміниться, якщо яку-небудь групу доданків, що стоять поруч, замінити їхньою сумою.* В загальному вигляді ця властивість для трьох доданків записується так:

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Приклад. $35 + 15 + 20 = 35 + (15 + 20)$.

Переставний і сполучний закони називають також відповідно *комутативним* і *асоціативним* законами.

в) Додавання суми до числа і числа до суми. Щоб додати до якого-небудь числа суму кількох чисел (або навпаки), досить додати до цього числа один доданок, до одержаної суми додати інший доданок і т. д.

Приклади. $584 + (12 + 23 + 34) = 584 + 69 = 653$,
або

$584 + 12 = 596$; $596 + 23 = 619$; $619 + 34 = 653$.
$(345 + 424 + 576) + 55 = 1345 + 55 = 1400$,
або

$345 + 55 = 400$; $400 + (424 + 576) = 1400$.

2. Властивості віднімання. а) Віднімання суми від числа. Щоб відняти суму від числа, можна відняти від цього числа один доданок, від одержаної різниці — другий доданок і т. д.

---

* Про степені з від'ємними, нульовими і дробовими показниками див. стор. 201.

Позначимо зменшуване буквою a, окремі доданки суми, що віднімається, буквами b і c, тоді властивість можна записати так:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Приклад. $25 - (13 + 5) = 25 - 5 - 13 = 20 - 13 = 7$.

б) Віднімання числа від суми. Щоб відняти число від суми, можна відняти це число від якого-небудь одного доданка (мається на увазі, що доданок більший за від'ємник) і одержану різницю додати до суми решти доданків, тобто

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Приклади. $(36 + 27) - 16 = (36 - 16) + 27 = 47$,
$(36 + 27) - 17 = 36 + (27 - 17) = 46$.

в) Додавання різниці. Щоб додати різницю до числа, досить додати до нього зменшуване і з одержаної суми відняти від'ємник, тобто

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Приклад. $50 + (36 - 16) = 50 + 20 = 70$, або $50 + 36 = 86$, $86 - 16 = 70$.

г) Віднімання різниці. Щоб відняти різницю від числа, досить відняти від нього зменшуване (якщо це можливо) і до одержаної різниці додати від'ємник, тобто

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Приклад. $65 - (35 - 18) = (65 - 35) + 18 = 48$.

3. Властивості множення. а) Переставний закон множення. *Добуток не змінюється від зміни місць співмножників.*

Якщо позначимо перший співмножник буквою a, а другий — буквою b, то переставний закон можна записати у вигляді такої рівності:

$$ab = ba.$$

Приклад. $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$.

б) Сполучний закон множення. *Добуток не зміниться, якщо яку-небудь групу співмножників, що стоять поруч, замінити їх добутком*, тобто

$$abc = a(bc).$$

Приклад. $12 \cdot 8 \cdot 4 = (12 \cdot 8) \cdot 4 = 12 \cdot (8 \cdot 4) = 384$.

в) Розподільний закон множення (відносно суми). *Добуток суми кількох чисел на яке-небудь число дорівнює сумі* *добутків кожного доданка на це число.* Для випадку трьох доданків цей закон можна записати так:

$$(a+b+c)\,d = ad + bd + cd.$$

П р и к л а д. $(30+45+120)\cdot 12 = 30\cdot 12 + 45\cdot 12 + 120\times$ $\times 12 = 360 + 540 + 1440 = 2340$.

Розподільний закон називають також *дистрибутивним.*

г) М н о ж е н н я д о б у т к у н а ч и с л о і ч и с л а н а д о б у т о к. Щоб помножити добуток кількох чисел на яке-небудь число (або навпаки), досить один із співмножників добутку помножити на це число, залишивши інші співмножники без зміни.

П р и к л а д и. $(35\cdot 12)\cdot 4 = (35\cdot 4)\cdot 12 = 140\cdot 12 = 1680$, $20\cdot(7\cdot 18\cdot 5) = (20\cdot 5)\cdot 7\cdot 18 = 100\cdot 7\cdot 18 = 12600$.

д) М н о ж е н н я р і з н и ц і н а ч и с л о. Щоб помножити різницю на число, досить помножити на це число окремо зменшуване і від'ємник, а потім від першого добутку відняти другий, тобто

$$(a-b)c = ac - bc.$$

П р и к л а д. $(35-15)\cdot 4 = 35\cdot 4 - 15\cdot 4 = 140 - 60 = 80$.

П р и м і т к а. Цю властивість іноді називають також розподільним законом множення відносно різниці.

4. Властивості ділення. а) Д і л е н н я с у м и н а ч и с л о. Щоб поділити суму на яке-небудь число, досить поділити на це число кожний доданок окремо (якщо це можливо) і одержані частки додати:

$$(a+b):c = a:c + b:c.$$

П р и к л а д. $(8+12):4 = 8:4 + 12:4 = 2+3 = 5$.

б) Д і л е н н я р і з н и ц і н а ч и с л о. Щоб поділити різницю на яке-небудь число, досить (якщо це можливо) поділити на це число зменшуване і від'ємник окремо, а потім від першої частки відняти другу:

$$(a-b):c = a:c - b:c.$$

П р и к л а д. $(18-6):3 = 18:3 - 6:3 = 6-2 = 4$.

Однак у прикладі $(17-7):5$ потрібно спочатку знайти різницю $17-7$.

в) Д і л е н н я ч и с л а н а д о б у т о к. Щоб поділити число на добуток, досить поділити це число на один співмножник, одержану частку поділити на другий співмножник, знову одержану частку поділити на третій співмножник і т. д.

П р и к л а д. 960 поділити на добуток $4\cdot 6\cdot 8$ можна так: $960:4 = 240$; $240:6 = 40$; $40:8 = 5$.

г) Д і л е н н я д о б у т к у н а ч и с л о. Частка від ділення добутку двох співмножників на число дорівнює добуткові одного з співмножників на частку від ділення другого співмножника на це число (якщо таке ділення можливе):

$$(ab):c = (a:c)b.$$

Ця властивість залишається вірною і для добутку кількох співмножників:

$$(abc):d = (a:d)bc.$$

П р и к л а д. Поділити добуток $24\cdot 18\cdot 10$ (який дорівнює 4320) на 8 можна так:

$$24:8 = 3;\ 3\cdot(18\cdot 10) = 3\cdot 180 = 540.$$

Однак у прикладі $(6\cdot 8):16$ спочатку треба обчислити добуток $6\cdot 8$.

д) М н о ж е н н я ч и с л а н а ч а с т к у. Щоб помножити число на частку, досить помножити це число на ділене і одержаний добуток поділити на дільник:

$$a(b:c) = (ab):c.$$

П р и к л а д. $6\cdot(200:5)$ можна розв'язати так:

$$6\cdot 200 = 1200;\ 1200:5 = 240.$$

е) Д і л е н н я ч и с л а н а ч а с т к у. Щоб поділити число на частку, досить (якщо це можливо) поділити дане число на ділене і одержану частку помножити на дільник, тобто

$$a:(b:c) = (a:b)c.$$

П р и к л а д. $360:(180:6)$ можна розв'язати так:

$$360:180 = 2;\ 2\cdot 6 = 12.$$

Проте приклад $30:(60:10)$ так розв'язувати не можна, бо число 30 на 60 не ділиться.

є) Д і л е н н я ч а с т к и н а ч и с л о. Щоб поділити частку на число, досить помножити дільник на це число і на одержаний добуток поділити ділене. Можна також поділити ділене на дане число, а одержану частку поділити на дільник.

В загальному вигляді

$$(a:b):c = a:(bc) \quad \text{або} \quad (a:b):c = (a:c):b.$$

П р и к л а д. $(1200:15):40$ можна обчислити трьома способами:

а) $(1200:15):40 = 80:40 = 2$;
б) $(1200:15):40 = 1200:(15\cdot 40) = 1200:600 = 2$;
в) $(1200:15):40 = (1200:40):15 = 30:15 = 2$.

5. Залежність між даними числами і результатами дій над ними. Д о д а в а н н я. *Якщо відомо суму двох доданків, а один доданок* *невідомо, то, щоб знайти його, досить від суми відняти відомий доданок*, тобто якщо

$$a + b = c, \text{ то } a = c - b \text{ і } b = c - a.$$

Приклад. $x + 30 = 42$; $x = 42 - 30$; $x = 12$.

Віднімання. *Щоб знайти невідоме зменшуване, досить до від'ємника додати різницю*, тобто, якщо $a - b = c$, то $a = b - c$.

Приклад. $x - 8 = 5$; $x = 8 + 5$; $x = 13$.

Щоб знайти невідомий від'ємник, досить від зменшуваного відняти різницю, тобто,

якщо $a - b = c$, то $b = a - c$.

Приклад. $45 - x = 15$; $x = 45 - 15$; $x = 30$.

Множення. *Щоб знайти невідомий співмножник, досить поділити добуток на відомий співмножник* (або на добуток відомих співмножників):

якщо $ab = c$, то $a = c : b$, $b = c : a$.

Приклади. а) $25x = 200$; $x = 200 : 25$; $x = 8$.
б) $3 \cdot 5x \cdot 2 = 210$; $x = 210 : (3 \cdot 5 \cdot 2)$; $x = 7$.

Ділення. *Щоб знайти невідоме ділене, досить дільник помножити на частку*, тобто,

якщо $a : b = c$, то $a = bc$.

Приклад. $x : 25 = 3$; $x = 25 \cdot 3$; $x = 75$.

Щоб знайти невідомий дільник, досить ділене поділити на частку, тобто,

якщо $a : b = c$, то $b = a : c$.

Приклад. $400 : x = 16$; $x = 400 : 16$; $x = 25$.

Щоб знайти ділене при діленні з остачею, досить дільник помножити на частку і додати остачу.

В загальному вигляді, якщо при діленні a на b одержали частку q і остачу r, то

$$a = bq + r.$$

Приклад. Якщо $30 : 4 = 7$ (остача 2), то $30 = 4 \cdot 7 + 2$.
$x : 5 = 4$ (остача 3), то $x = 5 \cdot 4 + 3 = 23$.

Щоб знайти дільник при діленні з остачею, досить від діленого відняти остачу і різницю поділити на частку. За допомогою букв можна записати так:

$$b = (a - r) : q.$$

Приклад. $40 : x = 6$ (остача 4), $x = (40 - 4) : 6 = 6$.

§ 4. Зміна результатів дій залежно від зміни даних

1. Зміна суми і різниці. *Якщо один із доданків збільшити (зменшити) на яке-небудь число, то на це число збільшиться (зменшиться) і сума*, тобто,

якщо $a + b = c$, то $(a + m) + b = c + m$ і $(a - m) + b = c - m$.

Приклади. $5 + 8 = 13$, тоді $(5 + 2) + 8 = 13 + 2$; $18 + 12 = 30$, тоді $(18 - 5) + 12 = 30 - 5$.

Якщо зменшуване збільшити (зменшити) на яке-небудь число, то і різниця збільшиться (зменшиться) на це саме число, тобто,

якщо $a - b = c$, то $(a + m) - b = c + m$
і $(a - m) - b = c - m$.

Приклади. $18 - 12 = 6$, тоді $(18 + 5) - 12 = 6 + 5$; $30 - 12 = 18$, тоді $(30 - 10) - 12 = 18 - 10$.

Якщо від'ємник збільшити (зменшити) на яке-небудь число, то різниця зменшиться (збільшиться) на таке саме число, тобто,

якщо $a - b = c$, то $a - (b + m) = c - m$
і $a - (b - m) = c + m$.

Приклади. $45 - 12 = 33$, тоді $45 - (12 + 3) = 33 - 3$; $52 - 30 = 22$, тоді $52 - (30 - 10) = 22 + 10$.

Якщо один доданок збільшити, а другий зменшити на одне і те саме число, то сума не зміниться, тобто,

якщо $a + b = c$, то $(a + m) + (b - m) = c$.

Якщо зменшуване і від'ємник збільшити (або зменшити) на одне і те саме число, то різниця не зміниться, тобто,

якщо $a - b = c$, то $(a + m) - (b + m) = c$
і $(a - m) - (b - m) = c$.

2. Зміна добутку і частки. *Якщо один співмножник збільшити (зменшити) в кілька разів, то і добуток збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів.*

В загальному вигляді,

якщо $ab = c$, то $(am)b = cm$
і $(a : m)b = c : m$.

Приклади. $5 \cdot 6 = 30$, тоді $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 30 \cdot 4$; $4 \cdot 8 = 32$, тоді $(4 : 2) \cdot 8 = 32 : 2$.

Якщо один співмножник збільшити (зменшити) у кілька разів, а інший зменшити (збільшити) у стільки ж разів, то добуток не зміниться, тобто,

$$\text{якщо } ab = c, \text{ то } (a : m)(bm) = c.$$

П р и к л а д. $25 \cdot 10 = 250$, тоді $(25 : 5) \cdot (10 \cdot 5) = 250$.

Якщо ділене збільшити (зменшити) в кілька разів, то і частка збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів, тобто,

$$\text{якщо } a : b = c, \text{ то } (ma) : b = mc$$
$$\text{і } (a : m) : b = c : m.$$

П р и к л а д и. $40 : 5 = 8$, тоді $(40 \cdot 6) : 5 = 6 \cdot 8$; $440 : 11 = 40$, тоді $(440 : 4) : 11 = 40 : 4$.

Якщо дільник збільшити (зменшити) в кілька разів, то частка зменшиться (збільшиться) у стільки ж разів, тобто,

$$\text{якщо } a : b = c, \text{ то } a : (bm) = c : m$$
$$\text{і } a : (b : m) = cm.$$

П р и к л а д и. $64 : 8 = 8$, тоді $64 : (8 \cdot 2) = 8 : 2$; $81 : 9 = 9$, тоді $81 : (9 : 3) = 9 \cdot 3$.

Якщо ділене і дільник збільшити або зменшити в одне і те саме число разів, то частка не зміниться, тобто,

$$\text{якщо } a : b = c, \text{ то } (am) : (bm) = c$$
$$\text{і } (a : m) : (b : m) = c.$$

Цю властивість називають основною властивістю частки.

П р и к л а д. $32 : 16 = (32 \cdot 2) : (16 \cdot 2) = 2$ і $32 : 16 = (32 : 4) : (16 : 4) = 2$.

3. Зміна остачі. *Якщо ділене і дільник збільшити або зменшити в одне і те саме число разів, то частка не зміниться, але остача збільшиться (або зменшиться) в те саме число разів.*

За допомогою букв це записується так: нехай a — ділене, b — дільник, q — частка, r — остача; тоді

$$a = bq + r \ (r < b), \ am = (bm)q + rm,$$
$$a : m = (b : m)q + (r : m).$$

Про це не можна забувати при діленні чисел, що закінчуються нулями. Наприклад, ділення $84100 : 400$ іноді виконують так:

$$\begin{array}{r|l} -841\cancel{00} & 4\cancel{00} \\ 84 & \overline{210} \\ \hline 1 & \end{array}$$

В дійсності ж для чисел 84100 і 400 остачею буде не одиниця, а 100, оскільки ми ділили 841 сотню на 4 сотні і одержали 210 і в остачі 1 сотню. Інакше: оскільки, закресливши нулі, зменшили ділене і дільник в 100 разів, то згідно з правилом і остача зменшилася в 100 разів, тому для одержання остачі від ділення заданих чисел її потрібно збільшити в 100 разів. Таким чином, $84100 : 400 = 210$ (остача 100).

§ 5. Порядок дій, дужки

1. Порядок дій. При виконанні кількох дій результат залежить від даних чисел і від порядку їх виконання. Так, наприклад, $4 - 2 + 1 = 3$, якщо виконувати дії в порядку їх запису; якщо ж спочатку додати 2 і 1 і відняти одержану суму від 4, то одержимо 1. Щоб не було непорозумінь, домовляються про порядок виконання дій у виразах.

Дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня прийнято поділяти на три ступеня. Додавання і віднімання називають *діями першого ступеня*, множення і ділення — *діями другого ступеня*, а піднесення до степеня — *дією третього ступеня*.

Якщо у виразі (без дужок) зустрічаються дії лише першого або лише другого ступеня, то їх виконують в тому порядку, в якому вони написані, зліва направо.

П р и к л а д и. а) $10 - 3 + 4 + 2 = 7 + 4 + 2 = 11 + 2 = 13$;
б) $40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 4 \cdot 5 = 20 \cdot 5 = 100$.

П р и м і т к а. Такий порядок дій другого ступеня не відповідає прийнятому в алгебрі, де під виразом $a : bc$ завжди розуміють $\frac{a}{bc}$.

Тому в деяких нових посібниках з арифметики (для останнього випадку) рекомендується інший порядок дій, що відповідає прийнятому в алгебрі: якщо у виразі зустрічаються дії лише другого ступеня, то спочатку виконується множення, а потім — ділення. Слідуючи цьому правилу, останній приклад треба було б розв'язувати так*:

$$40 \cdot 2 : 4 \cdot 5 = 80 : 20 = 4.$$

Однак поки що в школі дотримуються традиційного правила.

Якщо у виразі зустрічаються дії різних ступенів, то *спочатку виконують дії вищих, а потім нижчих ступенів*.

П р и к л а д. $2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3$.

Розв'язання.

$$5^2 = 25; \ 2 \cdot 25 = 50; \ 3 \cdot 3 = 9; \ 50 - 9 = 41.$$

* И. К. А н д р о н о в, Арифметика, Учпедгиз, 1962; стор. 108.

2. **Дужки.** Обчислюючи вирази, які містять дужки, *спочатку треба виконувати дії у дужках*, потім — всі інші дії згідно з прийнятими вище правилами.

Приклад. $9 + 16 : 4 - 2(16 - 2 \cdot 7 + 4) + 6 \cdot (2 + 5)$.

Розв'язання. Спочатку виконуємо дії у дужках:

$$16 - 2 \cdot 7 + 4 = 16 - 14 + 4 = 6;\ 2 + 5 = 7.$$

Потім виконуємо решту дій:

$$9 + 16 : 4 - 2 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 9 + 4 - 12 + 42 = 43.$$

Часто доводиться брати у дужки такі вирази, які вже самі містять дужки. Тоді, крім звичайних *круглих дужок* (), застосовують дужки *квадратні* []. Якщо потрібно взяти в дужки вираз, який містить вже круглі і квадратні дужки, користуються *фігурними дужками* {} . Обчислення таких виразів провадиться в такому порядку: спочатку обчислюють вирази всередині всіх круглих дужок, потім — в квадратних дужках, далі — у фігурних дужках; нарешті, виконуються дії, що залишились.

Приклад. $5 + 2 \cdot [14 - 3 \cdot (8 - 6)] + 32 : (10 - 2 \cdot 3)$.

Розв'язання.

$$5 + 2 \cdot [14 - 3 \cdot (8 - 6) + 32 : (10 - 2 \cdot 3)] =$$
$$= 5 + 2 \cdot (14 - 3 \cdot 2) + 32 : (10 - 6) = 5 + 2 \cdot 8 + 32 : 4 =$$
$$= 5 + 16 + 8 = 29.$$

§ 6. Перевірка арифметичних дій

1. **Перевірка дій на основі залежності між даними і результатами дій.** Коли виконують багато обчислень, їх контролюють, тобто перевіряють, чи вірно виконано всі арифметичні дії. Для цього здебільшого використовують основні закони арифметичних дій і залежності між даними і результатами дій. Наприклад, правильність виконання додавання $243596 + 32483 = 276079$ можна перевірити додаванням, переставивши доданки, або — відніманням: $276079 - 243596 = 32483$.

Аналогічно перевіряють правильність виконання й інших арифметичних дій: віднімання, множення і ділення. Проте іноді доцільно користуватися спеціальними способами перевірки обчислень, наприклад «правилом дев'ятки».

2. **Правило дев'ятки.** Якщо потрібно перевірити правильність виконання додавання, часто роблять таке. Знаходять остачі від ділення на 9 сум цифр кожного доданка, додають їх і результат знову ділять на 9. Одержану остачу порівнюють з остачею від ділення на 9 суми цифр знайденої суми. Якщо додавання виконано вірно, то ці остачі повинні бути однаковими. Якщо ж остачі неоднакові, значить додавання виконано невірно.

Приклад.

$$\begin{array}{r r} +\ 2378 & 2 \\ 3819 & 3 \\ 955 & 1 \\ \underline{200\,369} & \underline{2} \\ 206\,521 & 7 \end{array}$$

В даному прикладі остачі від ділення на 9 сум цифр доданків дорівнюють: 2, 3, 1, 2, їх сума дорівнює 8. А остача від ділення на 9 суми цифр результату 206521 дорівнює 7. Отже, додавання виконано невірно.

Аналогічно можна перевірити і правильність виконання множення. Тільки одержані остачі від ділення на 9 сум цифр співмножників потрібно не додавати, а перемножувати.

Приклад.

$$\begin{array}{r r} \times\ 1362 & 3 \\ \underline{103} & \underline{4} \\ \underline{4086} & \\ \underline{1362} & \underline{} \\ 140286 & 3 \end{array}$$

Тут остачі від ділення на 9 сум цифр співмножників дорівнюють 3 і 4. Їх добуток 12. Поділивши 12 на 9, одержимо остачу 3. Таку саму остачу одержуємо, якщо поділимо на 9 суму цифр числа 140286. Отже, можна сподіватись, що множення виконано вірно.

Примітка. Правило дев'ятки не завжди дає можливість виявити помилку в обчисленнях. Наприклад, якби замість вірної відповіді 140286 одержали 140376 або 142086, правило дев'ятки не виявило б помилку, адже остачі від ділення на 9 суми цифр кожного з цих чисел дорівнюють 3. Отже, цей спосіб перевірки не є достатнім. Однак подібні помилки, коли знайдений результат відрізняється від вірного лише порядком цифр та ін., трапляються дуже рідко.

Оскільки віднімання і ділення є діями, оберненими додаванню і множенню, і правильність обчислення різниці і частки перевіряється відповідно додаванням і множенням, то правило дев'ятки можна застосовувати також для контролю віднімання і ділення.

Відомий також спосіб перевірки арифметичних дій* за допомогою числа 11.

---

* Б. А. Тулинов, Я. Ф. Чекмарев, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, М., 1940, стор. 111.

§ 7. Способи швидких обчислень

Вміння швидко і безпомилково виконувати усні і письмові обчислення дозволяє економити працю і час, а також швидко виявляти помилки в своїх або чужих розрахунках. Наведемо кілька способів, якими найчастіше користуються в обчислювальній практиці.

1. Способи швидкого додавання і віднімання. Спосіб округлення. Цей спосіб заснований на зміні суми або різниці залежно від зміни компонентів і застосовується в тому випадку, коли хоча б один з компонентів є число, близьке до круглих десятків, сотень, тисяч і т. д.

а) Якщо один з доданків, округлюючи, збільшимо на кілька одиниць, то з одержаної суми потрібно відняти стільки ж одиниць.

Приклад. $264 + 391 = 264 + (391 + 9) - 9 = 264 + 400 - 9 = 655$.

б) Якщо один доданок збільшимо на кілька одиниць, а другий зменшимо на стільки ж одиниць, сума не зміниться. Виходячи з цього, виконується округлення одного доданка за рахунок іншого.

Приклад. $998 + 936 = 1000 + 934 = 1934$.

в) Якщо від'ємник при округленні збільшимо на кілька одиниць, то, щоб різниця не змінилась, потрібно і зменшуване збільшити на стільки ж одиниць.

Приклад. $2342 - 996 = 2346 - 1000 = 1346$.

г) Якщо зменшуване при округленні зменшимо на кілька одиниць, то до одержаної різниці потрібно додати стільки ж одиниць.

Приклад. $10012 - 8645 = 10000 - 8645 + 12 = 1355 + 12 = 1367$.

Використання властивостей додавання і віднімання.

Приклади. $279 + 583 + 721 = (279 + 721) + 583 = 1583;$
$352 + 109 - 52 = (352 - 52) + 109 = 409;$
$573 - 432 - 68 = 573 - (432 + 68) = 73.$

2. Способи швидкого множення і ділення. Множення методом Ферроля. Для одержання одиниць добутку перемножують одиниці співмножників, для одержання десятків перемножують десятки одного на одиниці другого співмножника і навпаки і результати додають, для одержання сотень перемножують десятки*.

Приклад. $\begin{array}{r} \times 32 \\ 46 \\ \hline 1472 \end{array}$ $2 \cdot 6 = 12$, 2 пишемо, 1 пам'ятаємо
$3 \cdot 6 = 18$, $2 \cdot 4 = 8$, $18 + 8 + 1 = 27$,
7 пишемо, 2 пам'ятаємо.
$3 \cdot 4 = 12$ і 2 — пишемо 14.

* Цей спосіб множення випливає з тотожності $(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd$.

Множення на число, близьке до одиниці якого-небудь розряду.

Приклади. $405 \cdot 97 = 405 \cdot (100 - 3) = 405 \cdot 100 - 405 \times 3 = 40500 - 1215 = 39285;$

$8012 \cdot 1006 = 8012 \cdot (1000 + 6) = 8012000 + 8012 \cdot 6 = 8012000 + 48072 = 8060072.$

Множення на 9, 99 і 999. *Щоб помножити на число, записане дев'ятками, потрібно до множеного дописати праворуч стільки нулів, скільки дев'яток у множнику, і від результату відняти множене.*

Приклади. $387 \cdot 9 = 3870 - 387 = 3483;$ $24 \cdot 99 = 2400 - 24 = 2376;$ $18 \cdot 999 = 18000 - 18 = 17982.$

Множення двозначного числа на 11. *Щоб помножити двозначне число, сума цифр* якого менша 10, на 11, потрібно між цифрами числа написати суму його цифр.*

Приклад. $72 \cdot 11 = 792$.

Щоб помножити на 11 двозначне число, сума цифр якого більша або дорівнює 10, потрібно між цифрою десятків, збільшеною на одиницю, і цифрою одиниць написати надлишок суми цифр числа над 10.

Приклад. $68 \cdot 11 = 748$.

Множення на 5, 25, 125. *Щоб помножити число на 5, 25, 125, досить поділити його відповідно на 2, 4, 8 і результат помножити на 10, 100, 1000.*

Приклади. $2486 \cdot 5 = 12430$, оскільки $2486 : 2 = 1243;$
$8084 \cdot 25 = 202100$, оскільки $8084 : 4 = 2021.$

Ділення на 5, 25, 125. *Щоб поділити число на 5, 25, 125, досить помножити його відповідно на 2, 4, 8 і поділити на 10, 100, 1000.*

Приклади. $235 : 5 = 47$, оскільки $235 \cdot 2 = 470;$
$1175 : 25 = 47$, оскільки $1175 \cdot 4 = 4700.$

Використання властивостей множення і ділення.

Приклади. $93 \cdot 8 \cdot 125 = 93 \cdot (8 \cdot 125) = 93000;$
$36 \cdot 18 : 9 = 36 \cdot (18 : 9) = 36 \cdot 2 = 72;$
$26 \cdot 235 : 13 = (26 : 13) \cdot 235 = 470.$

Піднесення до квадрата чисел, що мають цифру 5. *Щоб піднести до квадрата двозначне число, яке закінчується цифрою 5, досить число його десятків помножити на число, збільшене на одиницю, і до добутку праворуч дописати 25.*

Приклад. Обчислити 35^2.

Розв'язання (виконується усно). $3 \cdot 4 = 12$, дописавши 25, одержимо результат: $35^2 = 1225$.

Щоб піднести до квадрата двозначне число, що має 5 десятків, досить до 25 додати цифру одиниць і до результату дописати праворуч

* Див. зноску на стор. 68.

квадрат числа одиниць так, щоб в результаті одержалось чотиризначне число*.

П р и к л а д. Обчислити 54^2; 52^2.

Розв'язання (виконується усно). До 25 додаємо 4, одержуємо 29. Дописуємо 16. Одержуємо: $54^2 = 2916$. $52^2 = 2704$.

§ 8. Інструментальні обчислення

Крім усних і письмових обчислень, значного поширення набули також різноманітні інструментальні обчислення, тобто обчислення за допомогою спеціальних засобів — рахівниці, арифмометрів і т. ін.

1. Російська рахівниця. Це — дерев'яна рама з паралельними дротинами (звичайно їх 15). На кожній дротині нанизано по 10 кісточок, на четвертій або на третій знизу — чотири кісточки. Для зручності дві середні кісточки на кожній дротині забарвлені у темніший колір (рис. 1).

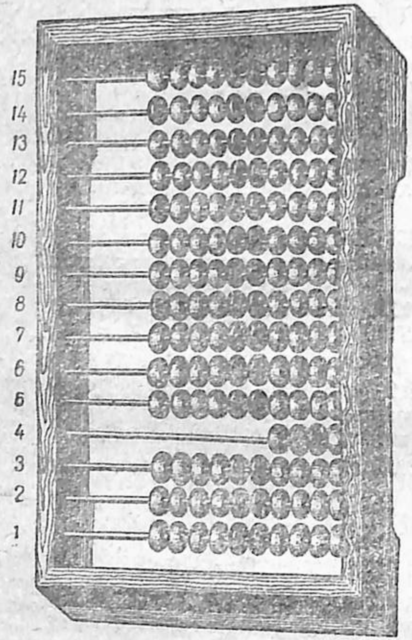


Рис. 1.

На рахівниці розрядні одиниці замінюються кісточками, які відкладають на відповідних дротинах. Ціле число зображається за допомогою кісточок, починаючи з одиниць вищого розряду числа.

При відкладанні чисел на рахівниці користуються такими правилами: а) 10 кісточок на будь-якій дротині рахівниці замінюються однією кісточкою сусідньої верхньої дротини, а одна кісточка може замінятися десятьма кісточками сусідньої нижньої дротини; б) на певних дротинах рахівниці потрібно відкладати лише стільки кісточок, скільки одиниць містить відповідний розряд даного числа; в) дротини рахівниці, що відповідають тим розрядам, де в запису даного числа стоїть нуль, потрібно залишати вільними.

* Ці правила випливають з тотожностей:

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25,$$
$$(50a + b)^2 = 2500 + 100b + b^2.$$

Для того щоб д о д а т и два числа, слід відкласти на рахівниці перший доданок, потім — другий. Якщо при відкладанні другого доданка на якій-небудь дротині не вистачить кісточок, треба відкласти одну кісточку на дротині наступного вищого розряду, одночасно знявши (зліва) на даній дротині стільки кісточок, скільки одиниць відповідного розряду не вистачає у другому доданку до 10. Відклавши на рахівниці другий доданок, одержимо результат — суму двох доданків. Якщо треба додати 3 або більше чисел, то до суми перших двох додають третє і т. д.

Н а п р и к л а д. 235 + 387. Відклавши на рахівниці 235 (ліворуч), додаємо до 2 кісточок розряду сотень ще 3, одержимо 5 сотень. На наступній нижній дротині слід відкласти ліворуч 8 кісточок, проте там їх залишилось тільки 7, тому замість 8 десятків відкладемо на наступній верхній дротині 1 сотню, тобто 10 десятків і відкинемо на даній дротині 2 кісточки (2 десятки, які ми відклали як зайві). Щоб додати 7 одиниць, додамо 1 десяток, а 3 одиниці знімемо. Одержимо 622.

При в і д н і м а н н і на рахівниці потрібно відкласти зменшуване і від нього відкинути від'ємник. При цьому: а) відкидання кісточок починають з одиниць вищого розряду; б) якщо в процесі віднімання на будь-якій дротині для відкидання відповідного розрядного числа від'ємника не вистачає кісточок, то на цій дротині переводять ліворуч число кісточок, що доповнює число розрядних одиниць від'ємника до 10, а на найближчій зверху дротині відкидають одну кісточку; в) за допомогою кісточок, що залишились ліворуч, читають різницю.

М н о ж е н н я чисел на рахівниці зводиться до додавання. Проте зведення множення до додавання на рахівниці практично виправдовує себе лише тоді, коли користуються скороченими способами множення. Найбільш поширений спосіб заснований на множенні одного із співмножників на суму розрядних одиниць другого співмножника з послідовним додаванням одержаних добутків.

Наприклад, $123 \cdot 12 = 123 \cdot 10 + 123 \cdot 2 = 1230 + (123 + 123)$.

Часто використовується також спосіб округлення.

Д і л е н н я на рахівниці зводиться до послідовного віднімання від діленого дільника та його добутків на цілі степені десяти. При цьому в кожному розряді частки буде стільки одиниць, скільки разів прийшлось віднімати добутки дільника на відповідний степінь 10. Вичерпування діленого слід починати зі старших розрядних одиниць. При діленні верхні дротини правлять для зображення частки.

Наприклад, нехай треба поділити 9375 на 75. Для цього відкладаємо на рахівниці 9375, потім відділяємо великим пальцем лівої руки в діленому 93, від 93 віднімаємо (скидаємо) дільник 75 : 93 — 75 = 18. У частці (на крайній верхній дротині) відкладаємо одну кісточку. Пересуваємо великий палець лівої руки униз на одну дротину. Від числа 187 два рази віднімаємо число 75, у частці на одну дротину нижче відкладаємо дві кісточки. Від числа 375, що залишається, віднімаємо п'ять разів число 75; кожне віднімання відмічаємо однією кісточкою у частці на третій зверху дротині. Після цього в діленому не буде остачі, а у частці буде відкладено 125. Це і буде шуканий результат.

2. **Арифмометр.** Існує багато різних типів арифмометрів*. Ми розглянемо арифмометр «Фелікс» (рис. 2).

Установка чисел на цьому арифмометрі здійснюється пересуванням установочних важелів *2* донизу по установочних шкалах.

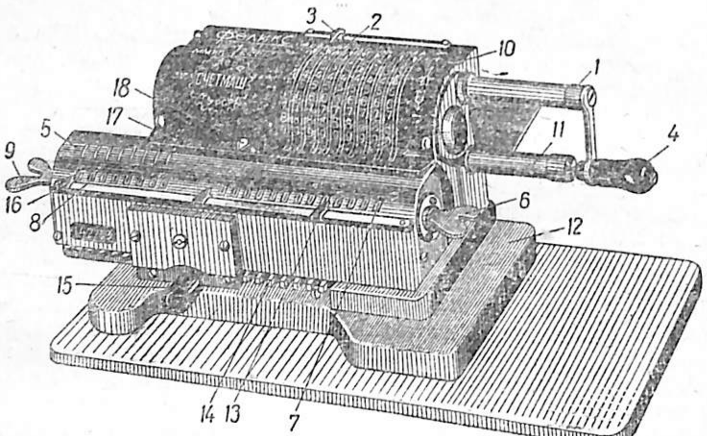


Рис. 2.

Всього установочних шкал 10, кожна з них відповідає певному розряду. Нумерація установочних шкал йде справа наліво.

Щоб привести всі установочні важелі у вихідне положення (загасити установку), потрібно повернути на чверть оберту за годинниковою стрілкою оперативну ручку *4* при відведеній ліворуч кнопці гасильної гребінки важелів *18*.

У каретці *5* арифмометра знаходяться віконця лічильників: праворуч розміщені віконця лічильника результатів *7*, ліворуч — віконця лічильника обертів *8*. У лічильнику результатів є 13 розрядів (віконець), у лічильнику обертів їх 8; занумеровані вони справа наліво. При обертанні оперативної ручки у віконцях лічильника обертів з'являються цифри (білі при обертанні за годинниковою стрілкою, червоні

* Г. П. Евстигнеев и В. Н. Крушин, Счетно-цифровые машины, Машгиз, 1953.

при обертанні проти годинникової стрілки), що вказують число відповідних обертів. Лічильники загашаються гасильними барашками *6* і *9* за допомогою повороту їх до защіпання.

При одному натискуванні на важіль *15* каретка може переміститися лише на один розряд у відповідному напрямку. При піднятому важелі *15* каретка може вільно переміщуватися праворуч і ліворуч.

Для вказування розряду, в якому йде лічба, править стрілка *17*. Рухомі коми правлять для відокремлення цілих частин чисел, які одержують на лічильниках, від дробових частин.

Перед початком роботи на арифмометрі необхідно його привести у вихідне положення. Для цього:

а) оперативна ручка *4* повинна бути опущена донизу і защіплена;

б) барашки *6* і *9* горизонтальні і защіплені;

в) каретка *5* нерухома і защіплена важелем *15*;

г) обидва лічильники погашені.

Під час обертання оперативна ручка *4* повинна бути відтягнена праворуч, а після обертання защіплена. Обертати ручку потрібно з зупинкою внизу. Барашки, ручка і установочні важелі повинні працювати легко.

При роботі на арифмометрі забороняється:

а) обертати ручку, не впевнившись в тому, що барашки защіплені;

б) зупиняти ручку не у вертикальному нижньому положенні;

в) переміщувати каретку, не перевіривши, що барашки і ручка защіплені;

г) робити різкі рухи і удари по важелю при переміщенні каретки на кілька поділок.

Д о д а в а н н я н а а р и ф м о м е т р і. Нехай потрібно додати два числа: 38785 і 30817. Для цього поступаємо так:

1) приводимо арифмометр у вихідне положення;

2) ставимо каретку у крайнє ліве положення;

3) установочними важелями набираємо перший доданок 38785,— одиниці на першій шкалі, десятки на другій і т. д.;

4) оперативною ручкою *4* робимо повний оберт за годинниковою стрілкою; у віконцях лічильника результатів з'являється перший доданок (38785), у віконці лічильника обертів — біла цифра 1;

5) відводимо ліворуч важіль гасильної гребінки і робимо чверть оберту за годинниковою стрілкою, гасимо на установочних шкалах перший доданок;

6) не рухаючи каретку, встановлюємо важелями другий доданок (30817);

7) робимо повний оберт оперативною ручкою *за годинниковою стрілкою*;

8) у віконцях лічильника результатів читаємо суму (69602).

При додаванні трьох або більшого числа доданків повторюємо п'яту, шосту і сьому операції і лише після цього читаємо результат.

Віднімання. Нехай потрібно від числа 38785 відняти число 30817. Для цього робимо шість перших операцій, які слід було б зробити при додаванні вказаних чисел, а потім як сьому операцію робимо повний оберт оперативною ручкою *проти годинникової стрілки* і, так само як і у випадку додавання, на результуючому лічильнику читаємо різницю (7968).

Множення. Нехай потрібно знайти добуток 654 · 56. Для цього поступаємо так:

1) приводимо арифмометр у вихідне положення;
2) ставимо каретку у крайнє ліве положення;
3) встановлюємо важелями співмножник з більшим числом значущих цифр (654);
4) обертаємо оперативну ручку за годинниковою стрілкою шість разів;
5) пересуваємо каретку на один розряд ліворуч і обертаємо ручку за годинниковою стрілкою 5 разів;
6) на лічильнику результатів читаємо добуток (36624).

Якби у другому співмножнику була цифра третього розряду, то п'яту операцію слід було б повторити. Так само потрібно було б зробити при наявності у другому співмножнику цифр четвертого і вищих розрядів.

Примітка. При множенні десяткових дробів, перш ніж рахувати результат, слід відокремити цілу частину добутку від дробової за допомогою коми *13* на шкалі лічильника результатів.

При виконанні в якому-небудь розряді множення на число, яке є більшим від 5, є рація зробити один зайвий додатний оберт у сусідньому зліва розряді, а у даному розряді зробити стільки від'ємних обертів, на скільки 10 більше від числа, на яке множимо.

Наприклад, при множенні на 187 можна обійтись шістьма обертами (замість 16): трьома від'ємними обертами у розряді одиниць, одним від'ємним у розряді десятків і двома додатними у розряді сотень (200 — — 13). На лічильнику обертів буде число 213, причому 2 — біла цифра, 1 і 3 — червоні цифри. Читати це число треба так: 200 — 13 = 187 (число обертів, що дорівнює множникові).

Ділення. Операція ділення на арифмометрі, так само як і на російській рахівниці, зводиться до повторного віднімання дільника від діленого, внаслідок чого у лічильнику обертів одержуємо частку. Нехай потрібно поділити 624 на 26. Для цього поступаємо так:

1) приводимо арифмометр у вихідне положення;
2) подаємо каретку праворуч до відказу (а не ліворуч, як при множенні);
3) встановлюємо ділене 624 за допомогою оперативної ручки *4*, каретки *5* і гасильного барашка *6*;
4) прямим обертом оперативної ручки переводимо ділене у лічильник результатів, де воно розміщується у віконцях: 6 у *13*-му, 2 у *12*-му і 4 у *11*-му віконцях;

5) гасимо одиницю, що одержується у віконці лічильника обертів *8*, і установочні важелі;
6) встановлюємо важелями за допомогою каретки *5* і гасильного барашка лічильника результатів *6* дільник 26 проти діленого 62;
7) робимо два зворотних оберти ручкою, після чого на місці перших двох цифр діленого з'являється 10, а у лічильнику обертів — червона цифра 2;
8) подаємо каретку на один розряд ліворуч і робимо чотири зворотних оберти. У лічильнику результатів з'являються нулі, а у лічильнику обертів — частка 24 (червоними цифрами). Отже, 624 : 26 = = 24.

§ 9. Подільність чисел

1. Подільність суми. *Якщо кожний з доданків ділиться на яке-небудь число, то і сума їхня обов'язково поділиться на це саме число.*

Приклад. 32 ділиться на 4, 16 ділиться на 4, 40 ділиться на 4, отже, сума 32 + 16 + 40 також ділиться на 4.

Якщо кожний доданок, крім одного, ділиться на яке-небудь число, а один не ділиться, то сума не ділиться на це число.

Приклад. 32 ділиться на 16, 16 ділиться на 16, 40 не ділиться на 16, сума 32 + 16 + 40 також не ділиться на 16.

Якщо ж два або більше доданків не діляться на яке-небудь число, то про подільність суми не можна сказати нічого певного: в одних випадках вона ділиться, а в інших не ділиться на дане число.

Приклад. 13 і 7 не діляться ні на 5, ні на 6; сума 13 + 7 ділиться на 5, але не ділиться на 6.

2. Подільність різниці. *Якщо зменшуване і від'ємник діляться на яке-небудь число, то і різниця ділиться на це саме число.*

Приклад. 100 ділиться на 5, 35 ділиться на 5, різниця 100 — 35 ділиться на 5.

Якщо лише одне з чисел — зменшуване або від'ємник — ділиться на яке-небудь число, а інше не ділиться, то і різниця не ділиться на це число.

Приклад. 100 ділиться на 20, 30 не ділиться на 20, різниця 100—30 не ділиться на 20.

Якщо ні зменшуване, ні від'ємник не діляться на дане число, то різниця їх може ділитись, а може й не ділитись на це число.

Приклад. 100 і 30 не діляться ні на 7, ні на 13. Їхня різниця 100 — 30 ділиться на 7, але на 13 не ділиться.

3. Подільність добутку на число і числа на добуток. *Якщо хоч один із співмножників ділиться на яке-небудь число, то і добуток їх також ділиться на це число.*

Приклад. 15 ділиться на 3, отже, кожний із добутків 15 · 17, 8 · 15 · 101, 23 · 15 · 15 також ділиться на 3.

Якщо ж жодний із співмножників не ділиться на дане число, то це ще не означає, що на дане число не поділиться і їх добуток.

П р и к л а д. Ні 15, ні 10 не діляться на 6, проте їхній добуток $15 \cdot 10$ на 6 ділиться.

Якщо дане число ділиться на добуток, то воно ділиться також на кожний із співмножників цього добутку.

П р и к л а д. 90 ділиться на добуток $2 \cdot 3 \cdot 5$, тому 90 ділиться і на 2, і на 3, і на 5.

Обернене твердження помилкове. Якщо яке-небудь число ділиться окремо на кілька даних чисел, то на їхній добуток воно може і не поділитися.

П р и к л а д. 180 ділиться і на 5, і на 9, і на 6, проте на добуток $5 \cdot 9 \cdot 6$ воно не ділиться.

П р и м і т к а. Якщо ж дане число ділиться на кілька попарно взаємно простих чисел (див. стор. 74), то воно ділиться і на їхній добуток.

П р и к л а д. 180 ділиться на 5, 3 і 4; ці числа попарно взаємно прості, тому 180 ділиться і на добуток $5 \cdot 3 \cdot 4$.

§ 10. Ознаки подільності

Ділення без остачі не завжди можна виконати. Щоб, не виконуючи ділення, встановити, ділиться чи не ділиться одне число на інше, користуються *ознаками подільності*.

1. Ознака подільності на 10. *На* 10 *діляться всі ті і лише ті числа, які закінчуються нулями.*

П р и к л а д. Число 2350 ділиться на 10.

2. Ознака подільності на 2 і на 5. *На* 2 *або на* 5 *діляться ті і лише ті числа, у яких остання цифра зображає число, що ділиться відповідно на* 2 *або на* 5.

П р и к л а д и. Число 140 ділиться і на 2, і на 5, оскільки воно закінчується нулем (а нуль ділиться на будь-яке число). Число 1306 ділиться на 2, оскільки остання його цифра 6 зображає число, що ділиться на 2, проте на 5 це число не ділиться, оскільки 6 не ділиться на 5. Число 2035 ділиться на 5, оскільки 5 ділиться на 5, проте на 2 це число не ділиться, оскільки 5 не ділиться на 2.

3. Ознака подільності на 3 і на 9. *На* 3 *або на* 9 *діляться ті і лише ті числа, у яких сума цифр* ділиться відповідно на* 3 *або на* 9.

П р и к л а д. Число 31521 ділиться на 3, оскільки сума його цифр $3 + 1 + 5 + 2 + 1 = 12$ ділиться на 3. На 9 це число не ділиться, тому що 12 не ділиться на 9. Число 5193 ділиться на 9, оскільки сума

* Вираз «сума цифр» вживається замість слів — «сума однозначних чисел, вображених цифрами», адже цифри — лише знаки, і дії виконуються над числами, а не над цифрами.

його цифр $5 + 1 + 9 + 3 = 18$ ділиться на 9. Це число ділиться також і на 3 (якщо число ділиться на 9, то, природно, воно ділиться і на 3).

4. Ознака подільності на 4 і на 25. *На* 4 *або на* 25 *діляться ті і лише ті числа, які закінчуються двома нулями або у яких дві останні цифри зображають число, що ділиться відповідно на* 4 *або на* 25.

П р и к л а д. Число 4600 ділиться і на 4, і на 25, оскільки воно закінчується двома нулями. Число 1264 ділиться на 4, тому що 64 ділиться на 4, проте це число не ділиться на 25, оскільки 64 не ділиться на 25. Число 1275 ділиться на 25, тому що 75 ділиться на 25, але не ділиться на 4, оскільки 75 не ділиться на 4.

5. Ознака подільності на 8 і на 125. *На* 8 *або на* 125 *діляться ті і лише ті числа, які закінчуються трьома нулями, а також ті, у яких три останні цифри зображають число, що ділиться відповідно на* 8 *або на* 125.

П р и к л а д. Число 3279000 ділиться і на 8, і на 125, оскільки воно ділиться на $1000 = 8 \cdot 125$. Число 5248 ділиться на 8, проте не ділиться на 125, тому що 248 ділиться на 8, але не ділиться на 125.

6. Ознака подільності на 7, 11 і 13. *На* 7, 11 *і* 13 *діляться ті і лише ті числа, у яких різниця між числом, зображеним трьома останніми цифрами, і числом, зображеним рештою цифр (або навпаки), ділиться відповідно на* 7, *на* 11 *або на* 13.

П р и к л а д. Число 253253 ділиться і на 7, і на 11, і на 13, оскільки різниця $253 - 253 = 0$, а нуль ділиться на будь-яке натуральне число. Число 253264 ділиться на 11, проте не ділиться ні на 7, ні на 13, тому що різниця $264 - 253 = 11$ ділиться на 11, але не ділиться ні на 7, ні на 13. Число 1208965 не ділиться ні на 7, ні на 11, ні на 13, оскільки різниця $1208 - 965 = 243$ не ділиться ні на одне з цих чисел.

7. Ознаки подільності на 6, 12, 18, 24 і т. д. *На* 6 *діляться ті і лише ті числа, які діляться на* 2 *і на* 3.

П р и к л а д. Число 31242 ділиться на 6, через те що воно ділиться на 2 і на 3 (а числа 2 і 3 не мають спільних множників, більших від 1).

На 12 *діляться ті і лише ті числа, які діляться на* 3 *і на* 4 (але не на 2 і не на 6, тому що 2 і 6 мають спільний множник; наприклад, 18 ділиться і на 2, і на 6, однак не ділиться на 12).

П р и к л а д. 216 ділиться на 12, оскільки воно ділиться на 3 і на 4.

На 18 *діляться ті і лише ті числа, які діляться на* 2 *і на* 9.

П р и к л а д. 9396 ділиться на 18, через те що воно ділиться на 2 і на 9.

Існують ознаки подільності і на інші числа, але вони складні, тому в таких випадках іноді користуються загальною ознакою подільності чисел.

8. Загальна ознака подільності чисел. *Для того, щоб число N ділилося на d, необхідно і достатньо, щоб сума добутків цифр цього числа* *на остачі, які одержуються від ділення на d відповідних степенів десяти, ділилася на d.*

Якщо $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ і $10^n = d \cdot q_n + r_n$; $10^{n-1} = dq_{n-1} + r_{n-1}$; $\ldots$; $10^2 = d \times q_2 + r_2$; $10 = dq_1 + r_1$, то N ділиться на d в тому і лише в тому випадку, коли на d ділиться сума:

$$M = a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0.$$

Із загальної ознаки легко вивести розглянуті вище окремі ознаки подільності і деякі інші. Нехай, наприклад, $d = 11$. Тоді

$10 = 11 \cdot 1 - 1$, $r_1 = -1$; $10^2 = 11 \cdot 9 + 1$, $r_2 = +1$;

$10^3 = 11 \cdot 91 - 1$, $r_3 = -1$; $10^4 = 11 \cdot 909 + 1$, $r_4 = +1$ і т. д.

Отже, при $d = 11$ $M = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$. Маємо таку ознаку: *на 11 діляться всі ті і лише ті числа, у яких різниця між сумою цифр, що стоять на парних місцях, і сумою решти цифр ділиться на* 11.

Приклад. Чи ділиться на 11 число 47 214 051 819?

$9 + 8 + 5 + 4 + 2 + 4 = 32$, $1 + 1 + 0 + 1 + 7 = 10$, $32 - 10 = 22$.

22 ділиться на 11, отже, і дане число ділиться на 11.

§ 11. Прості і складені числа

1. Прості і складені числа. Будь-яке число* ділиться на одиницю і саме на себе. Існують числа, які діляться не лише на одиницю і самі на себе, а мають ще й інші дільники. Наприклад, число 12, крім 1 і 12, має ще дільники: 2, 3, 4, 6.

Всяке число, крім одиниці, яке ділиться лише на одиницю і саме на себе, називається *простим*. Число, яке ділиться не лише на одиницю і саме на себе, але ще і на інші числа, називається *складеним*. Число 1 не відноситься ні до простих, ні до складених чисел.

2. Таблиця простих чисел. Для розв'язання багатьох задач з арифметики велику допомогу надають таблиці простих чисел. Тому ще за давніх часів математики складали ці таблиці. Дуже простий спосіб складання таблиць простих чисел винайшов давньогрецький математик Ератосфен (III ст. до н. е.). Спосіб Ератосфена полягає в тому, що в ряді натуральних чисел послідовно викреслюються всі складені. Нехай, наприклад, потрібно знайти всі прості числа в натуральному ряді від 1 до 30. Для цього випишемо всі натуральні числа від 1 до 30 в порядку зростання. Перше з них, 1 — не просте, викреслюємо його. Наступне за ним число 2 — просте, залишаємо, а кожне друге після 2, тобто 4, 6, 8, ... викреслюємо. Наступне просте число 3 залишаємо, а кожне третє, починаючи після 3, викреслюємо. Наступне просте число 5 залишаємо, а кожне п'яте, починаючи після 5, викреслюємо (при цьому рахуємо і вже викреслені числа). В результаті одержуємо:

~~1~~, 2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~, ~~25~~, ~~26~~, ~~27~~, ~~28~~, 29, ~~30~~.

Залишені невикреслені числа

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — прості, менші від 30.

Такий спосіб складання таблиць простих чисел називають *«решетом Ератосфена»*.

Примітка. Якщо потрібно скласти таблицю простих чисел, які не перевищують N, то вказаним вище способом викреслюють всі складені числа, що діляться на 2, 3, 5 і т. д. до найбільшого простого числа p, яке не перевищує $\sqrt{N}$. Наприклад, якщо потрібно скласти таблицю простих чисел, що не перевищують 1000, потрібно викреслити всі складені, які діляться на кожне просте число до 31 включно.

Тепер існують надруковані таблиці простих чисел до дванадцяти мільйонів, а у бібліотеці Віденської Академії наук зберігається рукописна таблиця простих чисел до ста мільйонів.

Однак уже відомо багато окремих простих чисел, що набагато виходять за межі навіть найбільших таблиць.

На стор. 37 цього довідника наведено таблицю простих чисел, що не перевищують 6000.

3. Властивості простих чисел. Хоч вивченням простих чисел займалось багато математиків від давніх часів до наших днів, прості числа і закони їх розміщення серед натуральних чисел мають багато нерозв'язаних проблем.

Відомо, що *послідовність простих чисел нескінченна* (теорема Евкліда). Серед простих чисел є багато таких, різниця яких дорівнює 2, наприклад, 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 17 і 19, ..., 179 і 181, ..., 10016957 і 10016959. Такі пари чисел називають простими числами-близнятами. Є припущення, що чисел-близнят існує нескінченно багато. Однак це не вдалось нікому ні довести, ні спростувати. Багато проблем простих чисел можна було б розв'язати, якби ми вміли визначати, скільки є простих чисел, менших від будь-якого натурального N. Однак цього ми зараз ще не вміємо робити. Відомі лише методи, які дають можливість наближено знаходити кількість простих чисел, менших від даного числа. У розв'язанні цієї проблеми велике значення мають праці видатного російського вченого П. Л. Чебишова (1821—1894). В наш час ряд питань теорії простих чисел розв'язав відомий радянський математик І. М. Виноградов (нар. 1891).

Література. И. Я. Депман, История арифметики, Учпедгиз, 1965;

В. Серпинский, Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, Физматгиз, М., 1963;

Э. Трост, Простые числа, Физматгиз, М., 1959.

* Тут маються на увазі лише натуральні числа.

4. Розкладання чисел на прості множники. Розкласти число на прості множники — це значить представити його у вигляді добутку простих чисел.

Складене число розкладається на прості множники *єдиним способом* (з точністю до порядку співмножників). Це означає, що, наприклад, число 20 розкладається на дві двійки і п'ятірку завжди, незалежно від того, почнемо ми розклад з множників 2 або з 5:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2.$$

Способи розкладання чисел на прості множники викладемо на прикладах.

П р и к л а д 1. Нехай потрібно розкласти на прості множники число 315. Користуючись ознаками подільності, бачимо, що 2 не буде дільником числа 315, а 3 буде дільником 315. Тоді запишемо число 315, проводимо праворуч від нього вертикальну риску, за нею — знайдений дільник 3, а під числом 315 — частку від ділення 315 на 3, тобто 105.

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Далі з числом 105 поступаємо так само і встановлюємо, що 105 теж має 3 своїм дільником. Записуємо число 3 праворуч від 105 за рискою, а під числом 105 записуємо число 35 — частку від ділення 105 на 3. Число 35 на 3 не ділиться, тому випробуємо наступне за величиною просте число 5. Виконавши з 35 ті самі операції, праворуч від 35 пишемо 5, а під ним — число 7. Оскільки 7 просте число, то ділимо його саме на себе, під ним записуємо 1.

Числа, записані праворуч від вертикальної риски, і становлять всі прості множники числа 315, тобто $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Цей загальний спосіб у деяких випадках можна спростити.

П р и к л а д 2. Розкласти на прості множники 5600.

Розв'язання. Помічаємо, що $5600 = 56 \cdot 100$. Число 56 дорівнює добуткові $7 \cdot 8$, отже, дорівнює добуткові трьох двійок і однієї семірки. Число 100 дорівнює добуткові двох двійок і двох п'ятірок. Тому

$$5600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Як бачимо, серед співмножників розкладу можуть бути і однакові числа. В таких випадках спрощують записи, використовуючи поняття степеня (стор. 49). Наприклад, наведений вище розклад записують так:

$$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Такий запис числа у вигляді добутку степенів різних простих чисел називається *канонічним розкладом* даного числа.

5. Розкладання на множники великих чисел. Якщо дане число невелике, або якщо воно ділиться на невелике просте число, то його неважко розкласти на множники. Проте в загальному випадку розкладання чисел на множники дуже трудомісткий. Наприклад, не так легко розкласти на множники порівняно невелике число 12091. Випробовуючи числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 і т. д., ми довго не можемо виявити його дільників. Адже дане число не просте!

Кілька років математики не могли розкласти на множники число 549 755 813 881. І лише нещодавно електронна обчислювальна машина виявила, що це число (воно дорівнює $2^{39} - 7$) просте.

§ 12. Спільні дільники і кратні

1. Дільники числа. *Дільником даного числа називається число, на яке дане число ділиться без остачі.* Всяке просте число, наприклад 13, має лише два дільники: одиницю і самого себе. Будь-яке складене число має більше двох дільників, наприклад число 6 має чотири дільники: 1, 2, 3 і 6. Щоб знайти дільники даного складеного числа, спочатку розкладають його на прості множники; кожний з цих множників буде простим дільником даного числа. Перемножуючи прості множники по два, по три, по чотири і т. д., одержують складені дільники даного числа.

П р и к л а д. Знайти всі дільники числа 50.

Розв'язання. $50 = 2 \cdot 5^2$, отже, 50 ділиться на 1, 2, 5, $2 \cdot 5$, 5^2, $2 \cdot 5^2$. Інших дільників число 50 не має.

Відповідь. 1, 2, 5, 10, 25, 50.

Відоме правило, за яким можна легко визначати кількість всіх дільників даного числа. Для цього потрібно збільшити на одиницю показник степеня кожного співмножника канонічного розкладу даного числа і одержані числа перемножити.

П р и к л а д. Скільки дільників має число 5600?

Розв'язання. $5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 36$.

Відповідь. Число 5600 має 36 дільників.

2. Спільний дільник кількох чисел. *Спільним дільником кількох чисел називається число, на яке всі дані числа діляться без остачі.* Наприклад, числа 25 і 35 мають спільні дільники: 1 і 5; числа 42 і 105 мають такі спільні дільники: 1, 3, 7 і 21. Серед усіх спільних дільників завжди є найбільший. Це число називається *найбільшим спільним дільником* (НСД). В наших прикладах у першому випадку НСД дорівнював 5, у другому — 21.

Записують: НСД (25, 35) = 5; НСД (42, 105) = 21.

Для знаходження найбільшого спільного дільника кількох чисел можна користуватися такими способами.

П е р ш и й с п о с і б — за допомогою *розкладання на прості множники.* Щоб знайти НСД кількох чисел, розкладають кожне з цих чисел на прості множники і виписують всі *спільні множники*, причому кожний з них беруть з *найменшим показником*, що зустрічається в цих розкладах.

П р и к л а д. Знайти НСД чисел: 210, 1260 і 245.

Розкладемо ці числа на прості множники: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $245 = 5 \cdot 7^2$. Тоді НСД буде $5 \cdot 7 = 35$.

Д р у г и й с п о с і б — за допомогою *послідовного ділення*. Він називається ще *алгоритмом Евкліда*. Щоб знайти НСД двох чисел, *ділять більше число на менше* і, якщо одержується остача, то ділять *менше число на остачу*; якщо знову одержується остача, то ділять *першу остачу на другу*. Так продовжують ділити доти, поки в остачі не одержиться нуль. *Останній дільник і буде НСД даних чисел.*

П р и к л а д. Знайти НСД чисел 391 і 299.

Поділивши число 391 на 299, одержимо в остачі 92. Поділивши 299 на 92, одержимо в остачі 23. Поділивши 92 на 23, одержимо в остачі 0. Отже, 23 є НСД чисел 391 і 299. Запис зручно розмістити так:

```
      _391 | 299
       299 |----
      ---- |  1
  _299 | 92
   276 |----
  ---- |  3
 _92 | 23
  92 |----
 --- |  4
   0
```

Щоб знайти таким способом НСД трьох і більше чисел, знаходять спочатку найбільший спільний дільник яких-небудь двох з них, потім — найбільший спільний дільник знайденого дільника і якого-небудь третього даного числа і т. д.

3. Взаємно прості числа. Два або кілька чисел, найбільший спільний дільник яких дорівнює одиниці, називаються *взаємно простими*.

П р и к л а д и. Числа 15 і 22 взаємно прості; числа 7, 19, 32 і 84 взаємно прості; числа 18 і 15 не взаємно прості, оскільки НСД (18, 15) = 3.

Якщо даних чисел більше двох і кожні два з них взаємно прості, то такі числа називають *попарно взаємно простими*.

П р и к л а д и. 6, 9 і 4 — числа взаємно прості, але не попарно взаємно прості; числа 8, 9, 7 і 55 — попарно взаємно прості.

4. Спільне кратне чисел. *Спільним кратним даних чисел називається будь-яке натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел* (без остачі).

Наприклад, числа 12, 24 і 36 є спільними кратними чисел 3 і 4.

5. Найменше спільне кратне (НСК). З усіх спільних кратних особливий інтерес являє найменше спільне кратне.

Найменшим спільним кратним кількох чисел називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел. Наприклад, для трьох чисел: 6, 15 і 20 найменшим спільним кратним є 60, оскільки

жодне натуральне число, менше за 60, не ділиться на 6, на 15 і на 20, а 60 ділиться на ці числа.

Записують: НСК (6, 5, 20) = 60.

Вкажемо два способи знаходження найменшого спільного кратного кількох чисел.

П е р ш и й с п о с і б — за допомогою *розкладання на прості множники. Щоб знайти НСК кількох чисел, потрібно розкласти ці числа на прості множники*, потім взяти розклад одного з них і помножити його на прості множники з розкладів інших чисел, яких не вистачає в даному.

П р и к л а д. Знайти НСК чисел 72 і 108.

Розкладемо дані числа на множники: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$. Випишемо всі множники числа 108 (це зручніше, оскільки число 108 більше за 72) і допишемо множник 2, який ще додатково є у числі 72, одержимо: НСК $(72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.

Якщо більше з даних чисел ділиться на всі інші, то воно і буде найменшим спільним кратним цих чисел. Наприклад, НСК (60, 120, 40) = = 120.

Якщо жодна пара даних чисел не має спільних множників, відмінних від одиниці, то для знаходження найменшого спільного кратного цих чисел їх потрібно перемножити. Наприклад, найменше спільне кратне чисел 7, 8 і 11 дорівнює їх добуткові, тобто НСК $(7, 8, 11) = 7 \times \times 8 \cdot 11 = 616$.

Д р у г и й с п о с і б. Відомо, що НСК $(a, b) = \dfrac{ab}{\text{НСД}\,(a, b)}$, тобто: *найменше спільне кратне двох чисел дорівнює добуткові цих чисел, поділеному на їхній найбільший спільний дільник**.

Використовуючи цю залежність, можна визначити НСК.

П р и к л а д. Знайти НСК чисел 360 і 70. Оскільки НСД (360, 70) = 10, то НСК $(360, 70) = (360 \cdot 70) : 10 = 2520$.

Щоб знайти цим способом найменше спільне кратне трьох і більшої кількості чисел, спочатку знаходять найменше спільне кратне яких-небудь двох з них, потім — найменше спільне кратне цього найменшого кратного і якого-небудь третього даного числа і т. д.

§ 13. Недесяткові системи числення

1. Систематичні числа. Загальноприйнята зараз система числення називається *десятковою*, тому що за цією системою 10 одиниць одного розряду становлять одиницю наступного вищого розряду. В десятковій системі всі числа записуються за допомогою десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Якщо ми пишемо, наприклад, число 3827, то розуміємо,

* В. М. Б р а д и с, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1954, стор. 68.

що воно складається з трьох тисяч, восьми сотень, двох десятків і семи одиниць:

$$3827 = 3000 + 800 + 20 + 7,$$

або

$$3827 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7.$$

Кажуть: *основою* десяткової системи числення є число 10. Однак можливі і недесяткові системи числення. Можна рахувати не десятками, а, наприклад, п'ятірками. Тоді 5 одиниць першого розряду будуть складати одну одиницю 2-го, а 5 одиниць 2-го — одну одиницю 3-го розряду і т. д. В цьому випадку будемо мати систему числення з основою 5. Її називають *п'ятірковою системою числення*. Для запису чисел у п'ятірковій системі досить мати п'ять цифр: 0, 1, 2, 3, 4. Можливі також *двійкова, трійкова, дванадцяткова* й інші системи числення. Щоб не змішувати числа, записані в різних системах, прийнято праворуч і дещо нижче останньої цифри у дужках писати основу системи*. Наприклад, числа $214_{(5)}$, $1011_{(2)}$, $299_{(12)}$ записані відповідно у п'ятірковій, двійковій і дванадцятковій системах. Це означає, що

$$214_{(5)} = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 4,$$
$$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1,$$
$$299_{(12)} = 2 \cdot 12^2 + 9 \cdot 12 + 9.$$

Очевидно, за основу системи числення можна взяти будь-яке натуральне число більше за одиницю. Якщо за основу взяти число g, то для запису будь-якого числа досить мати g цифр: 0, 1, 2, 3, ..., $g - 1$. Числа, записані в системі числення при основі g у вигляді $g^n a_n + g^{n-1} a_{n-1} + \dots + g a_1 + a_0$, де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — цифри, називаються взагалі *систематичними*.

Примітка. Для зображення чисел у системі числення з основою більшою 10, недостатньо цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Наприклад, для дванадцяткової системи потрібно було б запровадити особливі знаки для 10 і 11.

2. **Перехід від однієї системи числення до іншої.** Щоб переходити від однієї системи числення до іншої, досить вміти: а) переходити від будь-якої системи числення до десяткової; б) переходити від десяткової системи до іншої системи.

Перехід від будь-якої системи до десяткової виконується шляхом безпосереднього обчислення.

Приклад. Дано число $3021_{(4)}$, записати його в десятковій системі.

* Проте іноді пишуть і без дужок.

Розв'язання. $3021_{(4)} = 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 + 1 = 192 + 8 + 1 = 201.$

Перехід від десяткової системи до іншої покажемо на прикладі. Число 856 записати при основі 4.

Встановлюємо, скільки четвірок міститься в числі 856: $856 : 4 = 214$. Отже, число складається з 214 одиниць 2-го розряду (214 четвірок). Полічимо одиниці 2-го розряду четвірками; поділимо 214 на 4; одержимо 53 одиниці 3-го розряду і 2 одиниці 2-го розряду. Ведемо тепер лічбу одиниць 3-го розряду четвірками; ділимо 53 на 4 і одержуємо 13 одиниць 4-го розряду і 1 одиницю 3-го розряду. Ділимо 13 на 4, дістаємо 3 одиниці 5-го розряду і 1 одиницю 4-го розряду. Цей процес записують так:

```
 856 | 4
−856 | 214 | 4
   0  −212 | 53 | 4
         2  −52 | 13 | 4
               1  −12 | 3
                     1
```

Отже, дане число містить 3 одиниці 5-го розряду, 1 одиницю 4-го розряду, 1 одиницю 3-го розряду, 2 одиниці 2-го розряду і 0 одиниць 1-го розряду: $856_{(10)} = 31120_{(4)}$.

3. **Арифметичні дії над систематичними числами.** Додавання. Знаходження суми зводиться до додавання одиниць одного й того самого розряду, починаючи з одиниць 1-го розряду, і до перетворення суми одиниць нижчого розряду у вищий, якщо ця сума — число двозначне. Тому додавання можна виконувати безпосередньо, як і в десятковій системі, використовуючи таблицю додавання однозначних чисел.

Наприклад, у системі числення з основою 4 таблиця додавання має такий вигляд:

$0 + 0 = 0$	$1 + 1 = 2$	$2 + 2 = 10$
$0 + 1 = 1$	$1 + 2 = 3$	$2 + 3 = 11$
$0 + 2 = 2$		
$0 + 3 = 3$	$1 + 3 = 10$	$3 + 3 = 12.$

Приклад. Додати числа $2103_{(4)}$ і $1312_{(4)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 2103_{(4)} \\ +\,1312_{(4)} \\ \hline 10021_{(4)} \end{array}$$

Ще простіша таблиця додавання у двійковій системі числення:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+1=10.$$

Приклад.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 110101_{(2)} \\ 1100011_{(2)} \end{array} \\ \hline 10011000_{(2)} \end{array}$$

Віднімання. Віднімання виконуємо так само, як і в десятковій системі: записуємо від'ємник під зменшуваним і віднімаємо порозрядно, починаючи з 1-го розряду. Якщо віднімання одиниць неможливе, то виконуємо в зменшуваному роздрібнення одиниці наступного вищого розряду.

Приклад. Обчислити різницю $2301_{(4)}-1223_{(4)}$.

Розв'язання. Від однієї одиниці 1-го розряду не можна відняти 3, а одиниць 2-го розряду у зменшуваному немає, тоді беремо одну одиницю 3-го розряду, вона містить чотири одиниці 2-го розряду, з них три залишаємо на місці одиниць 2-го розряду, а одну роздрібнюємо в одиниці 1-го розряду, одержимо чотири одиниці 1-го розряду, плюс одна одиниця 1-го розряду, яка у нас є, всього маємо п'ять одиниць. Віднявши від них 3 одиниці від'ємника, дістанемо 2. Надалі віднімаємо розрядами: різниця одиниць 2-го розряду: $3-2=1$; 3-го розряду: $2-2=0$; 4-го розряду: $2-1=1$. Результат: $1012_{(4)}$.

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 2301_{(4)} \\ 1223_{(4)} \end{array} \\ \hline 1012_{(4)} \end{array}$$

Множення. Множення виконується так само, як і в десятковій системі: пишемо множник під множеним і виконуємо множення, використовуючи таблицю множення.

Так, при $g=7$ таблиця набуває вигляду:

$0\cdot0=0$	$1\cdot1=1$	$2\cdot2=4$	$3\cdot3=12$	$4\cdot4=22$	$5\cdot5=34$
$0\cdot1=0$	$1\cdot2=2$	$2\cdot3=6$	$3\cdot4=15$	$4\cdot5=26$	$5\cdot6=42$
$0\cdot2=0$	$1\cdot3=3$	$2\cdot4=11$	$3\cdot5=21$	$4\cdot6=33$	$6\cdot6=51$
$0\cdot3=0$	$1\cdot4=4$	$2\cdot5=13$	$3\cdot6=24$		
$0\cdot4=0$	$1\cdot5=5$	$2\cdot6=15$			
$0\cdot5=0$	$1\cdot6=6$				
$0\cdot6=0$					

Приклад. Обчислити $2034_{(7)}\cdot5_{(7)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2034_{(7)} \\ 5_{(7)} \end{array} \\ \hline 13236_{(7)}. \end{array}$$

Обчислюємо: $4\cdot5=26$; 6 — цифра одиниць; 2 додаємо до добутку $3\cdot5$; $3\cdot5+2=21+2=23$; цифра одиниць 2-го розряду 3; 2 додаємо до добутку $0\cdot5$; $0\cdot5+2=2$; 2 — цифра одиниць 3-го розряду; $2\cdot5=13$; 3 — цифра одиниць 4-го розряду і 1 — цифра одиниць 5-го розряду. Результат: $13236_{(7)}$.

У двійковій системі таблиця множення така:

$$0\cdot0=0, \; 0\cdot1=0, \; 1\cdot1=1.$$

Приклад.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 101_{(2)} \\ 110_{(2)} \end{array} \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110_{(2)} \end{array}$$

Ділення. Ділення систематичних чисел основане на тих самих прийомах, що й у випадку $g=10$.

Приклад. Обчислити частку $23604_{(7)}:51_{(7)}$.

Розв'язання. Дільник — число двоцифрове, відділяємо в діленому зліва направо дві цифри. Вони зображають число всіх одиниць 4-го розряду, але $23_{(7)}$ менше за $51_{(7)}$, тому беремо в діленому трицифрове число $236_{(7)}$ і ділимо на $51_{(7)}$; у частці одержуємо 3 одиниці 3-го розряду; множимо $51\cdot3$ і одержаний добуток 213 віднімаємо від 236, остачу 23 роздрібнюємо в одиниці 2-го розряду і продовжуємо ділення, поки не одержимо остачу, меншу від дільника.

$$\begin{array}{l|l} -23604_{(7)} & 51_{(7)} \\ \cline{2-2} \;\;213 & 332_{(7)} \\ \cline{1-1} \;\;-230 & \\ \;\;\;\;213 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;-144 & \\ \;\;\;\;\;\;132 & \\ \cline{1-1} \;\;\;\;\;\;\;\;12_{(7)} & \end{array}$$

4. Короткі історичні відомості при системи числення. Людство не зразу прийшло до десяткової системи числення. Однією з найдавніших була п'ятіркова система числення.

До III—II тисячоліть до н. е. відноситься шумеро-вавілонська система числення, основою якої було число 60. Ця система мала значні переваги, оскільки число 60 ділиться на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, тоді як основа нашої системи 10 має лише 4 дільники: 1, 2, 5 і 10. Залишки шістдесяткової системи збереглися до цього часу (ділення кола на 360°, ділення градуса на 60 мінут і на 3600 секунд, ділення години на 60 *хв* і на 3600 *сек*). У народів, що заселяли за давніх давен Європу, застосовувалась система числення з основою 20, залишки якої збереглись у французькій та англійській мовах.

У різних мовах залишились також залишки дванадцяткової системи числення (російська «дюжина» — 12, німецьке «гросс» — 12^2). Деякі вчені у XVIII ст. пропонували навіть замінити нею (як більш зручною) десяткову систему.

Мабуть чи не самою давньою була двійкова система числення. Останнім часом ця система знайшла практичне застосування в електронних обчислювальних машинах: тут важлива та перевага, що в ній використовуються лише дві цифри: 0 і 1, а їх легко передавати двома операціями з електронними лампами: замиканням і розмиканням.

Таким чином, одне з найдавніших досягнень людської культури відродилося на новій технічній основі.

ДРОБОВІ ЧИСЛА

§ 14. Звичайні дроби

1. Частини одиниці. Коли ми говоримо, що від дому до школи йти півгодини, то зображаємо час не в цілих годинах, а у частинах години. Якщо одне яблуко потрібно розділити між трьома хлопчиками, то кожний з них може отримати лише третину яблука, або ж його третю частину. В цих випадках ми маємо справу не з цілими одиницями, а з їх частинами. Частини можуть бути найрізноманітнішими, наприклад сантиметр є сота частина метра, грам є тисячна частина кілограма, хвилина є шестидесята частина години і т. д.

2. Дробові числа. *Число, складене з однієї або кількох однакових частин одиниці, називається дробом* (звичайним дробом).

Наприклад, одна десята, три п'ятих, дванадцять сьомих — дроби. Числа, до складу яких входить ціле число і дріб, називаються *мішаними* числами. Наприклад, якщо 5 яблук розділити між двома хлопчиками, то кількість яблук у кожного хлопчика зобразиться цілим числом (два) і деяким дробом (половина), тобто мішаним числом.

Дроби і мішані числа разом називають *дробовими числами*. Одержуються дробові числа внаслідок вимірювань і ділення.

3. Зображення дробу. Дріб зображають за допомогою двох натуральних чисел і дробової *риски*. Під рискою записують число, яке показує, на скільки рівних частин поділена одиниця. Воно називається *знаменником* дробу. Над рискою записують число, яке показує, скільки таких частин містить дріб. Воно називається *чисельником* дробу. Чисельник і знаменник називаються *членами дробу*. Наприклад, у дробу $\frac{5}{7}$ чисельник дорівнює 5, а знаменник — 7. Читають дроби так: спочатку називають чисельник, потім — знаменник, наприклад:

$$\frac{2}{7} \text{ — «дві сьомих».}$$

Примітка. Дроби $\frac{100}{25}$ і $\frac{120}{5}$ читаються однаково: «сто двадцять п'ятих». В подібних випадках потрібно між вимовою чисельника і знаменника робити паузу.

Мішані числа зображають так: спочатку пишуть ціле число, а потім поруч з ним справа приписують дріб. Наприклад, мішане число «два і чотири п'ятих» записують: $2\frac{4}{5}$.

4. Правильні і неправильні дроби. Розрізняють дроби правильні і неправильні. Дріб називається *правильним*, якщо його чисельник менший знаменника. Якщо ж чисельник більший знаменника, або дорівнює йому, то такий дріб називається *неправильним*. Наприклад, дроби

$$\frac{1}{2},\ \frac{10}{11},\ \frac{3}{125} \text{ — правильні,}$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{37}{37},\ \frac{100}{7} \text{ — неправильні.}$$

Правильний дріб менший одиниці, а неправильний — більший або дорівнює одиниці.

5. Перетворення неправильного дробу в мішане число і обернене перетворення. Щоб перетворити неправильний дріб у мішане число, потрібно чисельник дробу поділити на знаменник і знайти остачу; частка покаже число цілих одиниць, а остача — кількість частин одиниці.

Приклад. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, оскільки $20 : 3 = 6$ (остача 2).

Щоб перетворити мішане число в неправильний дріб, потрібно знаменник помножити на ціле число, до одержаного добутку додати чисельник і зробити цю суму чисельником шуканого дробу, а знаменник залишити попередній.

Приклад. $7\frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{9} = \frac{65}{9}$.

6. Порівняння дробів за величиною. *Два дроби вважаються рівними, якщо величини, зображувані цими числами при одній і тій самій одиниці виміру, рівні між собою.* Наприклад, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, оскільки дві довжини, з яких одна становить $\frac{3}{4}$ *м*, а інша $\frac{6}{8}$ *м*, рівні (рис. 3).

З двох дробів з однаковими знаменниками той дріб більший, у якого більший чисельник. Наприклад, $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, оскільки $5 > 3$.

З двох дробів з однаковими чисельниками той дріб більший, у якого знаменник менший. Наприклад, $\frac{6}{7} > \frac{6}{11}$, оскільки $7 < 11$.

У загальному випадку дроби порівнюються за величиною так. Перемножують чисельник першого дробу на знаменник другого, а знаменник першого на чисельник другого. Якщо перший з цих добутків більший (дорівнює або менший) від другого, то і перший дріб відповідно більший (дорівнює або менший) від другого.

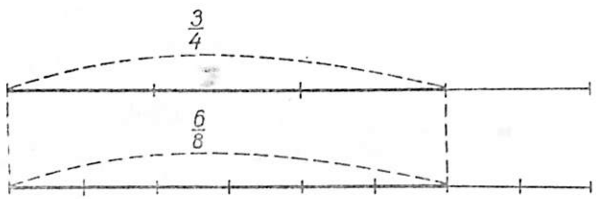


Рис. 3.

П р и к л а д и. $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$, бо $5 \cdot 9 > 6 \cdot 7$;

$\frac{5}{8}$ дорівнює $\frac{10}{16}$, бо $5 \cdot 16 = 8 \cdot 10$;

$\frac{10}{7} < \frac{9}{6}$, бо $10 \cdot 6 < 7 \cdot 9$.

В деяких випадках співвідношення між дробами легше встановити, порівнюючи їх з одиницею або половиною.

П р и к л а д 1. Порівняти дроби $\frac{15}{17}$ і $\frac{36}{35}$.

$$\frac{15}{17} < 1, \text{ а } \frac{36}{35} > 1, \text{ отже, } \frac{15}{17} < \frac{36}{35}.$$

П р и к л а д 2. Порівняти дроби $\frac{16}{31}$ і $\frac{27}{56}$.

$$\frac{16}{31} > \frac{1}{2}, \text{ бо } \frac{1}{2} = \frac{16}{32};$$

$$\frac{27}{56} < \frac{1}{2}, \text{ бо } \frac{1}{2} = \frac{27}{54}.$$

Отже, $\frac{16}{31} > \frac{27}{56}$.

§ 15. Зміна величини дробу зі зміною його членів

1. Кратна зміна чисельника і знаменника. Оскільки дріб можна розглядати як частку від ділення чисельника на знаменник, то при зміні членів дробу його величина змінюється так само, як змінюється частка при зміні діленого і дільника (див. стор. 56).

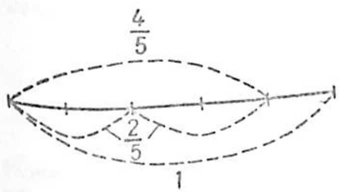


Рис. 4.

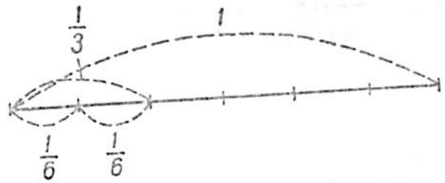


Рис. 5.

Якщо чисельник дробу збільшити або зменшити в кілька разів, не змінюючи знаменника, то величина дробу відповідно збільшиться або зменшиться у стільки ж разів.

П р и к л а д. Візьмемо дріб $\frac{2}{5}$ і збільшимо його чисельник у два рази. Одержимо дріб $\frac{4}{5}$, в 2 рази більший за попередній (рис. 4).

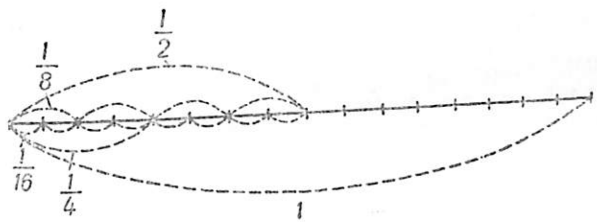


Рис. 6.

Якщо знаменник дробу збільшити або зменшити у кілька разів, а чисельник не змінювати, то величина дробу відповідно зменшиться або збільшиться у стільки ж разів. Якщо, наприклад, знаменник дробу $\frac{1}{3}$ збільшити вдвічі, то величина дробу зменшиться вдвічі (рис. 5).

Величина дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник одноразово помножити на одне і те саме число. Це твердження називають *основною властивістю дробу*.

Цю властивість дробу записують так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Величина дробу також не зміниться, якщо чисельник і знаменник його поділити на одне й те саме число.

Приклад. $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$ і, навпаки,

$$\frac{8}{16}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{(рис. 6).}$$

Зі збільшенням чисельника і знаменника на одне й те саме число дріб збільшується, якщо він правильний, і зменшується, якщо він неправильний і не дорівнює одиниці.

Приклади. $\frac{3}{5}<\frac{3+1}{5+1}=\frac{4}{6}$; $\frac{7}{6}>\frac{7+1}{6+1}=\frac{8}{7}$.

§ 16. Перетворення дробів

1. Скорочення дробу. *Скороченням дробу* називається заміна його іншим, рівним йому, дробом з меншими членами за допомогою ділення чисельника і знаменника на їх спільний дільник. Є кілька способів скорочення дробів.

Перший спосіб. *Послідовне скорочення* на спільні дільники чисельника і знаменника.

Приклад. $\frac{72}{96}=\frac{36}{48}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

Другий спосіб. *Повне скорочення* на найбільший спільний дільник чисельника і знаменника.

Приклад. Скоротити дріб $\frac{840}{3600}$.

Розв'язання. НСД $(840, 3600)=120$. Тому можна зразу скоротити на 120: $\frac{840}{3600}=\frac{7}{30}$.

Третій спосіб. Розглянутими способами скорочують дроби у тих випадках, коли чисельник і знаменник легко розкласти на множники. Якщо це не вдається зробити швидко, користуються *алгоритмом Евкліда* (див. стор. 74).

Приклад. Скоротити дріб $\frac{12091}{14017}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r|l} 14017 & 12091 \\ 12091 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12091 & 1926 \\ 11556 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1926 & 535 \\ 1605 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 535 & 321 \\ 321 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 321 & 214 \\ 214 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 214 & 107 \\ 214 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Як бачимо, НСД $(14017, 12091)=107$. Тому $\frac{12091}{14017}=\frac{113}{131}$.

Якщо члени дробу не мають спільних дільників, більших за одиницю, то дріб називається *нескоротним*. У такого дробу чисельник і знаменник взаємно прості числа. Два нескоротних дроби рівні лише тоді, коли у них рівні і чисельники, і знаменники. Будь-який дріб дорівнює одному і лише одному нескоротному дробу.

2. Роздроблення дробів. Щоб зобразити дріб у менших частинах одиниці, не змінюючи його величини, потрібно збільшити чисельник і знаменник в одне й те саме число разів. Зображення дробу в менших частинах одиниці називають *роздробленням* дробів.

Приклад. Зобразити дріб $\frac{4}{5}$ в п'ятнадцятих частинах одиниці. Маємо: $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{12}{15}$.

3. Зведення дробів до спільного знаменника. *Звести дроби до спільного знаменника* — значить зобразити їх в однакових частинах одиниці без зміни величини дробу. Звичайно зводять дроби до *найменшого* спільного знаменника.

Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, роблять так: скорочують дроби, якщо це можливо; знаходять НСК всіх знаменників; обчислюють для кожного дробу частку від ділення знайденого НСК на його знаменник, їх називають *додатковими множниками*; множать обидва члени кожного дробу на відповідний йому додатковий множник.

Приклад. Звести до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{5}{72}$ і $\frac{7}{48}$.

Розв'язання. НСК (72, 48) = 144. Додаткові множники: 144 : 72 = 2, 144 : 48 = 3. Отже,

$$\frac{5}{72}=\frac{5\cdot 2}{72\cdot 2}=\frac{10}{144},\quad \frac{7}{48}=\frac{7\cdot 3}{48\cdot 3}=\frac{21}{144}.$$

§ 17. Арифметичні дії із звичайними дробами

1. Додавання. Сумою дробів з одним і тим самим знаменником називають дріб, що має той самий знаменник, а чисельник дорівнює сумі чисельників даних дробів, тобто $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$.

Це означення можна сформулювати у вигляді такого правила.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Приклад. $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$.

Щоб додати дроби з різними знаменниками, потрібно звести їх до спільного знаменника, а потім додати одержані чисельники і під сумою підписати спільний знаменник.

Приклад. $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$. Коротше записують так: $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}$.

Щоб додати мішані числа, потрібно окремо знайти суму цілих і суму дробових частин. Записують так:

$$4\frac{7}{15}+1\frac{11}{45}+8\frac{4}{9}=13\frac{21+11+20}{45}=13\frac{52}{45}=14\frac{7}{45}.$$

2. Віднімання. *Віднімання* дробів можна означити як *дію, обернену додаванню дробів*. Відняти від одного дробового числа інше — значить знайти третє число, яке в сумі з другим дає перше. З цього означення випливає правило:

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно відняти чисельник від'ємника від чисельника зменшуваного і залишити попередній знаменник. Дію записують так:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Щоб відняти дроби з різними знаменниками, потрібно спочатку звести їх до спільного знаменника, потім від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника і під їх різницею підписати спільний знаменник. Дію записують так:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}.$$

Якщо потрібно відняти одне мішане число від іншого мішаного числа, то, якщо можна, віднімають дріб від дробу, а ціле від цілого. Дію записують так:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=3\frac{36-33}{44}=3\frac{3}{44}.$$

Якщо дріб від'ємника більший від дробу зменшуваного, то роздроблюють одну одиницю цілої частини зменшуваного у потрібні частини і додають до дробу зменшуваного, після цього роблять так, як описано вище. Дію записують так:

$$5\frac{4}{9}-1\frac{11}{12}=4\frac{16-33}{36}=3\frac{52-33}{36}=3\frac{19}{36}.$$

Аналогічно поступають, коли потрібно відняти від цілого числа дробове.

Приклад. $3-2\frac{3}{5}=2\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

3. Поширення властивостей додавання і віднімання на дробові числа. Всі закони і властивості додавання і віднімання натуральних чисел (див. стор. 50) вірні і для дробових чисел. Їх застосування в багатьох випадках значно спрощує процес обчислення.

Приклад 1. $4\frac{3}{4}+1\frac{7}{9}+2\frac{5}{12}+5\frac{2}{9}+\frac{7}{12}+3\frac{1}{4}=\left(4\frac{3}{4}+3\frac{1}{4}\right)+\left(1\frac{7}{9}+5\frac{2}{9}\right)+\left(2\frac{5}{12}+\frac{7}{12}\right)=8+7+3=18.$

Тут використані переставний і сполучний закони додавання.

Приклад 2. $2\frac{7}{720}+\left(3\frac{31}{144}+\frac{53}{720}\right)=\left(2\frac{7}{720}+\frac{53}{720}\right)+3\frac{31}{144}=2\frac{6}{72}+3\frac{31}{144}=5\frac{12+31}{144}=5\frac{43}{144}.$

Тут використано правило додавання суми до числа.

Приклад 3. $43\frac{29}{36}-\left(15\frac{11}{36}-4\frac{1}{2}\right)=\left(43\frac{29}{36}-15\frac{11}{36}\right)+4\frac{1}{2}=$
$=28\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=33.$

Приклад 4. $17\frac{7}{8}-\left(2\frac{3}{5}+6\frac{7}{8}\right)=\left(17\frac{7}{8}-6\frac{7}{8}\right)-2\frac{3}{5}=11-$
$-2\frac{3}{5}=8\frac{2}{5}.$

Тут використано правила віднімання від числа різниці і суми.

4. Множення. Множення дробу на ціле число можна розуміти так само, як і множення цілого числа на ціле, тобто, як додавання однакових доданків. Наприклад, $\frac{2}{3}\cdot 5=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$. Проте для множення на дріб таке тлумачення не підходить. Наприклад, перемножуючи $\frac{3}{7}$ на $\frac{2}{3}$, не можна сказати, що тут «$\frac{3}{7}$ треба взяти $\frac{2}{3}$ раза доданком».

Тут необхідно дати нове означення.

Добутком дробів називають такий дріб, чисельник якого дорівнює добуткові чисельників даних дробів, а знаменник — добуткові їх знаменників, тобто, $\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}=\frac{a\cdot b}{n\cdot m}$. Це означення випливає з необхідності зберегти за дією множення ту роль, яку воно відіграє в теорії і практиці, поки ми розглядаємо лише цілі числа, а також ті властивості, які має множення цілих чисел (див. стор. 51). Зокрема, при такому означенні ті задачі, які у випадку цілих числових даних розв'язуються множенням, у випадку дробових числових даних також можна розв'язувати множенням.

З наведеного означення випливає правило множення дробів:

Щоб помножити дріб на дріб, треба помножити чисельник на чисельник, а знаменник на знаменник і перший добуток зробити чисельником, а другий — знаменником.

При множенні слід робити (якщо можливо) скорочення.

Приклад. $\frac{12}{19}\cdot\frac{19}{30}=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\cancel{19}}{\cancel{19}\cdot\underset{5}{\cancel{30}}}=\frac{2}{5}.$

Якщо врахувати, що ціле число являє собою дріб із знаменником 1, то множення дробу на ціле число і цілого числа на дріб можна виконувати за цим самим правилом.

Приклади. $\frac{2}{13}\cdot 7=\frac{2}{13}\cdot\frac{7}{1}=\frac{14}{13}=1\frac{1}{13};$
$6\cdot\frac{5}{12}=\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{12}=\frac{30}{12}=2\frac{1}{2}.$

5. Множення мішаних чисел. Щоб перемножити мішані числа, потрібно спочатку перетворити їх у неправильні дроби, а потім перемножити за правилом множення дробів.

Приклад. $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{16}{5}=\frac{80}{10}=8.$

Якщо ж перемножують мішане число на ціле, то простіше множити окремо цілу частину і дробову частину.

Приклад. $2\frac{3}{5}\cdot 3=6\frac{9}{5}=7\frac{4}{5}.$

6. Поширення властивостей множення на дробові числа. Властивості множення натуральних чисел (див. стор. 51) справедливі і для дробів. Їх використання спрощує усні і письмові обчислення.

Приклад 1. $7\frac{2}{15}\cdot 30=\left(7+\frac{2}{15}\right)\cdot 30=210+4=214.$

Приклад 2. $9\frac{7}{8}\cdot 8=9\cdot 8+\frac{7}{8}\cdot 8=72+7=79.$

Приклад 3. $\frac{3}{4}\cdot\left(7\frac{9}{31}\cdot 1\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot 7\frac{9}{31}=1\cdot 7\frac{9}{31}=7\frac{9}{31}.$

Приклад 4.
$$\left(12\frac{2}{5}\cdot 43\frac{5}{17}\right)\cdot\frac{5}{31}=\left(\frac{62}{5}\cdot\frac{5}{31}\right)\cdot 43\frac{5}{17}=2\cdot 43\frac{5}{17}=86\frac{10}{17}.$$

7. Ділення дробів. Для ділення дробів зберігається те саме означення, що й для ділення цілих чисел: це — дія, за допомогою якої за даним добутком двох співмножників і одному з цих співмножників відшукується другий співмножник. Поділити одне число на друге — значить знайти таке третє число, яке при множенні на друге дає перше.

Виконують ділення дробів за таким правилом.

Щоб поділити дріб на дріб, потрібно чисельник першого дробу помножити на знаменник другого, а знаменник першого на чисельник другого і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником:
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Приклад. $\frac{6}{7}:\frac{9}{10}=\frac{6\cdot 10}{7\cdot 9}=\frac{60}{63}=\frac{20}{21}.$

За цим же правилом можна виконати ділення дробу на ціле число і цілого на дріб, якщо представити ціле число у вигляді дробу із знаменником 1.

П р и к л а д и. $15 : \frac{5}{7} = \frac{15}{1} : \frac{5}{7} = \frac{15 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{21}{1} = 21;$

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8}{13} : \frac{2}{1} = \frac{8 \cdot 1}{13 \cdot 2} = \frac{4}{13}.$$

Однак в останньому прикладі простіше чисельник поділити на ціле число:

$$\frac{8}{13} : 2 = \frac{8 : 2}{13} = \frac{4}{13}.$$

8. Ділення мішаних чисел. Щоб виконати ділення мішаних чисел, їх спочатку перетворюють у неправильні дроби і потім ділять за правилом ділення дробів.

П р и к л а д. $12\frac{3}{5} : 1\frac{1}{20} = \frac{63}{5} : \frac{21}{10} = \frac{63 \cdot 20}{5 \cdot 21} = 12.$

Однак при діленні мішаного числа на ціле буває зручніше ділити окремо цілу частину і окремо дробову частину мішаного числа.

П р и к л а д. $30\frac{5}{7} : 5 = 6\frac{1}{7}.$

9. Заміна ділення множенням. Якщо у якому-небудь дробі поміняти місцями чисельник і знаменник, то одержиться новий дріб, *обернений* даному. Наприклад, для дробу $\frac{8}{7}$ оберненим дробом буде $\frac{7}{8}$. Очевидно, що добуток двох взаємно обернених дробів дорівнює 1.

Наприклад, $\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1.$

Враховуючи це, можна ділення виконувати за таким правилом. *Щоб поділити одне число на інше, потрібно ділене помножити на число, обернене дільникові.*

П р и к л а д и. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}.$

$$14 : \frac{7}{8} = 14 \cdot \frac{8}{7} = \frac{14 \cdot 8}{7} = 16.$$

$$\frac{4}{7} : 5\frac{1}{3} = \frac{4}{7} : \frac{16}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{28}.$$

10. Приклади на всі дії із звичайними дробами. Приклади на всі дії з дробами розв'язують або частинами або ланцюжком.

П р и к л а д. Обчислити:

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} + \frac{15}{28} : \frac{5}{84}}{5 : \frac{1}{2} + 10} + \frac{2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : 2 + \frac{1}{3} : 3} \cdot \frac{1}{36} - \frac{16}{35}.$$

Розв'язання частинами.

1) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 21} = \frac{1}{7};$

2) $\frac{15}{28} : \frac{5}{84} = \frac{15 \cdot 84}{28 \cdot 5} = 9;$

3) $\frac{1}{7} + 9 = 9\frac{1}{7};$ 4) $5 : \frac{1}{2} = 10;$ 5) $10 + 10 = 20;$

6) $9\frac{1}{7} : 20 = \frac{64}{7 \cdot 20} = \frac{16}{35};$ 7) $2 : \frac{1}{2} = 4;$

8) $3 : \frac{1}{3} = 9;$ 9) $4 + 9 = 13;$ 10) $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4};$

11) $\frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9};$ 12) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36};$

13) $13 : \frac{13}{36} = \frac{13 \cdot 36}{13} = 36;$

14) $36 \cdot \frac{1}{36} = 1;$ 15) $\frac{16}{35} + 1 - \frac{16}{35} = 1.$

Відповідь. 1.

Приклад обчислення ланцюжком:

$$\frac{\left(8\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) : 3\frac{1}{2}}{\left(5 - 4\frac{2}{5}\right) : 10} + \frac{\left(3\frac{1}{8} - 1\frac{7}{8}\right) \cdot 1\frac{3}{5}}{\left(2 - 1\frac{3}{8}\right) : 3\frac{1}{8}} = \frac{7\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}}{\frac{3}{5} : 10} + \frac{1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5}}{\frac{5}{8} : 3\frac{1}{8}} =$$

$$= \frac{\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}} + \frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{25}} = \frac{\frac{15}{7}}{\frac{3}{50}} + \frac{2}{\frac{1}{5}} = \frac{15}{7} \cdot \frac{50}{3} + 2 \cdot 5 =$$

$$= \frac{250}{7} + 10 = 35\frac{5}{7} + 10 = 45\frac{5}{7}.$$

§ 18. Основні типи задач на дроби

1. Знаходження дробу від числа. Існує багато задач, в яких потрібно знайти частину або дріб даного числа. Такі задачі розв'язують множенням.

З а д а ч а. Господарка мала 20 крб.; $\frac{2}{5}$ їх вона витратила на покупки. Скільки коштують покупки?

Тут потрібно знайти $\frac{2}{5}$ числа 20. Зробити це можна так:

$$20 \cdot \frac{2}{5} = 8.$$

Відповідь. Господарка витратила 8 крб.

В цій задачі: 20 — дане число, $\frac{2}{5}$ — дріб, що зображує шукану частину, 8 — шукана частина даного числа.

П р и к л а д и. Знайти $\frac{7}{15}$ від 30.

Розв'язання. $30 \cdot \frac{7}{15} = 14.$

Знайти $\frac{5}{3}$ від $20\frac{2}{5}$.

Розв'язання. $20\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = 34.$

В останньому прикладі знайдена не частина від числа, оскільки 34 більше за $20\frac{2}{5}$. Тому в загальному випадку кажуть: знайдено дріб від числа.

Щоб знайти дріб від числа, потрібно дане число помножити на цей дріб.

2. Знаходження числа за відомою величиною його дробу. Іноді потрібно за відомою частиною числа і дробом, що зображує цю частину, визначити все число. Такі задачі розв'язуються діленням.

З а д а ч а. У класі 12 комсомольців, що становить $\frac{3}{5}$ всіх учнів класу. Скільки всіх учнів у класі?

Розв'язання. $12 : \frac{3}{5} = 20.$

Відповідь. 20 учнів.

П р и к л а д. Знайти число, $\frac{5}{3}$ якого становить 34.

Розв'язання. $34 : \frac{5}{3} = 20\frac{2}{5}$.

Відповідь. Шукане число дорівнює $20\frac{2}{5}$.

Такі задачі називають задачами на знаходження числа за відомою величиною його дробу.

Щоб знайти число за відомою величиною його дробу, потрібно поділити цю величину на даний дріб.

3. Знаходження відношення двох чисел. Розглянемо задачу:

Робітник виготовив за день 40 деталей. Яку частину місячного завдання виконав робітник, якщо місячний план становить 400 деталей?

Розв'язання. $40 : 400 = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$.

Відповідь. Робітник виконав $\frac{1}{10}$ місячного плану.

В даному випадку знайдено відношення кількості виготовлених за день деталей до місячного плану.

4. Більш складні задачі на дроби.

З а д а ч а 1. На одній фабриці кількість жінок становить $\frac{1}{3}$ від кількості чоловіків на цій фабриці. Яку частину становлять жінки від загальної кількості працюючих на фабриці?

Розв'язання. Жінки становлять $\frac{1}{3}$ від кількості чоловіків, отже, чоловіків було 3 частини, а жінок 1 частина. Всього працюючих було 4 частини. Отже, жінки становлять $\frac{1}{4}$ частину від загальної кількості працюючих на фабриці.

З а д а ч а 2. У класі кількість відсутніх учнів становить $\frac{1}{6}$ від кількості присутніх. Після того, як з класу вийшов ще один учень, кількість відсутніх виявилась рівною $\frac{1}{5}$ від кількості присутніх. Скільки учнів у класі?

Розв'язання. Якщо кількість учнів класу приймемо за 1, то кількість відсутніх становитиме $1 : (1 + 6) = \frac{1}{7}$ від усієї кількості учнів; у другому випадку кількість відсутніх збільшилась на 1; вона становила: $1 : (1 + 5) = \frac{1}{6}$ від усієї кількості учнів; $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$; отже, один учень становить $\frac{1}{42}$ всіх учнів класу, тому у класі всього 42 учні.

Відповідь. 42 учні.

§ 19. Десяткові дроби

1. Десятковий дріб, його запис і читання. Окремим видом звичайних дробів є дроби, знаменниками яких є числа, зображені (в десятковій системі числення) одиницею з наступними нулями, наприклад $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{241}{100}$, $\frac{1}{100000}$.

Такі дроби називають *десятковими*.

Десяткові дроби записують без знаменника, при цьому використовується той самий принцип, що й для цілих чисел, а саме: значення кожної цифри залежить від місця, на якому вона стоїть. В десяткових дробах цілу частину відокремлюють комою, а праворуч від коми записують дробову частину. Цифри дробової частини називають *десятковими знаками*. Перший десятковий знак—це десяті частини одиниці, або просто десяті, другий — соті, третій — тисячні і т. д.

Приклади. $\frac{27}{100} = 0{,}27$; $\frac{7}{1000} = 0{,}007$; $\frac{578}{100000} = 0{,}00578$; $3\frac{13}{1000} = 3{,}013$.

При читанні десяткового дробу спочатку читають ціле число і визначають розряд останнього справа десяткового знаку. Потім читають всю дробову частину, називаючи останній розряд. Наприклад, 2,381 читають так: дві цілих триста вісімдесят одна тисячна. 0,90007 читається як нуль цілих дев'яносто тисяч сім стотисячних.

Завдяки помісному принципу запису десяткові дроби мають значну перевагу над звичайними: при порівнянні десяткових дробів і виконанні дій над ними немає потреби приводити їх до спільного знаменника. Тому на практиці частіше користуються десятковими дробами, ніж звичайними.

2. Перетворення десяткового дробу в звичайний. Щоб перетворити десятковий дріб у звичайний, його записують із знаменником і, якщо можливо, скорочують:

Приклади. $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$; $1{,}0125 = 1\frac{125}{10000} = 1\frac{1}{80}$.

3. Перетворення звичайного дробу в десятковий. Існує кілька способів перетворення звичайного дробу в десятковий.

Перший спосіб. Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник поділити на знаменник.

Приклади. $\frac{7}{25} = 7:25 = 0{,}28$; $\frac{3}{40} = 3:40 = 0{,}075$.

Другий спосіб. Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно помножити чисельник і знаменник даного дробу на таке число, щоб у знаменнику одержати одиницю з нулями (якщо це можливо).

Приклад. $\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0{,}175$.

Однак слід мати на увазі, що не всякий звичайний дріб можна перетворити у десятковий (скінченний). *У вигляді скінченного десяткового дробу можна представити всі ті і лише ті звичайні дроби, які після скорочення у знаменнику не містять жодних простих множників, крім 2 і 5.* Якщо знаменник нескоротного звичайного дробу містить хоча б один простий множник, відмінний від 2 і 5, то при перетворенні його в десятковий дріб одержується нескінченний десятковий дріб (див. стор. 98).

4. Основна властивість десяткового дробу. *Величина десяткового дробу не зміниться, якщо до нього справа дописати кілька нулів.* Наприклад, 0,3 = 0,30 = 0,300 і т. д. Ця властивість випливає з основної властивості звичайних дробів: $0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ і т. д.

Виходячи з цієї властивості, виконують *роздроблення і скорочення десяткових дробів*. Щоб зобразити десятковий дріб у менших десяткових частинах, тобто виконати роздроблення, досить написати відповідну кількість нулів після останнього його розряду.

Приклад. 2,31 = 2,310 = 2,3100 = 2,31000 і т. д.

В інших випадках доводиться розв'язувати обернену задачу: десятковий дріб, що має в кінці хоча б один нуль, зображають у більш крупних десяткових частинах (скорочення). Для цього досить закреслити (відкинути) ці нулі*.

Приклади. 5,750 = 5,75; 12,700 = 12,7; 23,3000 = 23,3.

5. Порівняння десяткових дробів за величиною. Щоб з'ясувати, який з двох десяткових дробів більший, треба порівняти їх цілі частини, десяті, соті і т. д. При рівності цілих частин, більший той дріб, у якого десятих більше; при рівності цілих і десятих — той більший, у якого більше сотих, і т. д.

Приклад. З трьох дробів 2,432; 2,41 і 2,4098 найбільший перший, оскільки в ньому сотих найбільше, а цілі й десяті у всіх дробах однакові.

§ 20. Дії над десятковими дробами

1. Множення й ділення десяткового дробу на 10, 100, 1000 і т. д. В десятковому дробі так само, як і в цілому числі, значення цифри збільшується в десять разів при переході на одне місце зліва направо і, навпаки, зменшується в десять разів при переході на одне місце справа наліво. Виходячи з цього, можна швидко виконувати множення й ділення на 10, 100 і т. д.

---

* У випадку наближених чисел нулі в останніх розрядах справа у десятковому дробі відкидати не можна, оскільки вони характеризують, з якою точністю задано десятковий дріб (див. стор. 105).

Щоб помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., треба перенести кому відповідно на одну, дві, три і т. д. цифри праворуч. Якщо при цьому не вистачає цифр у числі, то дописують нулі.

Приклад. $15{,}45 \cdot 10 = 154{,}5$; $32{,}3 \cdot 100 = 3230$.

Щоб поділити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., треба перенести кому відповідно на одну, дві, три і т. д. цифри ліворуч. Якщо для перенесення коми не вистачає цифр, їх кількість доповнюють відповідною кількістю нулів ліворуч.

Приклади. $184{,}35 : 100 = 1{,}8435$; $3{,}5 : 100 = 0{,}035$.

2. Додавання й віднімання десяткових дробів. Десяткові дроби додають і віднімають майже так само, як додають і віднімають натуральні числа.

Приклади.
$$\begin{array}{r} +\,5{,}065 \\ 7{,}83 \\ \hline 12{,}895 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,16{,}29 \\ 4{,}75 \\ \hline 11{,}54 \end{array}$$

3. **Множення десяткових дробів.** *Щоб перемножити два десяткових дроби, досить, не звертаючи уваги на коми, перемножити їх як цілі числа і в добутковi відділити комою праворуч стільки десяткових знаків, скільки їх було у множеному і множникові разом.*

Приклад 1. $2{,}064 \cdot 0{,}05$.

Перемножуємо цілі числа $2064 \cdot 5 = 10320$. У першому співмножнику було три цифри після коми, у другому — дві. У добуткові кількість десяткових знаків повинно бути п'ять. Відділяючи їх праворуч, одержимо 0,10320. Нуль, що стоїть у кінці, можна відкинути: $2{,}064 \times$ $\times 0{,}05 = 0{,}1032$.

Приклад 2. $1{,}125 \cdot 0{,}08$.

Перемножуємо цілі числа $1125 \cdot 8 = 9000$. Кількість знаків після коми повинно бути $3 + 2 = 5$. Дописуємо до 9000 нулі ліворуч (009000) і відділяємо праворуч п'ять знаків. Одержуємо $1{,}125 \cdot 0{,}08 = 0{,}09000 =$ $= 0{,}09$.

4. Ділення десяткових дробів. Розглядається два випадки ділення десяткових дробів без остачі: 1) ділення десяткового дробу на ціле число; 2) ділення числа (цілого або дробового) на десятковий дріб.

Ділення десяткового дробу на ціле число виконується так само, як і ділення цілих чисел; одержувані остачі роздроблюють послідовно у менші десяткові частини і продовжують ділення доти, поки в остачі не одержиться нуль.

Приклади.
$$\begin{array}{r|l} -\,2{,}368 & 4 \\ 20 & 0{,}592 \\ \hline -\,36 & \\ 36 & \\ \hline -\,8 & \\ 8 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,66{,}0242 & 22 \\ 66 & 3{,}0011 \\ \hline -\,24 & \\ 22 & \\ \hline -\,22 & \\ 22 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ділення числа (цілого або дробового) *на десятковий дріб* у всіх випадках приводить до ділення на ціле число. Для цього збільшують дільник у 10, 100, 1000 і т. д. разів, а щоб частка не змінилася, у те саме число разів збільшують і ділене, після чого ділять на ціле число (як у першому випадку).

Приклад. $47{,}04 : 0{,}0084 = 5600$;
$$\begin{array}{r|l} -\,470400 & 84 \\ 420 & 5600 \\ \hline -\,504 & \\ 504 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

У всіх розглянутих вище прикладах ділення виконувалось до кінця, тобто без остачі. Однак у більшості випадків точну частку у вигляді десяткового дробу не можна одержати, як би довго не продовжували ділення.

Приклад.
$$\begin{array}{r|l} 0{,}5 & 6 \\ 48 & 0{,}08333\ldots \\ \hline -\,20 & \\ 18 & \\ \hline -\,20 & \\ 18 & \\ \hline 20 & \text{і т. д.} \end{array}$$

Тут весь час повторюється одна й та сама остача 2, отже, процес ділення можна продовжувати нескінченно. Частку в даному випадку можна представити у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу 0,08333... (див. стор. 98).

5. Приклади на сумісні дії із звичайними і десятковими дробами. Розглянемо спочатку приклад на всі дії з десятковими дробами.

Приклад 1. Обчислити: $\dfrac{2{,}7 \cdot 12{,}4 \cdot 45}{0{,}9 \cdot 0{,}31}$.

Тут користуються приведенням діленого і дільника до цілого числа, враховуючи, що частка при цьому не змінюється. Тоді маємо:

$$\frac{2{,}7 \cdot 12{,}4 \cdot 45}{0{,}9 \cdot 0{,}31} = \frac{27 \cdot 124 \cdot 450}{9 \cdot 31} = 3 \cdot 4 \cdot 450 = 5400.$$

При розв'язанні прикладів на сумісні дії із звичайними і десятковими дробами частину дій можна виконувати в десяткових дробах, а частину — у звичайних. Потрібно однак мати на увазі, що не завжди звичайний дріб можна перетворити у скінченний десятковий. Тому записують десятковим дробом лише тоді, коли таке перетворення можливе.

Приклад 2. Обчислити:

$$\left(0{,}5 : 1{,}25 + 3\frac{1}{2} \cdot 1{,}03 - 1{,}005\right) : \left(2\frac{1}{16} - 1\frac{23}{24}\right).$$

а) $0{,}5 : 1{,}25 = 50 : 125 = 0{,}4$;

б) $3\frac{1}{2} \cdot 1{,}03 = 3{,}5 \cdot 1{,}03 = 3{,}605$;

в) $0{,}4 + 3{,}605 = 4{,}005$;

г) $4{,}005 - 1{,}005 = 3$;

д) $2\frac{1}{16} - 1\frac{23}{24} = 2\frac{6}{96} - 1\frac{92}{96} = 1\frac{102}{96} - 1\frac{92}{96} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$;

е) $3 : \frac{5}{48} = \frac{3 \cdot 48}{5} = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$.

§ 21. Періодичні десяткові дроби

1. Означення періодичного десяткового дробу. Нескінченний десятковий дріб, у якого одна або кілька цифр весь час повторюються у певній послідовності, називається *періодичним* десятковим дробом. Сукупність цифр, що повторюються, називається *періодом* цього дробу.

Періодичні дроби бувають чисті і мішані. *Чистим періодичним дробом* називається такий, у якого період починається зразу після коми, наприклад 2,363636...; *мішаним* — такий, у якого між комою і першим періодом є одна або кілька цифр, що не повторюються, наприклад 0,5232232... Періодичні дроби скорочено записують так: замість 2,3636... записують 2,(36); замість 0,08333... записують 0,08(3); замість 0,5232232... записують 0,5(232), тобто період вміщують у дужки.

Якщо звичайний нескоротний дріб перетворюється у нескінченний десятковий дріб, то останній буде обов'язково періодичним, причому, *якщо у знаменника дробу відсутні множники 2 і 5, то він буде чистим періодичним, якщо ж знаменник містить множником 2 або 5, то він буде мішаним.*

Приклади. Дріб $\frac{5}{27}$ перетворюється у чистий періодичний десятковий дріб, оскільки 27 не ділиться ні на 2, ні на 5. Дріб $\frac{7}{12}$ перетворюється у мішаний періодичний, оскільки 12 ділиться на 2.

Дійсно,

$$\begin{array}{r|l} 5 & 27 \\ \hline -50 & 0{,}185185\ldots = 0{,}(185) \\ 27 & \\ \hline -230 & \\ 216 & \\ \hline -140 & \\ 135 & \\ \hline 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 12 \\ \hline -70 & 0{,}5833\ldots = 0{,}58(33) \\ 60 & \\ \hline -100 & \\ 96 & \\ \hline -40 & \\ 36 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

Відомо правило, яке дає змогу зразу визначити, скільки буде цифр у періоді і скільки до періоду, якщо перетворити звичайний нескоротний дріб у нескінченний десятковий.

Якщо $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot c$ і c взаємно просте з 10, то нескоротний дріб $\frac{a}{b}$ перетворюється у такий нескінченний десятковий дріб, у якого кількість цифр від коми до першого періоду дорівнює більшому з показників α і β, а кількість цифр у періоді дорівнює кількості цифр у найменшому з чисел 9, 99, 999, 9999 і т. д., яке ділиться на c.

Приклад. Скільки цифр до періоду і скільки в періоді має нескінченний десятковий дріб, що дорівнює $\frac{301}{440}$?

Розв'язання. $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$.

Більший показник степеня тут дорівнює 3. Отже, до періоду повинно бути три цифри. Число 99 ділиться на 11 (а 9 не ділиться), отже, в періоді повинно бути дві цифри.

Перевірка.

$$\begin{array}{r|l} 301 & 440 \\ \hline -3010 & 0{,}6840909\ldots = 0{,}684(09) \\ 2640 & \\ \hline -3700 & \\ 3520 & \\ \hline -1800 & \\ 1760 & \\ \hline -4000 & \\ 3960 & \\ \hline 4000 & \end{array}$$

2. Перетворення періодичного дробу у звичайний. *Щоб перетворити чистий періодичний дріб у звичайний, досить записати чисельником його період, а знаменником — число, зображене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.*

П р и к л а д и. $0,(7) = \frac{7}{9}$; $2,(05) = 2\frac{5}{99}$; $0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Щоб перетворити мішаний періодичний дріб у звичайний, досить від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду, і одержану різницю взяти чисельником, а знаменником записати число, зображене стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, зі стількома нулями в кінці, скільки цифр між комою і періодом.

П р и к л а д и. $0,3(52) = \frac{352 - 3}{990} = \frac{349}{990}$;

$$5,7(8) = 5\frac{78 - 7}{90} = 5\frac{71}{90}.$$

10. Історична довідка про десяткові дроби. Десяткові дроби були запроваджені значно пізніше, ніж звичайні. Вперше теорію десяткових дробів розробив середньоазіатський математик і астроном ал-Каші на початку XV ст. У Європі десяткові дроби були вдруге відкриті голландським математиком Сімоном Стевіном у 1585 р. Сучасне позначення десяткових дробів — запровадження коми для відділення цілої частини числа від дробової — запропонував німецький астроном Й. Кеплер (1571—1630). В Англії і США замість коми до цього часу вживається крапка — знак, запропонований Джоном Непером у 1616 р. У Росії десяткові дроби вперше було викладено в «Арифметиці» Магницького.

§ 22. Проценти

1. Поняття про процент. *Процентом* якого-небудь числа називається сота частина цього числа. Наприклад, замість того, щоб сказати «54 сотих всіх жителів нашої країни становлять жінки», можна сказати «54 проценти всіх жителів нашої країни становлять жінки». Замість слова «процент» пишуть також знак %, наприклад 35% — значить 35 процентів.

Слово «процент» походить від латинських слів *pro centum*, що означають «з сотні». Раніш процентами називали гроші, які боржник повинен був сплатити додатково за кожну позичену ним сотню карбованців.

Оскільки процент є сота частина, то звідси випливає, що процентом є дріб із знаменником 100. Тому дріб 0,49, або $\frac{49}{100}$, можна прочитати, як 49 процентів, і записати без знаменника у вигляді 49%. Взагалі, визначивши, скільки в даному десятковому дробі сотих частин, його легко записати у процентах: щоб записати десятковий дріб у процентах, потрібно перенести у цього дробу кому на два знаки праворуч.

П р и к л а д и. $0,33 = 33\%$; $1,25 = 125\%$; $0,002 = 0,2\%$; $21 = 2100\%$. І навпаки: $7\% = 0,07$; $24,5\% = 0,245$; $0,1\% = 0,001$; $200\% = 2$.

Іноді вживають поняття *промілле*. Промілле числа називається тисячна частина цього числа. Слово промілле походить від латинського *pro mille* — з тисячі. Позначають промілле знаком ‰.

П р и к л а д. $0,002 = 0,2\% = 2$‰.

У тисячних частинах подають концентрації розчинів, відношення ваги чистого золота, срібла, платини до загальної ваги сплаву тощо. Однак в останньому випадку замість промілле вживають слово *проба*. Пробою називають кількість грамів коштовного металу в 1000 *г* сплаву. Наприклад, золотом 920-ї проби називають сплав, у 1000 *г* якого міститься 920 *г* чистого золота.

§ 23. Основні типи задач на проценти

1. Знаходження процентів даного числа.

З а д а ч а. Бригада трактористів за планом повинна витратити 9 *т* пального. Трактористи зобов'язалися зекономити 20% пального. Визначити економію пального у тоннах.

Якщо в цій задачі замість 20% записати рівне йому число 0,2, то одержимо задачу на знаходження дробу від числа. А такі задачі розв'язують множенням (див. стор. 91). Звідси випливає спосіб розв'язання: $20\% = 0,2$; $9 \cdot 0,2 = 1,8$ (*т*).

Обчислення можна записати і так: $\frac{9 \cdot 20}{100} = 1,8\,(т)$.

Взагалі, $p\%$ числа a дорівнює $\frac{a \cdot p}{100}$.

Щоб знайти кілька процентів даного числа, досить дане число поділити на 100 і результат помножити на число процентів.

З а д а ч а. Робітник у 1963 р. одержував за місяць 90 крб., а у 1964 р. став одержувати на 30% більше. Скільки одержував він у 1964 р.?

Розв'язання. П е р ш и й с п о с і б.

1) На скільки карбованців більше став одержувати робітник?

$$\frac{90 \cdot 30}{100} = 27 \text{ (крб.)}.$$

2) Якою була місячна заробітна плата робітника в 1964 р.?

$$90 + 27 = 117 \text{ (крб.)}.$$

Другий спосіб.

1) Скільки процентів попереднього заробітку став одержувати робітник у 1964 р.?

$$100\% + 30\% = 130\%.$$

2) Якою була місячна заробітна плата робітника в 1964 р.?

$$\frac{90 \cdot 130}{100} = 117 \text{ (крб.)}.$$

2. Знаходження числа за даною величиною його процентів.

Задача. У колгоспі посіяли кукурудзу на площі 280 *га*, що становить 14% всієї посівної площі. Визначити посівну площу колгоспу.

Якщо в цій задачі замість 14% написати 0,14 $\left(\text{або } \frac{14}{100}\right)$, то одержимо задачу на знаходження числа за відомою величиною його дробу (стор. 92). А такі задачі розв'язують діленням.

Розв'язання. 14% = 0,14; 280 : 0,14 = 2000 (*га*).

Можна це розв'язання записати і так:

$$280 : \frac{14}{100} = \frac{280 \cdot 100}{14} = 2000 \text{ (га)}.$$

Взагалі, якщо $p\%$ якого-небудь числа становлять a, то все число дорівнює $\frac{a \cdot 100}{p}$.

Щоб знайти число за даною величиною кількох процентів його, досить цю величину поділити на число процентів і результат помножити на 100.

Задача. У березні завод виплавив 125,4 *т* металу, перевиконавши план на 4,5%. Скільки тонн металу завод повинен був виплавити у березні за планом?

Розв'язання. 1) На скільки процентів завод виконав план у березні?

$$100\% + 4{,}5\% = 104{,}5\%.$$

2) Скільки тонн металу завод повинен був виплавити?

$$\frac{125{,}4 \cdot 100}{104{,}5} = 120 \text{ (т)}.$$

3. Знаходження процентного відношення двох чисел.

Задача. Потрібно зорати 300 *га* землі. Протягом першого дня зорали 120 *га*. Скільки процентів до завдання зорали в перший день?

Розв'язання. Перший спосіб. 300 *га* становлять 100%, отже, на 1% припадає 3 *га*. Визначивши, скільки разів 3 *га*, що становлять

1%, містяться в 120 *га*, ми дізнаємось, скільки процентів до завдання зорали землі в перший день.

$$120 : 3 = 40(\%).$$

Другий спосіб. Визначивши, яку частину землі зорали в перший день, зобразимо цей дріб у процентах.

Запишемо обчислення: $\frac{120}{300} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$.

Щоб обчислити процентне відношення числа a до числа b, потрібно знайти відношення a до b і помножити його на 100.

Задача. Автомобіль на кожні 100 *км* шляху влітку витрачає 8 *л* бензину, а взимку 8,8 *л*. На скільки процентів зимова норма більша за літню?

Розв'язання. Взимку на кожні 100 *км* автомобіль витрачає на 8,8 — — 8 = 0,8 (*л*) більше, ніж влітку. Ці 0,8 *л* по відношенню до 8 *л* становлять 0,8 : 8 = 0,1 = 10%.

Відповідь. На 10%.

Примітка. Інколи учні вважають, що в даному випадку літня норма витрати бензину менша за зимову також на 10%. Це невірно. В першому випадку, коли ми порівнюємо витрату бензину з літньою нормою, ми приймаємо за 100% 8 *л*, якщо ж порівнювати з нормою взимку, потрібно за 100% приймати 8,8 *л* і ту саму різницю 0,8 *л* ділити вже не на 8 *л*, а на 8,8 *л*, тобто

$$0{,}8 : 8{,}8 = 0{,}091 = 9{,}1\%.$$

Як бачимо, літня норма менша за зимову не на 10%, а на 9,1%.

4. Таблиці процентних відношень. Задачі на знаходження процентного відношення чисел дуже поширені на практиці. Для полегшення обчислень і економії часу складено таблиці процентних відношень.

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
61	100,00	98,39	96,83	95,31	93,85	92,42	91,04	89,71	88,41	87,14
62		100,00	98,41	$\boxed{96,88}$	95,39	93,94	92,54	91,18	89,86	88,57
63			100,00	98,44	96.92	95,45	94,03	92,65	91,30	90,00
64				100,00	98,46	96,37	95,52	94,12	92,74	91,43
65					100,00	98,48	97,01	95,59	93,20	92,86
66						100,00	98,51	97,06	95,65	94,29
67							100,00	98,53	97,10	95,71
68								100,00	98,55	97,14
69									100,00	98,57
70										100,00

У наведеній частині таблиці можна знайти процентні відношення чисел від 61 до 70 до чисел від 61 до 70. Знайдемо, наприклад, чому дорівнює процентне відношення 62 до 64. У другому рядку першого стовпця знайдемо число 62; на перетині цього рядка і стовпця з числом 64 знайдемо процентне відношення 62 до 64. Воно дорівнює 96,88%.

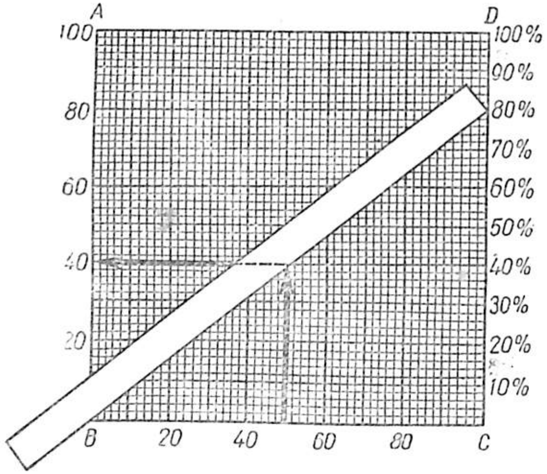


Рис. 7.

Скористуємось тепер нашою таблицею для розв'язання такої задачі.

Для опалювання будинку необхідно заготовити 70 *т* вугілля. На 1 жовтня завезено 65 *т*. Скільки процентів палива заготовлено?

Розв'язання задачі полягає в знаходженні процентного відношення 65 до 70. Це відношення шукаємо у таблиці, воно дорівнює 92,86%.

5. Графік для розв'язання задач на проценти. За допомогою простого графіка (рис. 7) можна розв'язувати задачі на проценти. Шукані і задані числа відкладають на відрізках *AB* і *BC*. На графіку показано, як за допомогою лінійки знайти 80% від 50, а також, що число 40 становить 80% від 50 (обернена задача).

§ 24. Наближені обчислення

1. Числа точні і наближені. Числа, з якими ми зустрічаємося на практиці, бувають двох видів. Одні дають точне значення величини, інші — лише наближене. Перші називаються *точними*, другі — *наближеними*.

Так, якщо кажуть, що в класі є 29 учнів, то число 29 — точне. Якщо ж кажуть, що відстань від Москви до Києва дорівнює 960 *км*, то тут число 960 — наближене, оскільки, з одного боку, наші вимірювальні інструменти не абсолютно точні, з другого боку, самі міста мають деяку протяжність.

Результат дій з наближеними числами є також наближеним числом. Виконуючи деякі дії над точними числами (ділення, добування кореня), можна також одержати наближені числа.

Теорія наближених обчислень дає змогу: 1) знаючи ступінь точності даних, оцінити ступінь точності результатів; 2) брати дані з певною ступінню точності, достатньою для забезпечення потрібної точності результату; 3) раціоналізувати процес обчислення, звільнивши його від тих обчислень, які не впливають на точність результату.

2. Округлення. Одним із джерел одержання наближених чисел є *округлення*. Округлюють як наближені, так і точні числа.

Округленням даного числа до деякого його розряду називають заміну його новим числом, яке одержується з даного шляхом відкидання всіх його цифр, записаних праворуч від цифри цього розряду, або шляхом заміни їх нулями. Ці нулі звичайно підкреслюють або записують їх меншими. Для забезпечення найкращого наближення округленого числа до числа, що округлюється, слід користуватися такими правилами: щоб округлити число до одиниці певного розряду, потрібно відкинути всі цифри, що стоять після цифри цього розряду, а в цілому числі замінити їх нулями. При цьому враховують таке:

1) якщо перша (зліва) з відкинутих цифр менша за 5, то останню залишену цифру не змінюють (округлення з *недостачею*);

2) якщо перша відкинута цифра більша за 5 або дорівнює 5, то останню залишену цифру збільшують на одиницю (округлення з *надлишком*).

Покажемо це на прикладах. Округлити: а) до десятих 12,34; б) до сотих 3,2465; 1038,785; в) до тисячних 3,4335; г) до тисяч 12 375; 320 729.

Відповіді. а) 12,34 ≈ 12,3; б) 3,2465 ≈ 3,25; 1038,785 ≈ 1038,79; в) 3,4335 ≈ 3,434; г) 12 375 ≈ 12 <u>000</u>; 320 729 ≈ 321 000.

П р и м і т к а. Ще кілька років тому у випадку відкидання однієї лише цифри 5 користувались *«правилом парної цифри»*: останню цифру залишали без зміни, якщо вона парна, і збільшували на одиницю, якщо непарна. Тепер же «правила парної цифри» не дотримуються: якщо відкидають одну цифру 5, то до останньої залишеної цифри додають одиницю незалежно від того, парна вона чи непарна.

3. Абсолютна і відносна похибки. Різниця між точним числом і його наближеним значенням називається *абсолютною похибкою* наближеного числа. Наприклад, якщо точне число 1,214 округлити до десятих, то одержимо наближене число 1,2. У даному випадку абсолютна похибка наближеного числа 1,2 дорівнює 1,214—1,2, тобто 0,014.

Проте в більшості випадків точне значення розгляданої величини невідоме, а лише наближене. Тоді й абсолютна похибка невідома. У цих випадках вказують границю, яку вона не перевищує. Це число називається *граничною абсолютною похибкою.* Кажуть, що точне значення числа дорівнює його наближеному значенню з похибкою, меншою за граничну похибку. Наприклад, число 23,71 є наближене значення числа 23,7125 з точністю до 0,01, оскільки абсолютна похибка наближення дорівнює 0,0025 і менша за 0,01. Тут гранична абсолютна похибка дорівнює 0,01*.

Граничну абсолютну похибку наближеного числа a позначають символом Δa. Запис $x \approx a\ (\pm\Delta a)$ слід розуміти так: точне значення величини x міститься в проміжку між числами $a - \Delta a$ і $a + \Delta a$, які називають відповідно *нижньою* і *верхньою границею* x і позначають НГx і ВГx.

Наприклад, якщо $x \approx 2{,}3\ (\pm 0{,}1)$, то $2{,}2 < x < 2{,}4$.

Навпаки, якщо $7{,}3 < x < 7{,}4$, то $x \approx 7{,}35\ (\pm 0{,}05)$. Абсолютна або гранична абсолютна похибка не характеризує якість виконаного вимірювання. Одна і та сама абсолютна похибка може вважатись значною і незначною залежно від числа, яким зображено вимірювану величину. Наприклад, якщо вимірюємо відстань між двома містами з точністю до одного кілометра, то така точність достатня для цього вимірювання, тоді ж як при вимірюванні відстані між двома будинками однієї вулиці така точність буде неприпустимою. Отже, точність наближеного значення величини залежить не лише від величини абсолютної похибки, але й від значення вимірюваної величини. Тому мірою точності служить відносна похибка.

Відносною похибкою називається відношення абсолютної похибки до величини наближеного числа. Відношення граничної абсолютної похибки до наближеного числа називають *граничною відносною похибкою*; позначають її так: $\frac{\Delta a}{a}$. Відносну і граничну відносну похибки прийнято виражати у процентах. Наприклад, якщо вимірювання показали, що відстань x між двома пунктами більша за 12,3 *км*, але менша за 12,7 *км*, то за наближене значення її приймають середнє арифметичне цих двох чисел, тобто їх півсуму, тоді гранична абсолютна похибка дорівнює піврізниці цих чисел. В даному випадку $x \approx 12{,}5\ (\pm 0{,}2)$. Тут гранична абсолютна похибка дорівнює 0,2 *км*, а гранична відносна похибка

$$\frac{0{,}2}{12{,}5} = 0{,}016 = 1{,}6\%.$$

* Абсолютна похибка буває додатною й від'ємною. Наприклад, $1{,}68 \approx 1{,}7$. Абсолютна похибка дорівнює $1{,}68 - 1{,}7 \approx -0{,}02$ (див. стор. 146). Гранична абсолютна похибка завжди додатна.

§ 25. Наближені обчислення за допомогою правил підрахунку цифр

1. Попередні зауваження. Розрізняють наближені обчислення зі строгим врахуванням похибок і без такого врахування. У менш відповідальних обчисленнях з наближеними числами користуються другим способом, що заснований на так званих правилах підрахунку цифр.

У цих правилах використовуються поняття десяткових знаків, значущих цифр, точних і сумнівних цифр. Нагадаємо, що *десятковими знаками* числа називають всі його цифри, що стоять праворуч від коми (див. стор. 94). Наприклад, числа 3,5 і 3,05 мають відповідно один і два десяткових знаки.

Значущими цифрами числа називаються всі його цифри, починаючи з першої ліворуч відмінної від нуля, крім нулів, що стоять у кінці числа на місці відкинутих при округленні цифр (як вже відмічалось, ці нулі звичайно підкреслюють або пишуть меншими).

П р и к л а д и. У числі 3,5 — дві значущих цифри, в числі 0,0307 — три значущих цифри. В числі 35 000, одержаному внаслідок округлення до тисяч, дві значущих цифри.

Якщо границя абсолютної похибки наближеного числа дорівнює половині одиниці розряду останньої його цифри, то всі цифри цього числа називають *точними*. Якщо ж ця границя більша за половину одиниці розряду останньої цифри числа, то остання цифра такого числа називається *сумнівною*.

П р и к л а д и. У числі 2,06 (±0,005) всі три цифри точні. У числі 2,06 (±0,01) цифри 2 і 0 — точні, а 6 — сумнівна. У числі 35 000, одержаному в результаті округлення до тисяч, цифри 3 і 5 — точні, а всі три нулі — сумнівні.

Правила підрахунку цифр тісно пов'язані з принципом О. М. Крилова (1863—1945): *наближене число слід писати так, щоб в ньому всі значущі цифри, крім останньої, були вірними і лише остання цифра була сумнівною і притому не більш як на одну одиницю.* Наприклад, якщо наближене число записане так: $x \approx 3{,}52$, то це означає, що воно дано з точністю до сотих, тобто $x \approx 3{,}52\ (\pm 0{,}01)$. Якщо ж відомо, що $x \approx 3{,}72\ (\pm 0{,}02)$, то, згідно з принципом О. М. Крилова, його потрібно записати так: $x \approx 3{,}7$. Обчислення з наближеними числами, записаними таким способом, виконують так само, як і з точними числами, проте, дотримуючись таких правил.

2. Правила підрахунку цифр. а) *При додаванні і відніманні наближених чисел в результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх є в наближеному даному числі з найменшим числом десяткових знаків.*

П р и к л а д. Знайти суму наближених чисел 127,42; 67,3; 0,12 і 3,03.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 127{,}42 \\ 67{,}3 \\ 0{,}12 \\ 3{,}03 \end{array} \\
\hline
197{,}87 \approx 197{,}9
\end{array}
$$

П р и к л а д. Знайти різницю наближених чисел: 418,7—39,832.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} 418{,}7 \\ 39{,}83 \end{array} \\
\hline
378{,}87 \approx 378{,}9
\end{array}
$$

б) *При множенні й діленні наближених чисел у добуткові й частці потрібно зберегти стільки значущих цифр, скільки їх є в наближеному даному числі з найменшою кількістю значущих цифр.*

П р и к л а д. Перемножити наближені числа 3,4 і 12,32.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 12{,}32 \\ 3{,}4 \end{array} \\
\hline
+\begin{array}{r} 4928 \\ 3696 \end{array} \\
\hline
41{,}888 \approx 42
\end{array}
$$

З а д а ч а. Площа прямокутної грядки наближено дорівнює 7,6 *кв. м*, ширина — 2,38 *м*. Чому дорівнює її довжина?

Розв'язання. Довжина грядки дорівнює частці від ділення 7,6 на 2,38.

Дію ділення виконуємо так:

$$
\begin{array}{r|l}
7{,}60 & 2{,}38 \\
-\;7{,}14 & \overline{3{,}19} \approx 3{,}2\ (\textit{м}) \\
\hline
460 & \\
-\;238 & \\
\hline
222 &
\end{array}
$$

Останню цифру частки 9 можна було б і не писати, а, одержавши в частці дві значущі цифри і замітивши, що остача більша за половину дільника, можна було б зразу округлити частку з надлишком.

в) *При піднесенні наближених чисел до квадрата і куба в результаті зберігається стільки значущих цифр, скільки їх в основі**.

П р и к л а д и. $2{,}3^2 = 5{,}29 \approx 5{,}3$; $0{,}8^3 = 0{,}512 \approx 0{,}5$.

* Аналогічні правила для добування коренів і логарифмування див. на стор. 174.

г) У проміжних результатах обчислень слід залишати на одну цифру більше, ніж рекомендують попередні правила.

д) Якщо деякі дані мають більше десяткових знаків (при діях першого ступеня) або більше значущих цифр (при діях другого і третього ступенів), ніж інші, то їх спочатку слід округлити, зберігаючи лише одну запасну цифру.

е) Якщо дані можна брати з довільною точністю, то для одержання результату з k цифрами дані слід брати з такою кількістю цифр, яка дає згідно з правилами а) — б) $k + 1$ цифру в результаті.

3. Застосування правил. Застосування обчислень способом підрахунку цифр розглянемо на прикладі.

П р и к л а д. Знайти значення $x = \dfrac{(a-b)\,c}{a+b}$, якщо $a \approx 9{,}31$, $b \approx 3{,}1$, $c \approx 2{,}33$.

Розв'язання.

$$
\begin{aligned}
a - b &= 9{,}31 - 3{,}1 = 6{,}21; \\
(a - b)\,c &= 6{,}21 \cdot 2{,}33 \approx 14{,}5; \\
a + b &= 9{,}31 + 3{,}1 = 12{,}4; \\
x &= 14{,}5 : 12{,}4 \approx 1{,}2.
\end{aligned}
$$

Відповідь. $x \approx 1{,}2$.

П р и м і т к а. Сформульовані вище правила підрахунку цифр мають імовірнісний смисл: вони найбільш імовірні, хоч існують приклади, які не задовольняють цим правилам. Тому обчислення способом підрахунку цифр — грубий спосіб оцінки похибки результатів дій. Однак він дуже простий і зручний, а точність таких обчислень достатня для більшості технічних розрахунків. Тому цей спосіб дуже поширений у обчислювальній практиці.

У більш відповідальних обчисленнях користуються способом границь або способом граничних похибок.

§ 26. Наближені обчислення за способом границь

Найкращим з відомих способів наближених обчислень є *спосіб границь*. Користуючись цим способом, за відомими нижніми і верхніми границями даних чисел, знаходять окремо нижню і верхню границі результату.

Нехай, наприклад, потрібно додати два числа:

$$x \approx 3{,}2\ (\pm 0{,}05) \text{ і } y \approx 7{,}9\ (\pm 0{,}05).$$

Маємо: $3{,}15 < x < 3{,}25$,
$7{,}85 < y < 7{,}95$,
звідки $11{,}00 < x + y < 11{,}20$.

Отже, $x + y \approx 11{,}1\ (\pm 0{,}1)$.

Взагалі, нижня границя суми наближених чисел дорівнює сумі нижніх границь доданків, а верхня — сумі верхніх границь доданків. Символічно це можна записати так:

$$НГ\,(x+y) = НГx + НГy; \quad ВГ\,(x+y) = ВГx + ВГy.$$

Аналогічні правила мають місце і для множення:

$$НГ\,(xy) = НГx \cdot НГy; \quad ВГ\,(xy) = ВГx \cdot ВГy.$$

Для обернених дій — віднімання й ділення — відповідні правила такі:

$$НГ\,(x-y) = НГx - ВГy; \quad ВГ\,(x-y) = ВГx - НГy;$$

$$НГ\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{НГx}{ВГy}; \quad ВГ\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ВГx}{НГy}.$$

З означень НГ і ВГ випливають також такі правила:

1) округлювати НГ можна лише за недостачею, а ВГ — за надлишком;

2) чим менша різниця $ВГx - НГx$, тим точніше визначається x;

3) за наближене значення x рекомендується брати середнє арифметичне чисел $НГx$ і $ВГx$ або число, близьке до нього.

Застосування способу границь при обчисленнях розглянемо на прикладі.

П р и к л а д. Знайти значення $x = \dfrac{(a-b)\,c}{a+b}$, якщо $a \approx 9{,}21(\pm 0{,}01)$; $b \approx 3{,}05(\pm 0{,}02)$; $c \approx 2{,}33(\pm 0{,}01)$.

Розв'язання. Визначаємо НГ і ВГ кожного з чисел a, b, c і, виконавши над ними відповідні дії, знаходимо НГ і ВГ числа x.

Запис зручно зробити у вигляді такої таблиці.

Компоненти	НГ	ВГ
a	9,20	9,22
b	3,03	3,07
c	2,32	2,34
$a-b$	6,13	6,19
$(a-b)\,c$	14,22	14,49
$a+b$	12,23	12,29
x	1,15	1,19

$$1{,}15 < x < 1{,}19$$

$$\begin{array}{r} 1{,}15 \\ +\,1{,}19 \\ \hline 2{,}34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}19 \\ -\,1{,}15 \\ \hline 0{,}04 \end{array}$$

$$2{,}34 : 2 = 1{,}17; \quad 0{,}04 : 2 = 0{,}02$$

$$x \approx 1{,}17\,(\pm 0{,}02).$$

Л і т е р а т у р а.

Энциклопедия элементарной математики, I, М., 1951;

В. М. Б р а д и с, Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, М., 1954;

А. Н. К р ы л о в, Лекции о приближенных вычислениях, Изд-во АН СССР, Л., 1933.

ВЕЛИЧИНИ Й ПРОПОРЦІЇ

§ 27. Вимірювання величин

1. Величини і їх вимірювання. Дати строге означення поняттю «величина» не можна. Це одне з основних (неозначуваних) понять, смисл якого розкривають за допомогою різних описів. У старих книжках величинами називали все те, що здатне збільшуватись або зменшуватись. Однак це не можна вважати строгим означенням, оскільки кажуть, наприклад, про збільшення апетиту, прав, обов'язків та інших понять, які не прийнято вважати величинами.

Прикладами величин є: довжина, площа, об'єм, вага, швидкість, час тощо.

Характерна властивість величини полягає в тому, що поряд з іншими властивостями вона має й числову характеристику. Величини можна вимірювати. Тому говорять про те чи інше *числове значення величини*.

Виміряти яку-небудь величину — значить порівняти її значення зі значенням іншої величини того ж роду, прийнятої за одиницю.

У кожній країні встановлено певні одиниці для вимірювання основних величин. Одиниці вимірювання, які ввійшли у вжиток, називаються *мірами*. Так, зараз у нас прийняті: за одиницю довжини — метр, за одиницю ваги — грам, за одиницю часу — секунда і т. д.*

Однак не завжди у нас користувались такими мірами, а в деяких країнах і тепер прийнято інші міри.

2. Старі російські міри. Деякі старі російські міри і співвідношення між ними.

М і р и д о в ж и н и

Миля	містить	7 верст $\approx 7{,}4676$ *км*
Верста	»	500 саженів $\approx 1{,}0668$ *км*
Сажень	»	3 аршини $\approx 2{,}1336$ *м*
Аршин	»	16 вершків $\approx 0{,}7112$ *м*
Сажень	»	7 футів $\approx 213{,}36$ *см*
Фут	»	12 дюймів $\approx 30{,}48$ *см*
Дюйм	»	10 ліній $\approx 2{,}54$ *см*

М і р и в а г и

Пуд	містить	40 фунтів (1 пуд $\approx 16{,}4$ *кг*)
Фунт	»	32 лоти
Лот	»	3 золотники
Золотник	»	96 долей

* Для кожного роду величин обирають кілька одиниць: одні більш крупні, інші дрібніші.

3. Англійські міри

Міри довжини

1 миля	містить	0,001 дюйма
1 долоня	»	4 дюйми
1 п'ядь	»	9 дюймів
1 фут	»	12 дюймів
1 ярд	»	3 фути
1 пол	»	5,5 ярда
1 фурлонг	»	220 ярдів
1 англійська миля	»	8 фурлонгів
1 ліга	»	3 милі

Примітка. Основною одиницею довжини в англійських системах мір є ярд. Британський ярд дорівнює 0,91439841 *м*. У США ярд дорівнює $\frac{3600}{3937}$ *м*.

Міри ваги

1 унція	містить	16 драхм
1 фунт	»	16 унцій
1 стоун	»	14 фунтів
1 брит. чверть	»	2 стоуни
1 чверть (у США)	»	25 фунтів
1 центнер	»	4 чверті
1 тонна	»	20 центнерів
1 довга тонна (британська міра)	»	2240 фунтів
1 коротка тонна (у США)	»	2000 фунтів

Примітка. Основною одиницею ваги в Англії і США є фунт. Він дорівнює 0,453559243 кілограма. Перелік інших англійських мір подано в книзі «Англо-русский словарь математических терминов» М., 1962.

§ 28. Метрична система мір

В СРСР з 1918 р. запроваджено Метричну систему мір. Похідні міри одержують з основних шляхом збільшення або зменшення їх в 10, 100, 1000 і т. д. разів. Деякі найважливіші міри Метричної системи:

Міри довжини

Основна одиниця — **метр** (*м*)

Більш дрібні одиниці	*Більш крупні одиниці*
Дециметр (*дм*) — 0,1 *м*	Декаметр (*дкм*) — 10 *м*
Сантиметр (*см*) — 0,01 *м*	Гектометр (*гм*) — 100 *м*
Міліметр (*мм*) — 0,001 *м*	Кілометр (*км*) — 1000 *м*
Мікрон (μ) — 0,000001 *м*	Міріаметр (*мм*) — 10000 *м*
Мілімікрон ($m\mu$) — 0,000000001 *м*	Мегаметр — 1000000 *м*

Міри площі

Основна одиниця — **квадратний метр** (*кв. м*, або $м^2$)

Більш дрібні одиниці

Квадратний дециметр (*кв. дм*) = 0,01 *кв. м*
Квадратний сантиметр (*кв. см*) = 0,0001 *кв. м*
Квадратний міліметр (*кв. мм*) = 0,000001 *кв. м*

Більш крупні одиниці

Квадратний декаметр, або ар (*а*) = 100 *кв. м*
Квадратний гектометр, або гектар (*га*) = 10 000 *кв. м*
Квадратний кілометр (*кв. км*) = 1 000 000 *кв. м*

Міри об'єму

а) *газоподібних і твердих тіл*

Основна одиниця — **кубічний метр**, або стер (*куб. м*, або $м^3$)

Більш дрібні одиниці

Кубічний дециметр (*куб. дм*) = 0,001 *куб. м*
Кубічний сантиметр (*куб. см*) = 0,000001 *куб. м*
Кубічний міліметр (*куб. мм*) = 0,000000001 *куб. м*

Більш крупні одиниці

Кубічний кілометр (*куб. км*) = 1 000 000 000 *куб. м*

б) *рідких і сипких тіл*

Основна одиниця — **літр** (*л*) — об'єм 1 *куб. дм*. Точніше 1 *л* = = 1,000028 *куб. дм*.

Більш дрібні одиниці	*Більш крупні одиниці*
Децилітр (*дл*) = 0,1 *л*	Декалітр (*дкл*) = 10 *л*
Сантилітр (*сл*) = 0,01 *л*	Гектолітр (*гл*) = 100 *л*
Мілілітр (*мл*) = 0,001 *л*	Кілолітр (*кл*) = 1000 *л*
Мікролітр (*мкл*) = 0,000001 *л*	

Міри ваги

Основна одиниця — грам (*г*) — вага 1 *куб. см* чистої дистильованої води при 4° С і атмосферному тискові 760 *мм рт. ст.*

Більш дрібні одиниці	*Більш крупні одиниці*
Дециграм (*дг*) = 0,1 *г*	Декаграм (*дкг*) = 10 *г*
Сантиграм (*сг*) = 0,01 *г*	Гектограм (*гг*) = 100 *г*
Міліграм (*мг*) = 0,001 *г*	Кілограм (*кг*) = 1000 *г*
Мікрограм = 0,000001 *г*	Центнер (*ц*) = 100 *кг*
Карат (*к*) = 0,2 *г*	Тонна (*т*) = 1000 *кг*

§ 29. Система СІ

У жовтні 1960 р. XI Генеральна конференція з мір і ваги, на якій були присутні представники 32 країн (в тому числі СРСР, Чехословаччини, Франції, Великобританії, США та ін.), прийняла Міжнародну систему одиниць SI (СІ — система інтернаціональна) як універсальну систему для всіх галузей науки і техніки.

У вересні 1961 р. Комітет стандартів, мір і вимірювальних приладів при Раді Міністрів СРСР затвердив новий державний стандарт «Міжнародна система одиниць» (ГОСТ 9867-61) для переважного його застосування з 1 січня 1963 р. у всіх галузях науки, техніки і народного господарства.

Міжнародна система одиниць складається з 6 основних одиниць: метра (*м*) — для довжини, кілограма (*кг*) — для маси, секунди (*сек*) — для часу, градуса Кельвіна (°K) — для термодинамічної температури, ампера (*а*) — для сили струму й свічки (*св*) для сили світла; двох додаткових одиниць: радіана (*рад*) — для плоского кута і стерадіана (*стер*) — для тілесного кута та 27 найважливіших похідних одиниць: площі — квадратний метр ($м^2$), об'єму — кубічний метр ($м^3$), лінійної швидкості — метр на секунду $\left(\frac{м}{сек}\right)$, кутової швидкості — радіан на секунду $\left(\frac{рад}{сек}\right)$ та ін.*

Більшість означень основних одиниць в системі СІ є новими. Наприклад: «*Метр* — довжина, яка дорівнює 1650763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання, що відповідає переходу між рівнями $2p_{10}$

* М. Г. Богуславский и др., Таблицы перевода единиц измерений, Стандартгиз, М., 1963.

і $5d_5$ атома криптону-86»; «Кілограм — одиниця маси — представлений масою міжнародного прототипу кілограма»; «Секунда — це $\frac{1}{31556925,9747}$ частина тропічного року для 1900 р. січня 0 о 12 год. ефемеридного часу».

Необхідність нових означень зумовлена тим, що старі означення не забезпечували потрібної точності вимірювань при сучасному стані техніки. Нові означення основних одиниць більш стабільні, ніж старі, і дають можливість підвищити точність їх відтворення.

Більш крупні і більш дрібні одиниці вимірювання в порівнянні з наведеними у системі СІ (як і в метричній системі) слід утворювати шляхом їх множення на степінь числа 10, що відповідає приставці, яка додається до найменування основної одиниці*.

дека — 10^1 (*да*)	деци — 10^{-1} (*д*)
гекто — 10^2 (*г*)	санти — 10^{-2} (*с*)
кіло — 10^3 (*к*)	мілі — 10^{-3} (*м*)
мега — 10^6 (*М*)	мікро — 10^{-6} (*мк*)
гіга — 10^9 (*Г*)	нано — 10^{-9} (*н*)
тера — 10^{12} (*Т*)	піко — 10^{-12} (*п*)

§ 30. Історичні відомості з метрології

Майже всі одиниці виміру, прийняті різними стародавніми народами, пов'язані з розмірами частин тіла людини. Таке походження мають, зокрема, дюйм (ширина пальця), фут (довжина ступні), лікоть (довжина руки від ліктя до кінця середнього пальця), сажень (відстань між кінцями середніх пальців двох витягнутих у сторони рук). Тисяча подвійних кроків у стародавньому Римі одержала назву милі (від *milia* — тисяча).

Найбільш розробленою із стародавніх метрологій була вавилонська, яка значно вплинула на метрологію інших стародавніх народів. До цього часу ми користуємося запозиченими з вавилонської метрології одиницями виміру часу (доба має 24 години, година має 60 хвилин, хвилина має 60 секунд).

Стародавні метрології містили в собі вимірювання довжин, площ (земельних ділянок), об'ємів, ваги, часу, а також монетні системи, пов'язані звичайно з вимірюванням ваги.

До кінця XIX ст. більшість європейських країн мала свої системи вимірювань; особливо багато їх було в середні віки і за часів, коли

* 10^{-1}, 10^{-2}, . . . позначають відповідно $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, . . . (див. стор. 201).

Європу було роздрібнено на багато малих держав. Азіатські, американські й інші країни також мали свої системи мір і ваги.

В старих російських рукописах (в «Русской правде» та ін.) збереглись відомості про одиниці виміру, якими користувались в IX—XIII ст. у Київській Русі. Як і в Західній Європі, окремі російські землі мали свої міри і вагу. Регламентація мір була розпочата у Московській Русі і завершена при Петрі І. Одиниця довжини — сажень дорівнювала 7 англійським футам. Тоді ж були встановлені міри сипких тіл: гарнець і четверик, що дорівнює 8 гарнцям. До XVII ст. була встановлена величина десятини, як одиниці вимірювання площі, що дорівнює 80 × 30 саженів, а також склались міри ваги: 1 пуд дорівнює 40 фунтам та ін.

З розвитком суспільства росли вимоги до точності мір і вимірювань. Посилились торговельні зв'язки між окремими країнами і народами. Однак розвиток торговельних відносин ускладнювався тим, що у кожній країні існували різні системи мір, які склались історично, і під однією і тією ж назвою в різних місцевостях часто розуміли різні величини. Наприклад, існувало 100 різних футів (робітничий, землемірний, ткацький, інженерний, геометричний та ін.), 120 різних фунтів (великий, малий, звичайний, казенний, торговельний, міський, медичний, гірський та ін.), 46 різних миль тощо.

Безсистемність мір використовували купці і крупні землевласники для ще більшого закабалення бідного населення: міряючи власним аршином і власним футом, вони діставали для себе найбільші прибутки.

Реформа системи мір була викликана не стільки науковими інтересами, скільки матеріальними інтересами народних мас, які страждали від плутанини всієї системи мір, від відсутності державного контролю за мірами, від права феодальних володарів запроваджувати власні міри.

Метрична система мір була розроблена Французькою Академією наук у 90-х роках XVIII ст. під час Французької буржуазної революції і була запроваджена у Франції 7 квітня 1795 р. В основу метричної системи мір було покладено одиницю довжини — метр, що дорівнював довжині однієї сорокамільйонної частини Паризького меридіана. Всі інші одиниці виміру були у певних співвідношеннях з метром, причому за основу було прийнято десяткову систему числення, внаслідок чого метрична система економічно була найвигіднішою. Незважаючи на це, запровадження нової системи у життя зустріло великі перешкоди. Проведення реформи мір було не в інтересах крупної буржуазії, що прийшла до влади у Франції, а відновлення королівської влади (1815 р.) сприяло тому, що метрична система мір, поряд з іншими досягненнями революції, була забута.

Революційне походження метричної системи перешкоджало її поширенню і в інших країнах. Наприклад, у 1823 р. петербурзький академік М. І. Фусс забракував посібник геометрії М. І. Лобачевського, мотивуючи тим, що в ньому за одиницю довжини було прийнято метр, а за

одиницю виміру дуги — градус, а «сие разделение выдумано было во время Французской революции, когда бешенство наций уничтожить все прежде бывшее распространилось даже до календаря и деления круга».

У 1869 р. Петербурзька Академія наук звернулася до наукових установ усього світу із закликом переглянути основу метричної системи з тим, щоб вона змогла стати міжнародною.

Досягнення науки вимагали замінити означення метра як однієї десятимільйонної чверті меридіана, оскільки архівний метр не співпадав з жодним із результатів останніх вимірювань. За пропозицією Петербурзької Академії наук були прийняті архівні еталони метра і кілограма за прототипи.

В 1877 р. у Парижі на кошти двадцяти країн — учасниць «Конференції метра» — було створено «Міжнародне бюро мір і ваги», в обов'язки якого входило зберігати еталони мір і виготовляти їх зразки.

Новий еталон метра було виготовлено з стійкого сплаву платини та іридію і разом з еталоном кілограма (маса 1,000028 *куб. дм* води при 4° C) вміщено у підвалах бюро на зберігання (Франція, Бретьйольський павільйон).

У царській Росії велику роботу по підготовці і впровадженню у вжиток метричної системи мір провели Б. С. Якобі і Д. І. Менделеєв, який з 1892 р. був головою Головної палати мір і ваги, перетвореної згодом у Всесоюзний науково-дослідний інститут метрології ім. Д. І. Менделеєва.

Нова реформа мір (запровадження системи СІ) є лише дальшим кроком по уточненню одиниць виміру у міжнародних інтересах.

§ 31. Іменовані числа

1. Числа абстрактні та іменовані. Числове значення величини, взяте разом з одиницями виміру, називається *іменованим* числом. Так, 5 *кг*, 35 *см* — іменовані числа. Якщо ж при числі не вказано одиниць виміру, то таке число називається *абстрактним* (35 — абстрактне число).

Іменоване число називається *простим*, якщо числове значення величини виражене однією одиницею виміру, наприклад 8 *см*. Іменоване число називається *складеним*, якщо чисельне значення величини виражене кількома одиницями виміру, наприклад 5 *м* 25 *см*.

2. Перетворення іменованих чисел. Перетворення іменованого числа в одиниці якого-небудь нижчого найменування називається *роздробленням*, а обернене перетворення в одиниці вищого найменування називається *укрупненням*. Так, перетворення числа 2 *км* 25 *м* у 2025 *м* — є роздробленням, а обернене перетворення числа 2025 *м* у 2 *км* 25 *м* — укрупненням. Роздроблення й укрупнення іменованих чисел виконується здебільшого усно і записується так.

Р о з д р о б л е н н я. 75 крб. 17 коп. = 7517 коп.; 7 *кг* 250 *г* = 7250 *г*; 27 *м* 15 *см* 5 *мм* = 27155 *мм*.

Укрупнення. 3574 коп. = 35 крб. 74 коп.; 6005 *м* = 6 *км* 5 *м*.

В окремих випадках, коли усно важко виконати роздроблення або укрупнення, слід використовувати форму напівусного обчислення. Записувати можна, наприклад, так.

Роздробити в секунди 17 *год* 24 *хв* 39 *сек*.

$$\begin{array}{r} \times\ 60 \\ 17 \\ \hline +\ 1020 \\ 24 \\ \hline \times\ 1044 \\ 60 \\ \hline +\ 62640 \\ 39 \\ \hline 62679 \end{array} \qquad 17\ год\ 24\ хв\ 39\ сек = 62679\ сек.$$

3. Дії над іменованими числами. Арифметичні дії над іменованими числами виконуються так само, як і з абстрактними числами, тільки тут іноді одночасно з виконанням дії виконують і деякі перетворення. Тому розрізняють дії *з перетворенням* і *без перетворень*.

Нижче на прикладах показано, як можна записувати дії з іменованими числами.

Додавання

$$\begin{array}{r} +\ 257\ м \\ 149\ м \\ \hline 406\ м \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 375\ г \\ 26\ кг\ 935\ г \\ \hline 26\ кг\ 1310\ г \\ \hline 27\ кг\ 310\ г \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 12\ м\ 7\ дм\ 2\ см \\ 8\ м\ 8\ дм\ 8\ см \\ \hline 20\ м\ 15\ дм\ 10\ см \\ \hline 21\ м\ 6\ дм \end{array}$$

Віднімання

$$\begin{array}{r} -\ 37\ км\ 750\ м \\ 15\ км\ 385\ м \\ \hline 22\ км\ 365\ м \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 7\ м\ 2\ дм\ 5\ см \\ 5\ м\ 8\ дм\ 6\ см \\ \hline 1\ м\ 3\ дм\ 9\ см \end{array}$$

Множення

Запис при письмовому множенні складених іменованих чисел можна вести за двома формами.

Приклад. 35 *км* 252 *м* × 125.

а)
$$\begin{array}{r} \times\ 35\ км\ 252\ м \\ 125 \\ \hline 4406\ км\ 500\ м \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 252\ м \\ 125 \\ \hline 1260 \\ +\ 504 \\ 252 \\ \hline 31\,500\ м = 31\ км \\ 500\ м \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 35\ км \\ 125 \\ \hline 175 \\ +\ 70 \\ 35 \\ \hline 4375\ км \\ +\ 31\ км\ 500\ м \\ \hline 4406\ км\ 500\ м \end{array}$$

б) 35 *км* 252 *м* × 125

$$\begin{array}{r} \times\ 35252\ м \\ 125 \\ \hline 176260 \\ +\ 70504 \\ 35252 \\ \hline 4406500\ м \\ \hline 4406\ км\ 500\ м \end{array}$$

Ділення

При діленні іменованих чисел розрізняють два випадки: а) ділення іменованого числа на абстрактне число, тобто ділення на рівні частини; б) ділення іменованого числа на іменоване число, тобто ділення за змістом.

Ділення на рівні частини виконують так:

Без роздроблення.

$$\begin{array}{r|l} 312\ кг\ 420\ г & 12 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 26\ кг\ 35\ г \\ \cline{1-1} -\ 72 & \\ 72 & \\ \cline{1-1} -\ 420\ г & \\ 36 & \\ \cline{1-1} -\ 60\ & \\ 60\ & \\ \cline{1-1} 0\ & \end{array}$$

З роздробленням.

$$\begin{array}{r|l} 5\ кг\ 120\ г & 16 \\ \cline{1-2} -\ 5120\ г & 320\ г \\ 48 & \\ \cline{1-1} -\ 32 & \\ 32 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ділення за змістом виконують так:

$$\begin{array}{r|l} 65\ год\ 15\ хв & 45\ хв \\ \cline{1-2} -\ 3915\ хв & 87 \\ 360 & \\ \cline{1-1} -\ 315\ хв & \\ 315\ хв & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad 33\ кг\ 950\ г : 2\ кг\ 425\ г \quad \begin{array}{r|l} -\ 33950\ г & 2425\ г \\ \cline{2-2} 2425 & 14 \\ \cline{1-1} -\ 9700\ г & \\ 9700\ г & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

§ 32. Відношення чисел

1. Відношення чисел. Як вже відмічалось (стор. 48), частка від ділення одного числа на інше називається також їх *відношенням*. Таким чином, частка і відношення означають одне й те саме поняття. Однак, коли кажуть «частка», мають на увазі одне число, одержане в результаті ділення двох даних чисел. Коли ж кажуть «відношення», мають на увазі пару чисел, сполучених знаком ділення. Наприклад, якщо поділити 10 на 2, одержимо $10 : 2 = 5$. В даному випадку кажуть, що частка від ділення 10 на 2 дорівнює 5, кажуть також, що відношення 10 до 2 дорівнює 5. Але саме відношення даних чисел записують у вигляді $10 : 2$ або $\frac{10}{2}$. Зрозуміло, що числа $10 : 2$ і 5 рівні. Тому і кажуть, що відношення — те саме, що й частка.

Для позначення відношення використовують дробову риску або двокрапку — знак ділення. Визначивши величину відношення, одержуємо відповідь на питання, у скільки разів одне число більше за інше, або яку частину цього числа воно становить. У загальному вигляді відношення записують так: $a : b$.

Числа a і b називаються *членами відношення*. Перший член a називається *попереднім*, другий член b — *наступним*. Наприклад, у відношенні $4 : 5$ число 4 є попереднім членом, 5 — наступним. З двох чисел можна скласти два відношення, наприклад з 7 і 8 маємо: $8 : 7$ і $7 : 8$. Ці відношення відрізняються одне від одного тим, що попередній член одного є наступним членом другого, і навпаки. Такі два відношення називаються *оберненими*. Добуток обернених відношень дорівнює одиниці:

$$\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1.$$

Оскільки відношення двох чисел одержують за допомогою ділення, то для нього вірні всі властивості частки. *Основна властивість відношення: величина відношення не зміниться, якщо його члени помножити або поділити на одне й те саме число.*

Членами відношення можуть бути довільні числа, тільки наступний член не повинен дорівнювати нулеві. Тому можливі і такі відношення:

$$2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}, \text{ або } \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{2}{3}}.$$

Щоб одержати відношення двох іменованих чисел, потрібно подати ці числа в одних одиницях виміру.

П р и к л а д. Знайти відношення 73 *см* до 2,92 *м*.

Розв'язання $\frac{73\ см}{2{,}92\ м} = \frac{83\ см}{292\ см} = 0{,}25.$

2. Скорочення членів відношення і заміна відношення дробових чисел відношенням цілих чисел. Використовуючи основну властивість відношення, виконуємо два перетворення: 1) скорочення членів відношення і 2) заміну відношення дробових чисел відношенням цілих чисел. Як це виконується, видно з таких прикладів.

П р и к л а д 1. Скоротити члени відношення: $48 : 32$.

Розв'язання. $48 : 32 = 3 : 2$.

П р и к л а д 2. Замінити відношення дробових чисел $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$ відношенням цілих чисел.

Розв'язання. $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{2} : \frac{2}{3} = \frac{9}{6} : \frac{4}{6} = 9 : 4.$

Ми привели дроби до спільного знаменника, а потім помножили попередній і наступний члени відношення на 6 — їхній спільний знаменник.

П р и м і т к а. Раніше розрізняли *різницеві* відношення (виду $a - b$) і кратні відношення (виду $a : b$). Тепер поняття «різницеве відношення» не вживають. А те, що раніше називали «кратним відношенням», називають «відношенням».

§ 33. Пропорції

1. Поняття про пропорції. *Пропорцією* називають рівність двох відношень. Загальний вигляд пропорції: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, або $a : b = c : d$.

Приклади пропорцій. $3 : 4 = 9 : 12$; $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $10 : 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} : \frac{1}{3}$; $20\ м : 4\ м = 10\ кг : 2\ кг$.

Пропорції читають так: «3 відноситься до 4, як 9 до 12», «10 відноситься до $2\frac{1}{2}$, як $1\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{3}$» і т. д. Або: «відношення 3 до 4 дорівнює відношенню 9 до 12»; «10 у стільки разів більше за $2\frac{1}{2}$, у скільки разів $1\frac{1}{3}$ більше за $\frac{1}{3}$».

Члени відношень, що складають пропорцію, називаються *членами пропорції*. Пропорція складається з чотирьох членів. Перший і останній члени називаються *крайніми*, а члени пропорції, що містяться всередині, називаються *середніми* членами. Так, у першій пропорції числа

3 і 12 будуть крайніми членами, а числа 4 і 9 — середніми членами пропорції.

Всі члени пропорції можуть бути абстрактними числами, але два члени одного відношення (або обох відношень) можуть бути й однорідними іменованими числами:

$$3\frac{1}{2}\ кг : 5\ кг = \frac{1}{2}\ м : \frac{5}{7}\ м.$$

2. Основна властивість пропорції. *Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добуткові середніх її членів.*

В загальному вигляді цю властивість пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ записують так: $ad = bc$.

Основна властивість пропорції може бути використана для перевірки правильності складених пропорцій.

Приклад. Перевірити правильність пропорції.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}.$$

Розв'язання. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20$. Пропорція правильна, оскільки виконується основна властивість пропорції: $\frac{5}{12} = \frac{5}{12}$.

Правильність пропорції може бути перевірена також шляхом обчислення кожного з двох відношень, які складають пропорцію.

Приклад. Перевірити пропорцію $0{,}75 : 1\frac{1}{5} = 1{,}25 : 2{,}5$.

Розв'язання. $0{,}75 : 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $1{,}25 : 2{,}5 = \frac{1}{2}$.

Величини відношень однакові. Отже, пропорція складена правильно. З наведених прикладів видно, що коли ми напишемо таку рівність, у якій в лівій частині є добуток двох чисел, а у правій частині — добуток двох інших чисел, то з цих чотирьох чисел можна скласти пропорцію.

3. Обчислення невідомих членів пропорції. Обчислення невідомого члена пропорції називають розв'язуванням пропорції. Для обчислення членів пропорції використовують наслідки з її основної властивості.

1) *Невідомий крайній член пропорції дорівнює добуткові середніх членів, поділеному на відомий крайній*, тобто, якщо $x : a = b : c$, то $x = \frac{ab}{c}$.

2) *Невідомий середній член пропорції дорівнює добуткові крайніх членів, поділеному на відомий середній*, тобто, якщо

$a : x = b : c$, то $x = \frac{ac}{b}$.

Приклад 1. $x : 12 = 4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$; $x = \frac{12 \cdot 4\frac{3}{4}}{7\frac{1}{8}} = \frac{12 \cdot \frac{19}{4}}{\frac{57}{8}} = \frac{12 \cdot 19 \cdot 8}{4 \cdot 57} = 8.$

Приклад 2. $10{,}4 : 3\frac{5}{7} = x : \frac{5}{11}$; $x = \frac{10{,}4 \cdot \frac{5}{11}}{3\frac{5}{7}} = \frac{10\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{11}}{3\frac{5}{7}} = \frac{\frac{52}{5} \cdot \frac{5}{11}}{\frac{26}{7}} = \frac{52 \cdot 7}{11 \cdot 26} = \frac{14}{11} = 1\frac{3}{11}.$

4. Перестановка членів пропорції. В кожній пропорції можна переставити: а) середні члени, б) крайні члени, в) середні й крайні, г) крайні на місце середніх і середні на місце крайніх.

Всього можна одержати з даної пропорції 8 пропорцій (включаючи дану):

$a : b = c : d$	$c : d = a : b$
$d : b = c : a$	$b : d = a : c$
$a : c = b : d$	$c : a = d : b$
$d : c = b : a$	$b : a = d : c$

Для всіх цих пропорцій виконується основна властивість: $ad = bc$.

Приклад. Виконати можливі перестановки членів у пропорції $5 : 3 = 20 : 12$.

Розв'язання.

$5 : 3 = 20 : 12$	$3 : 5 = 12 : 20$
$5 : 20 = 3 : 12$	$3 : 12 = 5 : 20$
$20 : 5 = 12 : 3$	$12 : 20 = 3 : 5$
$20 : 12 = 5 : 3$	$12 : 3 = 20 : 5$

Примітка. Якщо в пропорції середні або крайні члени рівні (такі пропорції називають *неперервними*), то з неї можна одержати шляхом перестановки членів лише 4 різні пропорції.

Наприклад, $18 : 6 = 6 : 2$; $6 : 18 = 2 : 6$; $2 : 6 = 6 : 18$; $6 : 2 = 18 : 6$

5. Спрощення пропорцій. До перетворень, які не порушують пропорцію, відносяться:

1) одночасне збільшення або зменшення обох членів будь-якого відношення в однакове число разів;

2) одночасне збільшення або зменшення обох попередніх або обох наступних членів в однакове число разів;

3) одночасне збільшення або зменшення всіх членів пропорції в однакове число разів.

Перелічені перетворення дають змогу спрощувати пропорції, зокрема звільняти їх від дробових членів.

П р и к л а д и. Спростити пропорції:

а) $\frac{1}{4}:\frac{3}{8}=20:30$; б) $12:\frac{15}{14}=16:\frac{10}{7}$; в) $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$.

Розв'язання. а) Приводимо дроби до спільного знаменника: $\frac{2}{8}:\frac{3}{8}=20:30$. Помноживши на 8 обидва члени першого відношення, одержимо $2:3=20:30$.

б) Приводимо дроби до спільного знаменника: $12:\frac{15}{14}=16:\frac{20}{14}$. Помноживши обидва наступних члени на 14, одержимо $12:15=16:20$.

в) Помноживши всі члени пропорції $\frac{1}{2}:\frac{1}{48}=20:\frac{5}{6}$ на 48, одержимо $24:1=960:40$, або $24:1=96:4$.

6. Похідні пропорції. Якщо до обох частин даної пропорції $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ додати по 1, то одержимо $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, або

$$\text{а)}\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

Отже, *сума членів першого відношення даної пропорції відноситься до його наступного члена так, як сума членів другого відношення відноситься до його наступного члена.*

П р и к л а д. Якщо $\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$, то $\frac{8}{3}=\frac{32}{12}$.

Аналогічно з даної пропорції можна одержати:

$$\text{б)}\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

різниця членів першого відношення відноситься до його наступного члена, як різниця членів другого відношення відноситься до його наступного члена;

$$\text{в)}\ \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$

сума членів першого відношення відноситься до його попереднього члена, як сума членів другого відношення відноситься до його попереднього члена;

$$\text{г)}\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

різниця членів першого відношення відноситься до його попереднього члена, як різниця членів другого відношення відноситься до його попереднього члена;

$$\text{д)}\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

сума членів першого відношення відноситься до їх різниці, як сума членів другого відношення відноситься до їх різниці;

$$\text{е)}\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

сума попередніх членів пропорції відноситься до суми наступних, як кожний попередній до свого наступного.

Всі ці і багато інших пропорцій, що одержуються з даної, називаються *похідними пропорціями*.

7. Властивість рівних відношень. Останній приклад похідної пропорції можна узагальнити на випадок кількох рівних відношень. Якщо

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n},$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

тобто, *якщо кілька відношень дорівнюють одне одному, то сума всіх попередніх їх членів так відноситься до суми всіх наступних, як кожний попередній член до свого наступного.*

П р и к л а д. Якщо $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}$, то $\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$.

§ 34. Пропорціональна залежність величин

1. Величини прямо пропорціональні. Значення двох різних величин можуть взаємно залежати одне від одного. Так, площа квадрата залежить від довжини його сторони і, навпаки, довжина сторони квадрата залежить від його площі.

Якщо дві величини пов'язані між собою так, що зі збільшенням (зменшенням) значення однієї з них в кілька разів відповідне значення іншої *величини збільшується (зменшується) у стільки ж разів, то такі величини в арифметиці називаються прямо пропорціональними**.

П р и к л а д и. Час роботи і заробіток, одержаний за цей час при відрядній оплаті праці,— величини прямо пропорціональні, оскільки чим більше працює робітник, тим більший його заробіток: за три дні, наприклад, він одержує втричі більше, ніж за один день. Довжина сторони квадрата і його площа — не прямо пропорціональні величини, оскільки зі збільшенням сторони вдвічі площа квадрата збільшується не в два рази, а в чотири.

Прямо пропорціональні величини мають таку властивість: якщо дві величини прямо пропорціональні, то *відношення двох довільно взятих значень першої величини дорівнює відношенню двох відповідних значень другої*. Звідси слідує, що для даної пари прямо пропорціональних величин частка від ділення будь-якого значення однієї величини на відповідне значення іншої величини є число стале. Це стале число називається *коефіцієнтом пропорціональності*.

Позначивши яке-небудь значення однієї величини буквою y, а відповідне значення іншої величини — буквою x, визначимо коефіцієнт пропорціональності k так: $\frac{y}{x} = k$. Звідси, $y = kx$. Ця рівність називається *формулою прямої пропорціональності*.

П р и к л а д. При незмінній швидкості час руху і відстань, пройдена рухомим тілом за цей час,— величини прямо пропорціональні. Нехай, наприклад, поїзд рухається рівномірно з швидкістю 50 *км/год*. Тоді за 1 *год*, 2 *год*, 3 *год*, 4 *год* і т. д. він пройде відповідно 50 *км*, 100 *км*, 150 *км*, 200 *км* і т. д. Відношення $\frac{50}{1}$, $\frac{100}{2}$, $\frac{150}{3}$, $\frac{200}{4}$ однакові, оскільки кожне з них дорівнює 50. Число 50 і є коефіцієнтом пропорціональності. Якщо позначити час руху поїзда буквою x, а відстань, пройдену поїздом за цей час, буквою y, то одержимо формулу $y = 50x$. Користуючись цією формулою, можна дізнатись, скільки кілометрів пройде поїзд за будь-який час. Наприклад, якщо $x = 5$, то $y = 250$. Отже, за 5 *год* поїзд пройде 250 *км*.

2. Величини обернено пропорціональні. *Якщо дві величини пов'язані між собою так, що зі збільшенням (зменшенням) значення однієї з них в кілька разів значення іншої відповідно зменшується (збільшується) у стільки ж разів, то такі величини називаються обернено пропорціональними.* Наприклад, якщо на 15 крб. потрібно купити кілька кілограмів цукерок, то кількість цукерок буде залежати від ціни одного кілограма. У скільки разів вищою буде ціна, у стільки разів менше можна купити на ці гроші цукерок.

* В алгебрі дається інше означення прямо пропорціональної залежності величин (див. стор. 298).

Обернено пропорціональні величини характеризуються такою властивістю: *якщо дві величини обернено пропорціональні, то відношення двох довільних значень однієї величини дорівнює оберненому відношенню відповідних значень іншої величини.*

Звідси можна зробити такий висновок: для даної пари обернено пропорціональних величин *добуток будь-якого значення однієї величини на відповідне значення іншої величини є число стале.*

Позначимо деяке значення однієї величини буквою x, а відповідне значення іншої величини буквою y. Тоді $xy = k$. Звідси $y = \frac{k}{x}$. Ця рівність називається *формулою оберненої пропорціональності.*

П р и к л а д. Якщо купляти товар вартістю в 1 крб., 1,5 крб., 2 крб., 3 крб. за кілограм, то на 15 крб. можна купити відповідно: 15 *кг*, 10 *кг*, 7,5 *кг*, 5 *кг*.

Тут кількість кілограмів обернено пропорціональна вартості 1 *кг*. Добутки $1 \cdot 15$; $1{,}5 \cdot 10$; $2 \cdot 7{,}5$; $3 \cdot 5$ однакові, оскільки кожний з них дорівнює 15.

§ 35. Задачі на пропорціональні величини

1. Просте потрійне правило. Із задач на пропорціональні величини найчастіше зустрічаються задачі на так зване *просте потрійне правило.* У цих задачах дано три числа і потрібно визначити четверте, пропорціональне цим числам.

З а д а ч а 1. 10 болтів важать 4 *кг*. Скільки важать 25 таких болтів?

Такі задачі можна розв'язувати кількома способами.

Розв'язання способом зведення до одиниці.

1) Скільки важить 1 болт?

$$4 \text{ кг} : 10 = 0{,}4 \text{ кг}.$$

2) Скільки важать 25 болтів?

$$0{,}4 \text{ кг} \cdot 25 = 10 \text{ кг}$$

Розв'язання способом пропорцій.

Оскільки вага болтів прямо пропорціональна їхній кількості, то відношення ваги дорівнює відношенню штук (болтів). Позначивши шукану вагу буквою x, одержимо пропорцію:

$$x : 4 = 25 : 10,$$

звідки

$$x = \frac{4 \cdot 25}{10} = 10 \text{ (кг)}.$$

Можна міркувати і так: 25 болтів — це більше ніж 10 болтів у 2,5 раза. Отже, вони важчі за 4 *кг* теж у 2,5 раза:

$$4\ кг \cdot 2{,}5 = 10\ кг.$$

Відповідь. 25 болтів важать 10 *кг*.

Задача 2. Перше зубчасте колесо робить 50 обертів за хвилину. Інше зубчасте колесо, зчеплене з першим, робить 75 обертів за хвилину. Знайти кількість зубців другого колеса, якщо перше має 30 зубців.

Розв'язання способом зведення до одиниці. Обидва зчеплені зубчасті колеса повертаються за хвилину на однакову кількість зубців, тому кількість обертів коліс обернено пропорціональна кількості їх зубців.

50 оберт.— 30 зубц.
75 оберт. — x зубц.

$$x : 30 = 50 : 75; \quad x = \frac{30 \cdot 50}{75} = 20\ (зубців).$$

Можна міркувати і так: друге колесо робить обертів у півтора раза більше ніж перше ($75 : 50 = 1{,}5$). Отже, воно має зубців у півтора раза менше ніж перше: $30 : 1{,}5 = 20$ (зубців).

Відповідь. 20 зубців.

2. Складне потрійне правило. Задачі, в яких за даним рядом відповідних одне одному значень кількох (більше двох) пропорціональних величин потрібно знайти значення однієї з них, що відповідає іншому ряду даних значень решти величин, називають задачами на *складне потрійне правило*.

Задача. 5 насосів протягом 3 *год* відкачали 1800 відер води. Скільки води відкачають 4 таких насоси протягом 4 *год*?

Розв'язання. 5 нас. 3 *год* — 1800 від.
4 нас. 4 *год* — x від.

1) Скільки відер води відкачав 1 насос протягом 3 *год*?

$$1800 : 5 = 360\ (відер).$$

2) Скільки відер води відкачав 1 насос протягом 1 *год*?

$$360 : 3 = 120\ (відер).$$

3) Скільки води відкачають 4 насоси за 1 *год*?

$$120 \cdot 4 = 480\ (відер).$$

4) Скільки води відкачають 4 насоси за 4 *год*?

$$480 \cdot 4 = 1920\ (відер).$$

Відповідь. 1920 відер.

Скорочено розв'язання можна подати за числовою формулою:

$$x = \frac{1800 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 3} = 1920\ (відер).$$

3. Пропорціональне ділення.

Задача. Поділити число 100 на дві частини прямо пропорціонально числам 2 і 3.

Цю задачу слід розуміти так: поділити 100 на дві частини, щоб перша відносилась до другої, як 2 до 3. Якщо позначити шукані числа буквами x_1 і x_2, то цю задачу можна сформулювати і так. Знайти x_1 і x_2 такі, щоб $x_1 + x_2 = 100$, $x_1 : x_2 = 2 : 3$. Подібні задачі розв'язують, користуючись таким правилом.

Щоб поділити число на частини прямо пропорціонально кільком даним числам, досить поділити його на суму цих чисел і частку помножити на кожне з цих чисел.

Розв'яжемо наведену вище задачу.

$$x_1 = \frac{100 \cdot 2}{2+3} = 40; \quad x_2 = \frac{100 \cdot 3}{2+3} = 60.$$

Відповідь. 40 і 60.

Аналогічно ділять числа на три і більше частин пропорціонально даним числам.

Задача. Поділити 780 на чотири частини пропорціонально числам 1,5; 0,75; 0,4; 1,25.

Цю задачу слід розуміти так: якщо позначити шукані числа через x_1, x_2, x_3 і x_4, то:

$$x_1 : x_2 = 1{,}5 : 0{,}75;$$
$$x_2 : x_3 = 0{,}75 : 0{,}4;$$
$$x_3 : x_4 = 0{,}4 : 1{,}25.$$

Умовились записувати це так:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1{,}5 : 0{,}75 : 0{,}4 : 1{,}25.$$

Після заміни відношення дробових чисел відношенням цілих чисел одержимо:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 30 : 15 : 8 : 25.$$
$$\frac{780}{30+15+8+25} = 10, \quad x_1 = 10 \cdot 30 = 300,$$
$$x_2 = 10 \cdot 15 = 150\ і\ т.\ д.$$

Щоб поділити число на частини обернено пропорціонально даним числам, потрібно поділити його прямо пропорціонально числам, що обернені даним.

З а д а ч а. Поділити число 52 на три частини обернено пропорціонально числам 4, 6 і 8.

Розв'язання. Числа, обернені даним, будуть: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$.

Отже, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = 6 : 4 : 3.$

$$x_1 = \frac{52 \cdot 6}{6 + 4 + 3} = 24,$$

$$x_2 = \frac{52 \cdot 4}{6 + 4 + 3} = 16,$$

$$x_3 = \frac{52 \cdot 3}{6 + 4 + 3} = 12.$$

Відповідь. 24, 16 і 12.

§ 36. Арифметичні задачі

1. Загальні відомості. Розрізняють арифметичні задачі *на обчислення, доведення* і *дослідження.*

Розглянемо кілька арифметичних задач.

1. В учня було 12 зошитів, 5 зошитів він списав. Скільки зошитів у нього залишилось?

2. Довести, що коли до трицифрового числа дописати таке саме число, то одержане шестицифрове число буде обов'язково ділитися на 7, 11 і 13.

3. Чи існують числа, які при діленні на 9 дають в остачі 5, а при діленні на 15 дають остачу 6?

Перша з цих задач — на обчислення, друга — на доведення, третя — на дослідження.

В кожній арифметичній задачі даються деякі числа, співвідношення і т. д. і щось вимагається зробити. Те, що дано у задачі, називається *умовою,* що потрібно зробити — *вимогою* або *питанням. Розв'язати задачу* — значить виконати те, що вимагається в ній. В результаті розв'язання задачі (на обчислення чи дослідження) одержують *відповідь* або *розв'язок.*

Звичайно арифметичні задачі містять лише необхідні і достатні дані для одержання певної єдиної відповіді. Такі задачі називаються *означеними.* Проте іноді зустрічаються задачі, які мають кілька і навіть безліч розв'язків; їх називають *неозначеними* задачами. Існують і такі задачі, які не мають жодного розв'язку; їх називають *переозначеними* задачами. Іноді до переозначених задач відносять і такі, що мають єдиний розв'язок, проте все ж містять зайві числові дані.

2. Арифметичні задачі на обчислення. Арифметичною задачею на обчислення називають вимогу визначити числове значення якої-небудь величини за відомими числовими значеннями інших величин, що знаходяться у певній залежності між собою та з шуканою величиною. Необхідними елементами арифметичної задачі на обчислення є: 1) числові дані; 2) пояснення тієї залежності, яка існує між даними числами і між даними та шуканими; 3) те питання задачі, відповідь на яке потрібно одержати.

Всі арифметичні задачі на обчислення прийнято поділяти на прості і складені. *Простими* називають задачі, які можна розв'язати однією дією. Задачі, які неможливо розв'язати однією дією, називають *складеними.*

Розглянемо найважливіші типи складених арифметичних задач.

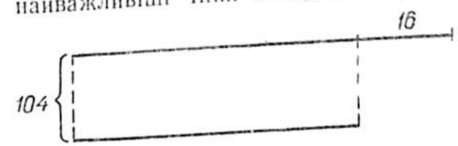


Рис. 8.

3. Задачі на знаходження двох чисел за їх сумою та різницею.

З а д а ч а 1. Кусок матерії в 104 *м* потрібно розрізати на 2 такі частини, щоб у першій було на 16 *м* більше, ніж у другій. Скільки метрів матерії буде в кожній частині?

Розв'язання. Коли б перша частина куска за довжиною була така сама, як і друга, тобто на 16 *м* коротша, ніж насправді (рис. 8), то весь кусок мав би

$$104\ м - 16\ м = 88\ м.$$

Поділивши його навпіл, одержимо довжину другої частини:

$$88\ м : 2 = 44\ м.$$

Тоді перша частина має:

$$44\ м + 16\ м = 60\ м.$$

Відповідь. 60 *м* і 44 *м.*

П р и м і т к а. Замість останньої дії можна було б виконати іншу:

$$104\ м - 44\ м = 60\ м.$$

Можна було б припустити, що друга частина така сама, як і перша. Тоді б мали:

$$104\ м + 16\ м = 120\ м,$$
$$120\ м : 2 = 60\ м,$$
$$60\ м - 16\ м = 44\ м.$$

Можна цю задачу розв'язати і таким способом. Шукані числа можуть бути прирівнені, якщо від більшого відняти, а до меншого додати їх піврізницю (рис. 9). Отже,

$$104\ \textit{м} : 2 = 52\ \textit{м},$$
$$16\ \textit{м} : 2 = 8\ \textit{м},$$
$$52\ \textit{м} + 8\ \textit{м} = 60\ \textit{м},$$
$$52\ \textit{м} - 8\ \textit{м} = 44\ \textit{м}.$$

З а д а ч а 2. На дослідній ділянці площею 940 *кв. м* є виноградник, фруктовий сад, польові культури та овочі. Площа виноградника менша

Рис. 9.

за площу саду на 120 *кв. м*, площа під польовими культурами більша за площу виноградника на 40 *кв. м*, а площа під овочами менша за площу під польовими культурами на 60 *кв. м*. Яка площа зайнята садом, виноградником, польовими культурами та овочами?

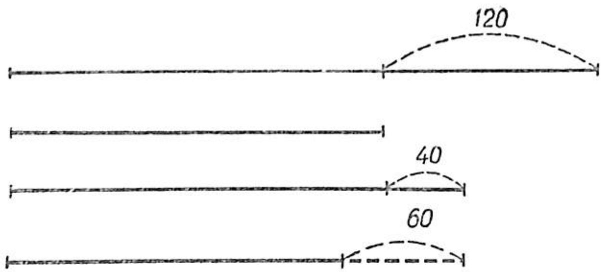


Рис. 10.

Розв'язання. З умови задачі слідує, що найменша площа зайнята під овочі. Вона менша за площі під польовими культурами, виноградником і садом відповідно на 60 *кв. м*, 20 *кв. м* і 140 *кв. м* (рис. 10). Отже, якщо від загальної площі відняти суму наведених вище чисел, то одержимо площу, в четверо більшу від площі, зайнятої під овочами:

$$940 - (60 + 20 + 140) = 720\ (\textit{кв. м}).$$

Тоді площа під овочами дорівнює:

$$720\ \textit{кв. м} : 4 = 180\ \textit{кв. м};$$

під польовими культурами:

$$180\ \textit{кв. м} + 60\ \textit{кв. м} = 240\ \textit{кв. м};$$

під виноградником:

$$180\ \textit{кв. м} + 20\ \textit{кв. м} = 200\ \textit{кв. м};$$

під садом:

$$180\ \textit{кв. м} + 140\ \textit{кв. м} = 320\ \textit{кв. м}.$$

Відповідь. 320 *кв. м*, 200 *кв. м*, 240 *кв. м* і 180 *кв. м*.

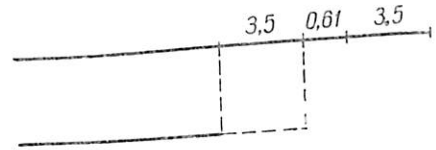


Рис. 11.

З а д а ч а 3. У двох ділянках землі було 24,27 *га*. Якщо від першої відрізати 3,5 *га* і приєднати їх до другої, то у першій все-таки буде на 0,61 *га* більше, ніж у другій. Який розмір кожної ділянки?

Розв'язання. Перша ділянка більша за другу (рис. 11) на

$$3{,}5 \cdot 2 + 0{,}61 = 7{,}61\ (\textit{га}).$$

Тоді площа подвоєної другої ділянки буде:

$$24{,}27 - 7{,}61 = 16{,}66\ (\textit{га}).$$

Отже, друга ділянка має: $16{,}66 : 2 = 8{,}33$ (*га*), а перша:

$$8{,}33 + 7{,}61 = 15{,}94\ (\textit{га}).$$

Відповідь. 15,94 *га* і 8,33 *га*.

4. Задачі на знаходження двох чисел за їхньою сумою або різницею та відношенням.

З а д а ч а 1. У двох ящиках 390 болтів. Скільки болтів у кожному ящику, якщо кількість болтів у другому становить $\frac{2}{3}$ від кількості болтів першого ящика?

Розв'язання. Приймемо, що кількість болтів у першому ящику $\frac{2}{3}$ цієї становить одну частину. Тоді у другому ящику їх буде частини. Отже, 390 болтів становлять $1\frac{2}{3}$ частини. Значить, в першому ящику

$$390 : 1\frac{2}{3} = 234 \text{ (болти)},$$

а в другому

$$234 \cdot \frac{2}{3} = 156 \text{ (болтів)}.$$

Відповідь. 234 болти, 156 болтів.

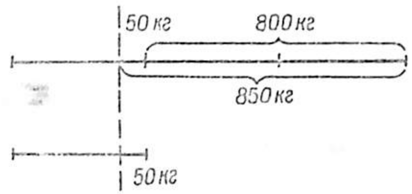


Рис. 12.

З а д а ч а 2. Різниця двох чисел дорівнює 14. Частка від ділення більшого числа на менше дорівнює $4\frac{1}{3}$. Знайти ці числа.

Роз'язання. Оскільки частка від ділення більшого числа на менше дорівнює $4\frac{1}{3}$, то менше число становить 1 частину, а більше — $4\frac{1}{3}$ таких частин. Маємо: $4\frac{1}{3} - 1 = 3\frac{1}{3}$ (частини) становить різницю чисел 14; $14 : 3\frac{1}{3} = 4\frac{1}{5}$ — менше число; $4\frac{1}{5} \cdot 4\frac{1}{3} = 18\frac{1}{5}$ — більше число.

Відповідь. 18,2 і 4,2.

З а д а ч а 3. На одному складі в 3 рази більше муки, ніж на другому. Якщо з першого вивезти 850 *кг*, а з другого 50 *кг*, то на обох складах залишиться муки порівну. Скільки муки було на кожному складі?

Розв'язання. З рис. 12 зрозуміло, що $\frac{2}{4}$ частини муки, що є, становлять 800 *кг*, значить, на другому складі було 400 *кг* $\left(\frac{1}{4}\text{ частина}\right)$, на першому — 1200 *кг* (3 частини).

Відповідь. 1200 *кг* і 400 *кг*.

З а д а ч а 4. Різниця двох чисел дорівнює 40. Якщо від першого числа відняти $\frac{4}{5}$ його, а від другого — $\frac{2}{3}$ його, то одержимо однакові остачі. Знайти ці числа.

Розв'язання. Перше число більше від другого на 40. Крім того, відомо, що $\frac{1}{5}$ частина першого числа $\left(1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\right)$ дорівнює $\frac{1}{3}$ другого $\left(1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Яке з цих чисел більше? Перше число більше, оскільки менша його частина, лише $\frac{1}{5}$, дорівнює $\frac{1}{3}$ другого числа, а все перше число дорівнюватиме: $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = \frac{5}{3}$ другого. Якщо перше число складається з 5 частин, то друге складається з трьох таких самих частин. Дві частини становлять 40. Тоді легко знайти, що перше число дорівнює 100, а друге 60.

Відповідь. 100 і 60.

5. Задачі на виключення одного невідомого заміною його іншим.

З а д а ч а 1. За 5 *кг* яблук і 3 *кг* винограду заплатили 2,8 крб. Скільки коштує кілограм яблук і кілограм винограду, якщо відомо, що кілограм винограду на 0,4 крб. дорожчий за кілограм яблук?

Розв'язання. Замінемо 3 *кг* винограду на 3 *кг* яблук.

1) На скільки карбованців 3 *кг* яблук дешевші від 3 *кг* винограду?

$$0{,}4 \text{ крб.} \cdot 3 = 1{,}2 \text{ крб.}$$

2) Скільки кілограмів важать яблука і виноград разом?

$$5 \text{ кг} + 3 \text{ кг} = 8 \text{ кг}.$$

3) Скільки коштує 8 *кг* яблук?

$$2{,}8 \text{ крб.} - 1{,}2 \text{ крб.} = 1{,}6 \text{ крб.}$$

4) Скільки коштує кілограм яблук?

$$1{,}6 \text{ крб.} : 8 = 0{,}2 \text{ крб.}$$

5) Скільки коштує кілограм винограду?

$$0{,}2 \text{ крб.} + 0{,}4 \text{ крб.} = 0{,}6 \text{ крб.}$$

Відповідь. 0,2 крб. і 0,6 крб.

П р и м і т к а. Можна було б розв'язувати задачу інакше, замінивши 5 *кг* яблук на 5 *кг* винограду. Тоді все коштувало б на 2 крб. дорожче.

З а д а ч а 2. Соснова шпала важить 27,8 *кг*, а дубова — 45,5 *кг*. 10 шпал важать 384,2 *кг*. Скільки серед них соснових і скільки дубових?*

Розв'язання. Якби всі 10 шпал були дубові, то вони б важили $45{,}5 \times 10 = 455$ (*кг*).

На скільки менше важать 10 соснових і дубових шпал, ніж 10 лише дубових?

$$455 - 384{,}2 = 70{,}8\ (кг).$$

На скільки дубова шпала важча за соснову?

$$45{,}5 - 27{,}8 = 17{,}7\ (кг).$$

Скільки було соснових шпал?

$$70{,}8 : 17{,}7 = 4.$$

Скільки було дубових шпал?

$$10 - 4 = 6.$$

Відповідь. 4 шпали і 6 шпал.

6. Задачі на зрівнювання даних.

З а д а ч а 1. За 1,5 *кг* товару першого сорту і 28 *кг* другого сорту заплатили 252,5 крб. Іншим разом за 30 *кг* другого сорту і 4,5 *кг* першого заплатили 325,5 крб. Скільки коштує 1 *кг* кожного сорту?

Короткий запис умови: 1,5 *кг* I і 28 *кг* II — 252,5 крб.
4,5 *кг* I і 30 *кг* II — 325,5 крб.

Р о з в'я з а н н я. Помітивши, що іншого разу куплено в 3 рази більше товару першого сорту, можна зрівняти кількість кілограмів товару першого сорту. Для цього припускаємо, що перша покупка була втричі більша, ніж за умовою. Тоді маємо:

4,5 *кг* I і 84 *кг* II — 757 крб. 50 коп.
4,5 *кг* I і 30 *кг* II — 325 крб. 50 коп.

При цьому припущенні товару другого сорту купили на 54 *кг* більше ($84 - 30 = 54$), ніж іншого разу, і сплатили більше на 432 крб. (757 крб. 50 коп.— 325 крб. 50 коп.= 432 крб.). Тоді 1 *кг* товару другого сорту коштуватиме: $432 : 54 = 8$ (крб.), а 28 *кг* цього товару — $8 \times 28 = 224$ крб.; 1,5 *кг* товару першого сорту коштують $252{,}5 - 224 = 28{,}5$ (крб.), отже, 1 *кг* його коштує $28{,}5 : 1{,}5 = 19$ (крб.).

Відповідь. 19 крб. і 8 крб.

З а д а ч а 2. За 30 зошитів і 12 олівців заплатили 96 коп. По тій самій ціні за 20 зошитів і 7 олівців заплатили 61 коп. Скільки коштує зошит і скільки олівець?

Запис умови: 30 зош. і 12 олівц.— 96 коп.
20 зош. і 7 олівц.— 61 коп.

* Подібні задачі звичайно відносять до типу «на припущення».

Розв'язання. Зрівняємо кількість зошитів, що їх купили першого і другого разу. Для цього припустимо, що перша покупка вдвічі, а друга втричі більша від дійсної. Тоді маємо:

60 зош. і 24 олівц.— 1 крб. 92 коп.
60 зош. і 21 олівц.— 1 крб. 83 коп.

Далі так само, як і у попередній задачі, знаходимо вартість олівця і зошита.

Відповідь. 2 коп. і 3 коп.

7. Задачі на змішування.

З а д а ч а 1. Сплавили 180 *г* золота 920-ї проби зі 100 *г* 752-ї проби. Якої проби одержався сплав?

Розв'язання. У першому злитку чистого золота було 0,92 від 180 *г*, тобто $180 \cdot 0{,}92 = 165{,}6$ (*г*). У другому злитку чистого золота було 0,752 від 100 *г*, тобто $100 \cdot 0{,}752 = 75{,}2$ (*г*). Отже, в одержаному сплаві чистого золота міститься $165{,}6 + 75{,}2 = 240{,}8$ (*г*). Загальна вага сплаву дорівнює $180 + 100 = 280$ (*г*). Його проба дорівнює $\frac{240{,}8}{280} \cdot 1000 = 860$.

Відповідь. Одержано сплав 860-ї проби.

З а д а ч а 2. До 2 *кг* води долили 8 *кг* 70-процентного розчину сірчаної кислоти. Визначити процентну концентрацію одержаного розчину.

Розв'язання.

1) Скільки у розчині чистої (безводної) кислоти?

$$8\ кг \cdot 0{,}7 = 5{,}6\ кг.$$

2) Чому дорівнює вага розчину?

$$2\ кг + 8\ кг = 10\ кг.$$

3) Чому дорівнює процентна концентрація розчину?

$$5{,}6\ кг : 10\ кг = 0{,}56 = 56\%.$$

П р и м і т к а. Якщо кількість кислоти виражена не в кілограмах, а в літрах, то подібні задачі можна розв'язувати лише за допомогою таблиць питомої ваги розчинів сірчаної кислоти. Розглянемо, наприклад, таку задачу. До 2 *л* води долили 8 *л* 70-процентного розчину сірчаної кислоти. Визначити процентну концентрацію одержаного розчину.

Розв'язання. У таблиці знаходимо питому вагу 70-процентного розчину сірчаної кислоти. Вона дорівнює 1,6. Отже, 8 *л* цього розчину важать $1{,}6 \cdot 8 = 12{,}8$ (*кг*). Безводної кислоти в ньому міститься $12{,}8 \times 0{,}7 = 8{,}96$ (*кг*). Концентрація розчину дорівнює $8{,}96 : 14{,}8 = 0{,}6 = 60\%$.

Розглянуті задачі відносяться до задач на *змішування першого роду*. Вони порівняно нескладні. Більш складними є задачі на *змішування другого роду*.

З а д а ч а 3. В якому відношенні потрібно взяти два сорти товару вартістю 7,5 крб. за 1 *кг* і 7 крб. за 1 *кг*, щоб одержати суміш вартістю 7,2 крб. за 1 *кг*?

Розв'язання. Позначивши невідомі кількості товару вартістю 7,5 крб. і 7 крб. за 1 *кг* відповідно через x_1 та x_2, складаємо таблицю:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 7{,}5 \text{ крб.} \\ x_2 - 7 \text{ крб.} \end{array}\right\} 7{,}2 \text{ крб.} \qquad \begin{array}{l} \text{на } 0{,}3 \text{ крб. дорожче} \\ \text{на } 0{,}2 \text{ крб. дешевше.} \end{array}$$

Далі міркуємо так. При вартості 7,2 крб. за 1 *кг* суміші кожний кілограм товару першого сорту був дешевший за його вартість на 0,3 крб., а кожний кілограм другого сорту, що ввійшов у суміш, був дорожчий на 0,2 крб.

Для того, щоб зменшення вартості першого сорту могло бути компенсовано збільшенням вартості другого сорту (вартість всієї покупки не змінилась), потрібно, щоб кожного разу, коли беруть 0,2 *кг* товару першого сорту, брали 0,3 *кг* другого сорту, тобто $x_1 : x_2 = 0{,}2 : 0{,}3$, або $x_1 : x_2 = 2 : 3$.

Відповідь. У відношенні 2 : 3.

З а д а ч а 4. З двох сплавів з 60-процентним і 80-процентним вмістом міді потрібно виготовити сплав вагою 40 *кг* з 75-процентним вмістом міді. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти для цього?

Розв'язання. Виражаємо вміст міді у грамах на 1 *кг* сплаву:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 600 \text{ г} \\ x_2 - 800 \text{ г} \end{array}\right\} 750 \text{ г} \qquad \begin{array}{l} \text{менше на } 150 \text{ г} \\ \text{більше на } 50 \text{ г} \end{array}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{50}{150}; \quad x_1 : x_2 = 1 : 3;$$

$$x_1 = \frac{40}{4} = 10 \ (кг); \quad x_2 = \frac{40 \cdot 3}{4} = 30 \ (кг).$$

Відповідь. 10 *кг* і 30 *кг*.

8. Задачі на рух. До арифметичних задач на рух відносяться такі задачі, в яких, виходячи із залежності між часом, швидкістю і віддаллю при рівномірному русі, потрібно знайти одну з цих величин. Залежно від їхнього змісту розрізняють задачі на зустрічний рух і на рух в одному напрямку.

а) З у с т р і ч н и й р у х. З а д а ч а 1. З міста *A* в 11 *год* виїхала легкова машина і рухається з середньою швидкістю 50 *км/год*

в напрямку до міста *B*. Через 30 *хв* назустріч їй з міста *B* вийшла вантажна машина з середньою швидкістю 35 *км/год*. Коли відбудеться їхня зустріч, якщо віддаль між містами дорівнює 195 *км* (рис. 13)?

Розв'язання. 1) Яку віддаль пройде легкова машина до виходу вантажної?

$$50 \cdot 0{,}5 = 25 \ (км).$$

2) Яку віддаль пройдуть до зустрічі легкова і вантажна машини після виходу останньої?

$$195 - 25 = 170 \ (км).$$

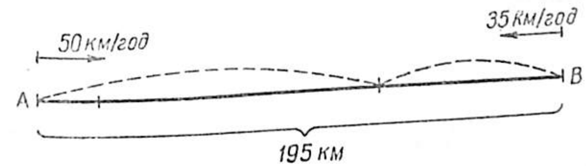


Рис. 13.

3) На скільки кілометрів наближаються за одну годину легкова і вантажна машини?

$$50 + 35 = 85 \ (км).$$

4) Через скільки годин після виходу вантажної машини вони зустрінуться?

$$170 : 85 = 2 \ (год).$$

5) О якій годині відбудеться зустріч машин?

$$11 \ год + 30 \ хв + 2 \ год = 13 \ год \ 30 \ хв.$$

Відповідь. О 13 *год* 30 *хв*.

З а д а ч а 2. З двох пунктів, віддаль між якими 37 *км*, вийшли одночасно назустріч один одному два туристи. Перший проходив за годину на 0,5 *км* більше другого. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо через 2,5 *год* після виходу відстань між ними була 18,25 *км*?

Розв'язання. Обидва туристи пройшли за 2,5 *год* віддаль: 37 — 18,25 = 18,75 (*км*). За годину вони пройшли 18,75 : 2,5 = 7,5 (*км*). Коли б швидкість першого туриста була така сама, як і другого, то вони за годину пройшли б 7,5 — 0,5 = 7 (*км*). Тоді другий турист за годину проходив 7 : 2 = 3,5 (*км*), а перший 3,5 + 0,5 = 4 (*км*).

Відповідь. 4 *км* і 3,5 *км*.

б) Рух в одному напрямку. Задача 3. З пункту A виїхав велосипедист в напрямку до пункту B з середньою швидкістю 12 *км/год*. Через 2 *год* з того самого пункту рушив у тому ж напрямку другий велосипедист з швидкістю 18 *км/год*. Через скільки годин і на якій віддалі від A другий велосипедист наздожене першого?

Розв'язання (рис. 14).

1) Яку віддаль проходить перший велосипедист до виходу другого?

$$12 \cdot 2 = 24 \ (км).$$

2) На скільки кілометрів більше проходить за годину другий велосипедист, ніж перший?

$$18 - 12 = 6 \ (км).$$

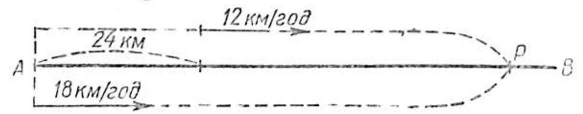


Рис. 14.

3) Через скільки годин після виходу другий велосипедист наздожене першого?

$$24 \ км : 6 \ км = 4 \ (год).$$

4) На якій віддалі від A другий велосипедист наздожене першого?

$$18 \cdot 4 = 72 \ (км).$$

Відповідь. 4 *год*, 72 *км*.

Задача 4. Мотоцикліст, відправляючись на екскурсію, розраховував, що коли він буде рухатись з швидкістю 20 *км/год*, то приїде на місце на 15 *хв* раніше, ніж коли б він рухався з швидкістю 18 *км/год*. Яку віддаль він повинен подолати?

Розв'язання.

1) Скільки кілометрів проїхав би мотоцикліст за 15 *хв* з швидкістю 20 *км/год*?

$$20 \cdot \frac{1}{4} = 5 \ (км).$$

2) На скільки кілометрів більше проїжджав би мотоцикліст за одну годину в першому випадку, ніж у другому?

$$20 - 18 = 2 \ (км).$$

3) За який час мотоцикліст проїде всю віддаль з швидкістю 18 *км/год*?

$$5 : 2 = 2{,}5 \ (год).$$

4) Яку віддаль він повинен проїхати?

$$18 \cdot 2{,}5 = 45 \ (км).$$

Відповідь. 45 *км*.

III. АЛГЕБРА

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО РОЗВИТОК АЛГЕБРИ

Перші алгебраїчні задачі були поставлені і розв'язані ще математиками стародавнього Єгипту і Вавілону. Так, папірус Ахмеса, що відноситься до XVIII ст., містить розв'язання одинадцяти задач, які приводять до рівнянь з одним невідомим. Значно глибшими знаннями володіли вавілоняни. До нашого часу збереглися тексти з розв'язанням системи двох рівнянь з двома невідомими, квадратних і кубічних рівнянь, систем квадратних рівнянь з двома і трьома невідомими.

У стародавній Греції алгебрі приділяли мало уваги. Проте «Арифметика» Діофанта Олександрійського, написана близько 250 р. н. е., є доказом того, що в стародавній Греції вже тоді існувала алгебра як наука, зв'язана з вавілонською математикою. Ця праця містила розв'язання задач, що приводять до рівнянь першого і другого степеня, а також до неозначених рівнянь. Усі міркування Діофанта — суто аналітичного характеру, але при розв'язуванні задач він користувався різними способами: загальних способів розв'язування він не знав. Діофант не знав також від'ємних чисел, і розв'язуючи квадратні рівняння, у відповідях він давав лише додатні корені. У своїх алгебраїчних міркуваннях він користувався деякою символікою.

В історії математики, і зокрема алгебри, розрізняють три способи викладу: риторичний, синкопічний і символічний. *Риторичним* називають такий спосіб, при якому всі речення записуються словами, символіка повністю відсутня. Цим способом викладу користувалася більшість математиків аж до нового часу.

Синкопічний спосіб також характеризується словесним записом математичних виразів; проте для дій і понять, що часто зустрічаються, тут застосовується і символіка. Таким способом і було написано трактат Діофанта, яким аж до середини XVII ст. користувалися західноєвропейські алгебраїсти.

Символічний спосіб викладу, при якому математичні вирази повністю записуються математичними символами, вперше в Європі був розроблений французьким математиком Вієтом (1540—1603). Цей спосіб застосовується з другої половини XVII ст. Проте задовго до цього часу індійські математики вже користувалися символічним способом.

Індійські математики внесли в алгебру значний вклад. У II ст. н. е. вони користувалися ірраціональними числами. В VII ст. математик Брахмагупта вже повністю володіє теорією рівнянь першого і другого степеня з одним невідомим. Він користується також і поняттям від'ємного числа. До XII ст. відносяться два трактати математика Бхаскари,— «Лілаваті» і «Біджаганіта». В останньому Бхаскара займається розв'язуванням квадратних рівнянь, причому розглядає обидва корені, хоч і вважає другий корінь непотрібним.

Деякими алгебраїчними знаннями володіли також математики стародавнього і середньовічного Китаю. Остання частина «Математики в дев'яти книгах», написаної у II—III ст. н. е., присвячена застосуванню алгебри до деяких геометричних задач. У XIII ст. видатний китайський математик Цінь Цзю-Шао написав трактат «Дев'ять відділів мистецтва лічби», в якому він дає чисельні розв'язки рівнянь аж до четвертого степеня. Це — найвище досягнення китайців у галузі алгебри. Дальший розвиток математики у Китаї відбувся лише в XIX ст., після оволодіння європейськими методами дослідження.

Починаючи з IX ст., алгеброю займалися вчені ряду країн, що входили тоді до складу Арабського халіфату. Вони писали арабською мовою. Сірійські, єгипетські та іранські вчені переклали на арабську мову, ретельно вивчили і прокоментували твори грецьких математиків. Особливо значний внесок належить середньоазіатським вченим, які, крім грецької математики, вивчили також індійську.

Мухаммед ібн Муса написав трактат під назвою «Книга відновлення і протиставлення».

«Відновленням» Мухаммед називає перенесення від'ємного члена з однієї частини рівняння до другої, в якій він стає додатним; «протиставленням» — збирання невідомих до однієї частини рівняння, а відомих — до другої. «Відновлення» на арабській мові означає «ал-джебр». Звідси і виникло слово «алгебра». В цьому трактаті Мухаммед дає вчення про рівняння першого і другого степенів, розглядає застосування алгебри до геометрії, а також до ряду питань, зв'язаних з спадкоємством і поділом майна за складними законами мусульманського права.

Мухаммед відіграв велику роль в історії науки. По суті, він підсумував і звів воєдино знання греків, індійців і середньоазіатських народів з арифметики і алгебри.

Видатний таджицький поет і вчений Омар Хайям (бл. 1048—1131) написав близько 1070 р. трактат з алгебри, що містив розв'язання рівнянь першого, другого і третього степенів, а також деяких спеціальних видів рівнянь методом геометричних побудов.

Багато алгебраїчних задач було розв'язано середньоазіатськими і арабськими вченими в зв'язку з розвитком астрономії і геометрії. Так, астроном Улуг-Бек (1394—1449) розробив чисельне розв'язування кубічних рівнянь виду

$$x^3 + ax + b = 0,$$

необхідних для складання тригонометричних таблиць. Його сучасник ал-Каші розробив правило добування коренів будь-якого степеня з цілих чисел. Ал-Каші належить також перше в історії науки застосування правила піднесення двочлена до будь-якого степеня («біном Ньютона»).

В Західній Європі алгебра почала розвиватися, починаючи з XIII ст. У 1202 р. Леонардо Фібоначчі (Леонардо Пізанський) написав «Книгу про абак», енциклопедичний твір, в якому звів знання свого часу в галузі арифметики і алгебри, значною мірою запозичені у східних математиків. Як цей твір, так і його прообрази — праці середньоазіатських і східних вчених — написані чисто риторичним способом і зовсім не містили символіки.

До самостійних досягнень Леонардо Фібоначчі відноситься наближене розв'язання кубічного рівняння.

Точне алгебраїчне розв'язання цього рівняння дали математики епохи Відродження. Знаходження способу розв'язання рівняння третього степеня було одним з визначних досягнень математиків XVI ст. У 1541 р. італійський вчений Нікколо Тарталья знайшов загальний розв'язок кубічного рівняння, але опублікував його інший італійський вчений Джеронімо Кардано (1501—1576) у своїй книзі «Велике мистецтво». Там же Кардано навів і розв'язок рівняння четвертого степеня, знайдений його учнем Лодовіко Феррарі.

Протягом наступних трьох століть математики безуспішно шукали алгебраїчні розв'язки рівнянь вище четвертого степеня, і лише видатний норвезький математик Нільс-Генрік Абель (1802—1829) довів, що загальне алгебраїчне рівняння вище четвертого степеня не можна розв'язати в радикалах.

У своїй праці Кардано вказав також на те, що рівняння третього степеня має три корені. Правда, він не дав загального теоретичного доведення цього положення, а навів його лише в декількох окремих випадках. Він уперше розв'язує задачу з комплексними числами: ділить 10 на дві частини, добуток яких дорівнює 40, і в результаті дістає: $5 + \sqrt{-15}$; $5 - \sqrt{-15}$. Перемноживши ці числа, він дістає: $25 + 15 = 40$.

Найбільшого розвитку алгебра як наука досягла в XVI ст. у Франції. Праця Франсуа Вієта «Вступ до аналітичного мистецтва», опублікована в 1591 р., була першою працею в галузі алгебри, написаною цілком у символічній формі. Вієт удосконалив методи алгебри і тригонометрії, а також докладно і систематично виклав застосування алгебри до геометрії. При розв'язуванні рівнянь третього і четвертого степенів він користувався методом зведення. Проте всі корені, крім додатних, відкидав.

В 1629 р. Жірар (1590—1633) опублікував працю «Нові винаходи в алгебрі», в якій оцінив корисність від'ємних коренів і встановив, що кожне рівняння має стільки коренів, скільки одиниць міститься в його показнику степеня.

До XVII ст. європейські математики, за винятком Жірара, не визнавали від'ємних чисел, поки видатний французький геометр Рене Декарт (1596—1650) не дав геометричного тлумачення їх на числовій осі. Проте і після Декарта зустрічаються неправильні погляди на від'ємні числа; лише з середини XIX ст. у підручниках для середньої школи від'ємні числа викладаються систематично і наводиться їх правильне тлумачення.

Декарт систематизував також символічний запис алгебраїчних виразів.

У 1614 р. шотландець Джон Непер (1550—1617) опублікував теорію винайдених ним таблиць логарифмів. Одночасно з Непером і зовсім незалежно від нього швейцарець Іобст Бюргі (1552—1632) склав свої таблиці антилогарифмів — «Арифметичні і геометричні таблиці прогресій», але опублікував їх лише у 1620 р. Пізніше теорію логарифмів розвинув англійський математик Генрі Брігс (1561—1630). Знак «log» ввів Й. Кеплер у 1624 р.

Значні дослідження в галузі алгебри належали видатному французькому вченому П'єру Ферма (1601—1665), зокрема він розробив метод виключення одного невідомого з двох рівнянь однакового степеня.

В 1707 р. І. Ньютон (1642—1724) опублікував «Універсальну арифметику», в якій дав кілька одержаних ним результатів з алгебри. Частково ці результати були опубліковані дещо раніше, у 1685 р., в «Алгебрі» Джона Валліса (1616—1703). Ньютон удосконалив метод виключення Ферма, відкрив теорему про біном, хоча і не дав її доведення.

«Алгебра» Джона Валліса протягом тривалого часу була найповнішим посібником з цього предмета. Зокрема в ній Валліс почав розглядати степені з від'ємними показниками. Він увів також знак нескінченності (∞). Його книга містила також розділ з історії алгебри.

Над доведенням біноміальної теореми протягом XVIII ст. працювало багато видатних математиків. Якоб Бернуллі (1654—1705) довів її, користуючись теорією сполук, для випадку цілих додатних показників. Теорему для випадку від'ємних і дробових показників довів Леонард Ейлер (1707—1783). Строге загальне доведення теореми дав лише в XIX ст. Абель.

Першою друкованою книгою на російській мові, яка містила відомості з алгебри, була «Арифметика» Л. П. Магницького. Таким чином, вже з початку XVIII ст. в Росії відомості з алгебри входять до складу шкільного викладання.

Л. Ейлер написав «Повний вступ до алгебри», перекладений на російську мову і виданий в 1769 р. під назвою «Універсальна арифметика». Для того часу книга являла собою найповніший науково викладений посібник з алгебри, в якій особливо добре була викладена теорія логарифмів, зовсім перероблена Ейлером. Книга була двічі перевидана, а також неодноразово видавалася німецькою та французькою мовами.

Молодий французький математик Еваріст Галуа (1811—1832) ввів в алгебру нові ідеї, він розробив теорію груп, яка набула особливого розвитку вже в наш час. Проте цей розділ виходить за межі елементарної алгебри.

У російській середній школі окремі відомості з алгебри викладалися протягом всього XVIII ст., сюди відносилось вчення про рівняння першого і другого степеня, дії з буквеними виразами, логарифми, застосування алгебри до розв'язування геометричних задач. З кінця XVIII ст. під впливом Ейлера і його учнів у російських учбових закладах починають викладати систематичний курс алгебри.

Особливо багато зробив для постановки викладання алгебри академік С. Є. Гур'єв (1764—1813).

У 1826—1839 рр. видав свою «Ручну математичну енциклопедію» професор Московського університету Д. М. Перевощиков (1788—1880); третій том цієї енциклопедії являв собою підручник з алгебри. Підручники Д. М. Перевощикова стали значним внеском у справу математичної освіти в Росії.

Слід відзначити, що питаннями викладання елементарної математики в середній школі займалися в середині XIX ст. такі видатні математики, як М. І. Лобачевський (1792—1856), М. В. Остроградський (1801—1861), В. Я. Буняковський (1804—1889), О. І. Сомов (1815—1876), П. Л. Чебишов (1821—1894) та ін. Лобачевський і Сомов, зокрема, створили підручники з елементарної алгебри для середньої школи.

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні числа

1. Додатні і від'ємні числа. З розвитком математики відбувалося узагальнення поняття числа. Виявилося, що для розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач чисел, які використовує арифметика, недостатньо. Були введені нові — *від'ємні числа*, для позначення яких вживають знак мінус, наприклад:

$$-2,\ -19,\ -0{,}7 \text{ і т. д.}$$

Від'ємні числа бувають цілі і дробові. Наприклад, числа —4, —306 — цілі від'ємні, а числа —0,7, —4,18, $-\frac{2}{3}$, $-5\frac{1}{2}$ — дробові від'ємні. Щоб не змішувати з від'ємними числами ті натуральні і дробові числа, які розглядалися в арифметиці, домовилися називати їх *додатними*. Перед додатними числами іноді пишуть знак плюс, але його можна й не писати. Наприклад, +7 і 7 — одно й те саме число.

Число *нуль* — ні додатне, ні від'ємне. Перед ним можна ставити і знак плюс, і знак мінус; +0, —0 і 0 позначають одне й те саме.

Цілі додатні (тобто натуральні), цілі від'ємні числа і нуль разом називають *цілими числами*. Всі цілі і дробові числа (додатні і від'ємні) називають *раціональними числами*.

Примітка. Раніше раціональні числа називали відносними.

2. Числова вісь. Раціональні числа зручно зображати на прямій. Візьмемо на прямій довільну точку O (вона називається *початковою* або *нульовою*), в обидві сторони від неї відкладемо рівні відрізки і кінці їх позначимо числами, як це зображено на рис. 15. Тоді кожному раціональному числу на прямій відповідатиме певна точка. Наприклад, числу 2 відповідає точка A, числу —2,3 — точка B.

Пряма, точки якої зображають числа, називається *числовою прямою* або *числовою віссю*.

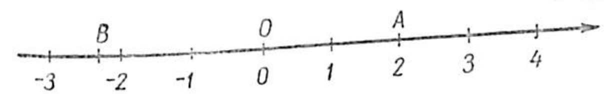


Рис. 15.

Кожному раціональному числу на числовій осі відповідає єдина точка.

Примітка. Проте не кожній точці числової осі відповідає раціональне число (див. стор. 177).

Двом раціональним числам, які відрізняються лише знаками, на числовій осі відповідають точки, розміщені по обидві сторони від нульової точки і на однакових відстанях від неї. Такі пари чисел називають *протилежними числами*. Наприклад, число 9 протилежне числу —9 і навпаки.

Протилежними називаються також знаки + і —.

3. Абсолютна величина числа. Два протилежні числа, наприклад +7 і —7, відрізняються знаками, але записуються однаковими цифрами. Кажуть, що вони мають однакові абсолютні величини. Абсолютна величина кожного з них дорівнює 7. Числа —0,5 і $-\frac{1}{2}$ також мають однакові абсолютні величини.

Абсолютною величиною додатного числа називається саме це число, абсолютною величиною від'ємного числа називається протилежне йому число, абсолютною величиною числа 0 *називається саме число* 0.

Абсолютну величину числа a позначають знаком $|a|$.

Таким чином,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0; \\ -a & \text{якщо } a < 0; \\ 0, & \text{якщо } a = 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|-13| = 13$; $|4| = 4$; $|0| = 0$.

4. Порівняння раціональних чисел. Від'ємні числа порівнюють за величиною як між собою, так і з додатними числами. З двох раціональних чисел те більше, якому на числовій осі відповідає точка, розміщена правіше.

Звідси випливає, що:

а) *будь-яке додатне число більше від нуля і будь-якого від'ємного числа;*

б) *будь-яке від'ємне число менше від нуля;*

в) *з двох від'ємних чисел те більше, абсолютна величина якого менша.*

Наприклад,

$$3 > 0;\ 1 > -5;\ -\frac{1}{2} < 0;\ -3 > -10;\ -4 < -1.$$

Рівними вважаються лише ті числа, у яких і знаки і абсолютні величини рівні, наприклад $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$.

§ 2. Дії над раціональними числами

1. Додавання. а) *Щоб додати раціональні числа з однаковими знаками, треба додати їх абсолютні величини і перед результатом поставити їх спільний знак.*

Приклади. $(+8) + (+11) = 19$; $(-7) + (-3) = -10$.

б) *Щоб додати два раціональні числа з різними знаками, треба від більшої абсолютної величини відняти меншу абсолютну величину і перед результатом поставити знак числа з більшою абсолютною величиною.*

Приклади. $(+19) + (-7) = 12$; $(-2{,}4) + 15{,}8 = 13{,}4$.

в) *Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.*

Приклади. $(-15) + (+15) = 0$; $\left(-4\frac{3}{8}\right) + \left(+4\frac{3}{8}\right) = 0$.

г) *Якщо один з двох доданків дорівнює нулю, то їх сума дорівнює другому доданку.*

Приклад. $a + 0 = 0 + a = a$.

Закони додавання, вірні для додатних чисел (див. стор. 45) справедливі також для всіх раціональних чисел.

Додавання кількох чисел з різними знаками можна виконувати послідовно: спочатку знайти суму двох перших доданків, до цієї суми додати третій доданок і так далі. Проте зручніше додавання виконувати за таким правилом: щоб додати кілька раціональних чисел з різними знаками, треба додати окремо всі додатні та всі від'ємні числа і одержані два числа додати за правилом додавання чисел з різними знаками.

Приклади. $(+15) + (-4) + (-8) + (+9) + (-1) = (+24) + (-13) = +11$.

$\left(-7\frac{1}{3}\right) + \left(+3\frac{5}{8}\right) + \left(-10\frac{1}{3}\right) + \left(+1\frac{3}{8}\right) = \left(-17\frac{2}{3}\right) + (+5) = -12\frac{2}{3}$.

2. Віднімання. *Щоб від одного раціонального числа відняти друге, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.*

Приклади. $(-3) - (+8) = (-3) + (-8) = -11$; $-7 - (-4) = -7 + (+4) = -3$.

Віднімання раціональних чисел можна замінити додаванням, а тому віднімання раціональних чисел завжди можливе.

3. Алгебраїчна сума. Оскільки віднімання раціональних чисел можна замінити додаванням, то кожний вираз, що містить кілька дій додавання і віднімання, можна записати у вигляді суми чисел з тими самими абсолютними величинами. Тому такі вирази можна розглядати як суми.

Вираз, що містить кілька чисел, сполучених між собою знаками + або —, називається алгебраїчною сумою.

Приклади. $3 + 7 - 4$; $(-2) + (-7) + (+8) - (-4)$; $a + b - c + d$.

4. Множення. *Щоб перемножити два раціональні числа, треба перемножити їх абсолютні величини і перед результатом поставити знак плюс, якщо обидва співмножники мають однакові знаки, або мінус, якщо співмножники мають різні знаки.*

Приклади. $(-2) \cdot (-3) = +6$; $(-0{,}5) \cdot (+2) = -1$; $(+2) \cdot (+3) = +6$; $(+0{,}5) \cdot (-4) = -2$.

Якщо хоч один із співмножників дорівнює нулеві, добуток також дорівнює нулеві, наприклад $0 \cdot (-5) = 0$; $(+2{,}5) \cdot 0 = 0$.

Щоб перемножити декілька чисел з різними знаками, треба перемножити їх абсолютні величини і визначити знак добутку: якщо число від'ємних співмножників парне, добуток буде додатний, якщо число від'ємних співмножників непарне, добуток буде від'ємний.

Приклади. $(-5) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (+10) = -1200$ (тут число від'ємних співмножників непарне — три).

$(+2{,}5) \cdot (-7{,}3) \cdot (+4) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (-6) = +292$ (число від'ємних співмножників парне — чотири).

Закони множення, вірні для додатних чисел (див. стор. 46), справедливі також для всіх раціональних чисел.

5. Піднесення до степеня. Степінь будь-якого раціонального числа з натуральним показником означається так само, як і степінь додатного числа, тобто являє собою добуток кількох рівних співмножників.

Степінь від'ємного числа з парним показником додатний, а з непарним — від'ємний.

Приклади. $(+2{,}1)^2 = +4{,}41$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$; $(-0{,}03)^2 = 0{,}0009$.

6. Ділення. *Частка від ділення двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює частці їх абсолютних величин, взятій із знаком плюс.*

Приклади. $(-16):(-4) = +4$; $(+28):(+4) = +7$.

Частка від ділення двох раціональних чисел з різними знаками дорівнює частці від ділення їх абсолютних величин, взятій із знаком мінус.

Приклади. $(-48):(+12) = -4$; $(+16{,}8):(-8) = -2{,}1$.

7. Історичні відомості про розвиток поняття від'ємного числа. Вперше від'ємні числа з'явилися у китайських математиків близько початку нашого літочислення. У IV—V ст. індійські математики розвинули вчення про від'ємні числа, а в VII ст. Брахмагупта дав тлумачення діям над від'ємними числами, називаючи додатні числа майном, а від'ємні — боргом: «Сума майна з майном — майно, двох боргів — борг, сума майна і боргу — їх різниця або, якщо вони рівні — то нуль. Сума нуля і боргу — борг, майна і нуля — майно, нуля з нулем — нуль. Менше віднімається від більшого, майно — від майна, борг — від боргу, але якщо віднімається більше від меншого, значення лишку змінюється. Борг, що віднімається від нуля, стає майном, майно перетворюється на борг».

Проте, незважаючи на логічність і погодженість із практикою, вчення індійських вчених не було прийняте на Заході. Лука Пачолі (1445—1509) користується від'ємними числами, але лише у складі многочленів. Він використовує правило «мінус на мінус дає плюс», застосовуючи його до виразів типу $(a - b) \times (a - b)$.

Від'ємними числами користується і Кардано. М. Штіфель, виходячи з положення, що від'ємні числа «менші, ніж ніщо», називав їх «безглуздими числами». Більшість європейських математиків дотримувалася такого самого погляду і користувалася виключно додатними числами.

Декарт теж називав від'ємні числа «несправжніми», проте він уявляв їх у вигляді відрізків з напрямком, протилежним відрізкам, які відповідають додатним числам.

Дальший розвиток теорії від'ємних чисел наприкінці XVII і на початку XVIII ст. пов'язаний з відкриттям Ньютоном і Лейбніцом диференціального і інтегрального числень. Розвиток нових галузей вищої математики вимагав нового висвітлення від'ємних величин і з'ясування їх ролі. Це зробили в своїх працях Ньютон і Ейлер. Проте і в другій половині XVIII ст. багато хто з математиків, навіть такі видатні вчені, як Даламбер і Карно, не визнавали від'ємних чисел, вважаючи їх «несправжніми». Вони вважали, що в математику не треба вводити від'ємні числа, бо останні — не що інше, як додатні числа, що віднімаються; отже, і всі дії повинні зводитися виключно до дій з додатними числами.

Лише у XIX ст. від'ємні числа стали розглядатись нарівні з додатними.

§ 3. Алгебраїчні вирази

1. Вживання букв. В алгебрі для позначення чисел, крім цифр, користуються буквами, найчастіше латинського алфавіту (див. стор. 8).

Букви вживаються:

1) для позначення невідомих чисел, наприклад у вправі «Визначити x, якщо $x + 0{,}9 = 2{,}7$»;

2) для позначення довільних чисел; наприклад, коли хочуть сказати, що переставний закон додавання вірний для будь-яких раціональних чисел, пишуть: які б не були числа a і b, то

$$a + b = b + a.$$

Для позначення невідомих чисел найчастіше вживають останні букви латинського алфавіту (x, y, z), а для позначення відомих — перші букви (a, b, c, d і т. д.). Цілі числа найчастіше позначають буквами m, n, k, l та ін. Проте цього не завжди дотримуються: можуть бути невідомими також числа, позначені буквами a, b, n, а відомими вважатися x, y, z і т. д.

2. Алгебраїчні вирази. Оскільки під буквами в алгебрі розуміють числа, з ними і оперують як з числами: додають, віднімають і т. ін. Наприклад, якщо треба додати a і b, пишуть $a + b$. Такий запис називається сумою чисел a і b.

Примітка. Перед множниками, позначеними буквами (їх називають буквеними множниками), знак множення не пишуть. Наприклад, замість $a \cdot b \cdot c$, $4 \cdot x$ пишуть abc, $4x$.

Проте перед множниками, позначеними цифрами (їх називають числовими множниками), знак множення пишуть обов'язково. Наприклад, замість $9 \cdot 3$; $3 \cdot \frac{1}{2}$ писати 93, $3\frac{1}{2}$ не можна.

Сукупність чисел, позначених буквами або цифрами і з'єднаних знаками дій, називається *алгебраїчним виразом*. Іноді замість «алгебраїчного виразу» кажуть просто «вираз».

Приклади алгебраїчних виразів:

$$\frac{a+3}{b+4};\ 3m^2n;\ 9\,(p^2 + q^2);\ a;\ (13 + 18)\,7;\ 3{,}7.$$

Алгебраїчний вираз може складатися з однієї букви, може зовсім не містити в собі чисел, позначених буквами. В останньому випадку (див. два останніх приклади) його називають також *арифметичним виразом*.

3. Числове значення алгебраїчного виразу. *Числовим значенням алгебраїчного виразу при даному значенні букв, що входять до нього, називається число, одержане в результаті підстановки замість букв відповідних чисел і виконання зазначених дій.*

Приклад. Визначити числове значення виразу $3a + 5$ при $a = 5{,}7$.

Розв'язання. Якщо $a = 5{,}7$, то $3a + 5 = 3 \cdot 5{,}7 + 5 = 22{,}1$.

Відповідь. При $a = 5{,}7$ числове значення даного виразу дорівнює 22,1.

Приклад. Визначити числове значення виразу $\frac{a}{2n + 5a}$ при $a = 1$ і $n = -2{,}5$.

Розв'язання. Якщо $a = 1$, $n = -2{,}5$, то

$$\frac{a}{2n + 5a} = \frac{1}{2 \cdot (-2{,}5) + 5 \cdot 1} = \frac{1}{0}.$$

Проте на 0 ділити не можна; отже, при даних значеннях букв даний алгебраїчний вираз не має числового значення. Кажуть також, що при $a = 1$ і $n = -2{,}5$ цей вираз позбавлений смислу. Ці значення *недопустимі* для даного виразу.

Числові значення, яких можуть набувати букви в даному алгебраїчному виразі, не позбавляючи його смислу, називаються *допустимими значеннями* для цих букв.

4. Одночлен і многочлен. Алгебраїчні вирази, складені з цифр і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником, називаються *раціональними алгебраїчними виразами.*

Приклади. $a - b$; a^2b; $\frac{x}{y}$; $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$; $a + \frac{2}{b}$.

Раціональний алгебраїчний вираз називається *цілим*, якщо він не містить ділення на буквений вираз.

Приклади. $3a^2 + \frac{1}{2}b$; $x - y$; $\frac{5x - 4y}{8}$; a^2b.

З цілих виразів найпростішими вважаються одночлени. Алгебраїчний вираз, який містить лише дії множення і піднесення до степеня, називається *одночленом.*

Приклади. $7ab^2$; $-\frac{2}{5}b$; $\frac{4}{5}x^2y^2$; $-0{,}2^3$; c.

Ці одночлени записані в найпростішому (канонічному) вигляді.

Алгебраїчна сума декількох одночленів називається *многочленом*, або *поліномом*.

Приклади. $2a + 7b - c$; $a^3 - b^3 - \frac{2}{3}c^2$; $x^2 + x - 5$.

Кожний одночлен, що входить до складу многочлена, називається його *членом*. Многочлен, що складається з двох членів, називається *двочленом*, або *біномом* (наприклад, $2a - b$); многочлен, що складається з трьох членів, називається тричленом (наприклад, $3a - 2b + 8$) і т. д.

Одночлен вважається окремим видом многочлена: це многочлен, що складається з одного члена.

5. Упорядковані многочлени. Нехай многочлен містить лише одну букву в різних степенях. Застосовуючи переставний закон додавання, можна упорядкувати його члени або за зростаючими, або за спадними степенями цієї букви.

Приклад. Многочлен $-15x^2 + 7x^4 - 8x + 3 - 5x^3$ упорядкувати:

а) за зростаючими степенями x;

б) за спадними степенями x.

Розв'язання. а) $3 - 8x - 15x^2 - 5x^3 + 7x^4$ (за зростаючими степенями);

б) $7x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 8x + 3$ (за спадними степенями).

Якщо многочлен містить дві або кілька букв, то вибирають одну з них, яку називають головною, і упорядковують многочлен за степенями цієї головної букви. Наприклад, вираз $3x^3 - 2ax^2 + a^4x - 5a^2$ є многочлен, упорядкований за спадними степенями букви x. Перший член упорядкованого многочлена, що містить головну букву в найвищому степені, називається старшим, а останній — нижчим членом цього многочлена. Степінь старшого члена називається *степенем* і самого многочлена. Так, в даному прикладі $3x^3$ — старший член, $-5a^2$ — нижчий член, 3 — степінь старшого члена і степінь самого многочлена.

6. Коефіцієнт. Числовий множник, що стоїть перед буквеними множниками, називається *коефіцієнтом.*

Якщо вираз містить лише буквені множники, то його коефіцієнт дорівнює одиниці, наприклад, замість $1c$ пишуть c, замість $1ab$ пишуть ab. Коефіцієнт може бути цілим числом, наприклад у виразі $5\,cd$, а також дробовим, наприклад у виразі $\frac{5}{6}ab$. Якщо коефіцієнт—натуральне число, то він показує, скільки разів вираз, що стоїть за ним, береться доданком, наприклад $5cd = cd + cd + cd + cd + cd$. Якщо коефіцієнт — дробове додатне число, то він показує, який дріб треба взяти від значення виразу, що стоїть за ним. Наприклад, у виразі $\frac{5}{6}ab$ коефіцієнт $\frac{5}{6}$ означає, що при будь-яких значеннях a і b треба взяти $\frac{5}{6}$ від їх добутку.

За допомогою коефіцієнта можна коротше записати вирази, що містять однакові букви, з'єднані знаками плюс і мінус, наприклад:

$$c + c + c + c + c = 5c;$$
$$x + x - y - y - y = 2x - 3y;$$

$$\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}=\frac{4z}{3};$$

$$\frac{x+x+x+x+x+x+x}{y+y+y}=\frac{7x}{3y}.$$

Примітка. Далі поняття коефіцієнта узагальнюється, навіть буквені множники можна розглядати як коефіцієнти.

Наприклад, у виразі $2abx$ коефіцієнтом при x є $2\ ab$.

7. Порядок дій. В алгебрі зберігаються ті самі правила щодо порядку виконання дій, які прийняті в арифметиці (якщо не враховувати одного винятку, розглянутого на стор. 57). У виразах, що стоять без дужок і містять дії різних ступенів, спочатку треба виконати піднесення до степеня, потім множення, ділення і, нарешті, додавання і віднімання. Дії над числами, що стоять у дужках, треба виконувати першими.

Приклад. Знайти числове значення виразу

$$a+\frac{b\,(b-2a)}{a}:ab^2$$

при $a=-1,\ b=0{,}5$.

Розв'язання. Якщо $a=-1,\ b=0{,}5$, то

$$a+\frac{b\,(b-2a)}{a}:ab^2=-1+\frac{0{,}5\,[0{,}5-2\cdot(-1)]}{-1}:(-1)\cdot 0{,}5^2=$$
$$=-1+\frac{0{,}5\,(0{,}5+2)}{-1}:(-1)\cdot 0{,}25=-1+\frac{0{,}5\cdot 2{,}5}{-1}:(-0{,}25)=$$
$$=-1-1{,}25:(-0{,}25)=-1+5=4.$$

§ 4. Тотожні перетворення цілих виразів

1. Тотожні вирази і перетворення. Два вирази називаються *тотожними*, якщо вони мають однакові числові значення при всіх допустимих значеннях букв, що входять до них.

Приклад. Вирази $3\,(a-2)+6$ і $3a$ тотожні:

при $a=1$ $3\,(a-2)+6=3$ і $3a=3$,

при $a=2$ $3\,(a-2)+6=6$ і $3a=6$ і т. д.

Два тотожні вирази, з'єднані знаком рівності, становлять *тотожність*. Можна сказати і так:

рівність, вірна при всіх допустимих значеннях букв, що входять до неї, називається тотожністю.

Приклади. $3\,(a-2)+6=3a$; $x+2x+5x=8x$ — тотожності.

Тотожностями є також всі рівності, що виражають закони додавання і множення:

$$a+b=b+a,$$
$$a+b+c=a+(b+c),$$
$$ab=ba,$$
$$abc=a(bc),$$
$$(a+b)c=ac+bc.$$

Заміна одного виразу іншим, тотожним йому, називається *тотожним перетворенням* цього виразу.

2. Зведення подібних членів. Два одночлени *рівні*, якщо у них рівні коефіцієнти і вони містять однакові букви з відповідно рівними показниками. Одночлени називаються *подібними*, якщо вони рівні або відрізняються лише коефіцієнтами.

Приклади. Одночлени $2a^2b^3$ і $\frac{6}{3}a^2b^3$ рівні, одночлени $2a^3$, $-3a^3$ і $\frac{1}{2}a^3$ подібні.

Заміна алгебраїчної суми подібних членів одним членом, тотожним цій сумі, називається *зведенням подібних членів. Щоб звести подібні члени, треба додати їх коефіцієнти і здобуту суму записати коефіцієнтом того самого буквеного виразу.*

Приклади. $3a^2b-a^2b+7{,}4a^2b=(3-1+7{,}4)a^2b=9{,}4a^2b$; $8{,}7\,m^2n-14m^2n-27m^3n^2+0{,}7m^2n+2m^3n^2-0{,}5m^3n^2-6m^2n=-25{,}5\ m^3n^2$.

3. Як розкривати дужки і як брати в дужки. Розкрити в алгебраїчному виразі дужки — значить замінити його тотожним виразом, який не має дужок. Правила розкриття дужок випливають з властивостей додавання і віднімання:

$$a+(b+c)=a+b+c,$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Ці правила формулюються так:

а) *щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак плюс, треба записати без дужок всі члени, що стоять у дужках, з їх знаками;*

б) *щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак мінус, треба записати без дужок всі члени, що стоять у дужках, з протилежними знаками.*

Приклади. $9a^2+[7a^2-2a-(a^2-3a)]=9a^2+(7a^2-2a-a^2+3a)=9a^2+7a^2-2a-a^2+3a=15a^2+a$;

$(3m+5n)-\{9m-[6m+2n-(12n+10m)-m-(7m-4n)]\}=$
$=3m+5n-\{9m-[6m+2n-12n-10m)-m-7m+4n]=$
$=3m+5n-[9m-(6m+2n-12n-10m-m-7m+4n)=$
$=3m+5n-(9m-6m-2n+12n+10m+m+7m-4n=$
$=3m+5n-9m+6m+2n-12n-10m+m+7m-4n=$
$=-2m-9n.$

Якщо треба взяти многочлен в дужки, користуються такими правилами:

а) *щоб взяти в дужки многочлен із знаком плюс перед дужками, треба записати в дужках усі члени многочлена з їх знаками;*

б) *щоб взяти в дужки многочлен із знаком мінус перед дужками, треба записати в дужках усі члени многочлена з протилежними знаками.*

П р и к л а д и. У виразі $2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - y^3$ взяти в дужки крайні члени із знаком плюс перед дужками, а середні члени — із знаком мінус.

Розв'язання.

$$2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - y^3 = (2x^3 - y^3) - (4xy^2 - 5x^2y).$$

У виразі $x^2 - y^2 - (y - x)$ змінити перед дужками знак на протилежний, не змінюючи величини виразу.

Розв'язання.

$$x^2 - y^2 - (y - x) = x^2 - y^2 + (x - y).$$

§ 5. Дії над цілими алгебраїчними виразами

1. Додавання одночленів і многочленів. *Щоб додати одночлени, досить записати їх один за одним з їх знаками і звести подібні члени, якщо вони є.*

П р и к л а д. $(-0{,}2xy) + (3{,}7x^2) + (-3{,}5xy) + (-6{,}8x^2) = -0{,}2xy + 3{,}7x^2 - 3{,}5xy - 6{,}8x^2 = -3{,}7xy - 3{,}1x^2$.

Щоб додати многочлени, треба записати послідовно всі їх члени з їх знаками і звести подібні члени, якщо вони є.

П р и к л а д. $(12a + 7b - c) + (c - 7b + 8a) = 12a + 7b - c + c - 7b + 8a = 20a$.

Додавання упорядкованих многочленів виконують так: підписують многочлени так, щоб подібні члени знаходилися один під одним; після цього зводять подібні члени і записують остаточний результат.

П р и к л а д. Додати многочлени: $3x^4 + 7x^3y - x^2y^2 - 5xy^3$; $-7x^4 - 5x^3y + 8x^2y^2 + 10xy^3$; $4x^4 + 10x^3y - 2x^2y^2 - 7xy^3$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x^4 & + 7x^3y & - x^2y^2 & - 5xy^3 \\ + & -7x^4 & - 5x^3y & + 8x^2y^2 & + 10xy^3 \\ & 4x^4 & + 10x^3y & - 2x^2y^2 & - 7xy^3 \\ \hline & & 12x^3y & + 5x^2y^2 & - 2xy^3. \end{array}$$

2. Віднімання одночленів і многочленів. *Щоб відняти одночлен, досить приписати його до зменшуваного з протилежним знаком і звести подібні члени, якщо вони є.*

П р и к л а д и. $10a^3 - (+7a^3) = 10a^3 - 7a^3 = 3a^3$; $-0{,}2m^2n - (+7{,}3mn) = -0{,}2m^2n - 7{,}3mn$.

Щоб відняти многочлен, треба записати після зменшуваного всі його члени з протилежними знаками і звести подібні члени, якщо вони є.

П р и к л а д. $(5x^2 - 3xy + y^2) - (6x^2 - 8xy + y^3) = 5x^2 - 3xy + y^2 - 6x^2 + 8xy - y^3 = -x^2 + 5xy + y^2 - y^3$.

Віднімання упорядкованих многочленів можна виконувати так: у многочлена, який віднімають, змінюють знаки всіх членів на протилежні, підписують його під зменшуваним так само, як і при додаванні, і зводять подібні члени.

П р и к л а д. Відняти многочлени: $(8x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 18) - (5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 4x - 7)$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 8x^4 & - 3x^3 & + 7x^2 & + x & - 18 \\ + & -5x^4 & + 6x^3 & - 3x^2 & - 4x & + 7 \\ \hline & 3x^4 & + 3x^3 & + 4x^2 & - 3x & - 11. \end{array}$$

3. Множення одночленів і многочленів. *Щоб перемножити одночлени, треба перемножити їх коефіцієнти і до добутку приписати множником кожну букву з одночленів, що перемножаються, з показником, який дорівнює сумі показників цієї букви у співмножниках.* Якщо буква входить лише до одного з співмножників, її записують в добуток з тим самим показником.

П р и к л а д и. $\left(-\frac{2}{7}x^3y^2z\right) \cdot 21xy = -6x^4y^3z$;

$$(-8x^{n+1}) \cdot (-0{,}5x^3y) = 4x^{n+4}y.$$

Щоб помножити многочлен на одночлен, треба помножити на цей одночлен кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

П р и к л а д и. $(5m^2 - 10mn - 4n^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}mn\right) = -2\frac{1}{2}m^3n + 5m^2n^2 + 2mn^3$;

$$1\frac{1}{3}ab \cdot \left(\frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{2}ab^2 - \frac{5}{6}b^3\right) = a^3b^2 - 2a^2b^3 - 1\frac{1}{9}ab^4.$$

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого і знайдені добутки додати.

П р и к л а д и. $(4z^2 - 1) \cdot (z^2 + 5) = 4z^4 + 20z^2 - z^2 - 5 = 4z^4 + 19z^2 - 5$;

$(x^2 + 3x + 2) \cdot (x - 5) = x^3 - 5x^2 + 3x^2 - 15x + 2x - 10 = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$.

Покажемо на прикладі, як виконують множення упорядкованих многочленів:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x^2 & - 2ax & + 5a^2 & & \\ \times & -x^2 & + 3ax & + 4a^2 & & \\ \hline & -3x^4 & + 2ax^3 & - 5a^2x^2 & & \\ + & & 9ax^3 & - 6a^2x^2 & + 15a^3x & \\ & & & 12a^2x^2 & - 8a^3x & + 20a^4 \\ \hline & -3x^4 & + 11ax^3 & + a^2x^2 & + 7a^3x & + 20a^4. \end{array}$$

При множенні многочлени упорядковують за спадними степенями однієї з букв і підписують їх один під одним. Всі члени множеного множать на перший член множника і результат записують в рядок під рискою. Потім усі члени множеного множать на другий член множника і результат записують в другому рядку так, щоб подібні члени були один під одним. Так само записують добуток всіх членів множеного на третій член множника і так до кінця. Зводять подібні члени і остаточний результат записують внизу під рискою.

4. Піднесення до степеня одночленів. *При піднесенні степеня до степеня треба основу піднести до показника, який дорівнює добутку показників степенів.*

Приклади. $(a^3)^2 = a^6$; $(x^2)^4 = x^8$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

Щоб піднести до степеня одночлен, треба піднести до цього степеня кожний співмножник і знайдені результати перемножити.

Приклади. $(2x^2y^3z)^4 = 16x^8y^{12}z^4$; $[-(-a)^2]^3 = (-a^2)^3 = -a^6$.

5. Ділення одночленів. *При діленні степенів однієї й тієї самої основи від показника діленого віднімається показник дільника, а основа залишається тією самою.*

Приклади. $x^6 : x^2 = x^4$; $a^m : a^n = a^{m-n}$ (при $m > n$).

Примітка. Якщо m дорівнює n, то в цьому випадку дільник і ділене рівні між собою; отже, частка дорівнює одиниці:

$$a^m : a^m = 1.$$

Щоб поділити одночлен на одночлен, треба поділити коефіцієнт діленого на коефіцієнт дільника і до здобутої частки приписати множниками кожну букву діленого з показником, який дорівнює різниці показників цієї букви в діленому і дільнику.

Приклади. $(-15ax^2) : 7{,}5x = -2ax$;

$$30m^4x^5 : (-18m^4x^2) = -1\frac{2}{3}x^3.$$

Одночлени націло не діляться, якщо показник будь-якої букви в дільнику більший від показника тієї самої букви в діленому або якщо дільник містить букву, якої немає в діленому.

6. Ділення многочлена на одночлен. *Щоб поділити многочлен на одночлен, треба поділити на цей одночлен кожний член многочлена і здобуті частки додати.*

Приклади. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + 1\frac{1}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3 =$

$= 1\frac{1}{4}a^5 + 2a^2x - 1\frac{1}{2}x^2$;

$[5(a+b)^4 - 10(a+b)^3 - 15(a+b)^2] : 5(a+b)^2 = (a+b)^2 - 2(a+b) - 3.$

7. Ділення многочлена на многочлен. Розглянемо ділення многочленів на прикладі.

Нехай треба поділити многочлен $6x^4 - 11x^2 + 5x^3 + 9x - 5$ на $3x^2 + 4x - 5$. Для цього упорядковують дані многочлени за спадними степенями букви x. Потім виконують ділення в такому порядку:

а) ділять перший член діленого на перший член дільника і дістають перший член частки;

б) множать дільник на перший член частки і добуток віднімають від діленого. Дістають першу остачу;

в) ділять перший (старший) член остачі на перший член дільника, дістають другий член частки і так ділять доти, поки ділення не закінчиться або поки не залишиться остача, старший член якої не ділиться на старший член дільника.

Записують так:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5 & 3x^2 + 4x - 5 \\
\hline
-\;6x^4 + 8x^3 - 10x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - x + 1 \\
\hline
-3x^3 - x^2 + 9x \qquad & \\
-\;-3x^3 - 4x^2 + 5x \qquad & \\
\hline
3x^2 + 4x - 5 & \\
-\;3x^2 + 4x - 5 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Якщо многочлени залежать від двох або декількох букв, приймають яку-небудь букву за головну і упорядковують многочлени за спадними степенями цієї букви. Тоді інші букви розглядають як коефіцієнти, і ділення таких многочленів виконують так само, як і в першому випадку.

Приклад.

$$\begin{array}{r|l}
a^6 + 2a^3x + x^2 & a^3 + x \\
\hline
-a^6 + a^3x \qquad & a^3 + x \\
\hline
a^3x + x^2 & \\
-a^3x + x^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

або

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 2xa^3 + a^6 & x + a^3 \\
\hline
-\;x^2 + xa^3 \qquad & x + a^3 \\
\hline
xa^3 + a^6 & \\
-\;xa^3 + a^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Не завжди многочлени діляться націло.

В більшості випадків при діленні многочлена на многочлен залишається *остача*.

Приклад.

$$
\begin{array}{r|l}
a^6 - 2a^5 - a^4 + 2a^3 - a + 1 & a^3 - 2a^2 + 3a - 1 \\
\hline
-\,a^6 - 2a^5 + 3a^4 - a^3 \qquad\qquad & a^3 - 4a - 5 \\
\hline
-\,-4a^4 + 3a^3 - a \qquad & \\
-4a^4 + 8a^3 - 12a^2 + 4a & \\
\hline
-\,-5a^3 + 12a^2 - 5a + 1 & \\
-5a^3 + 10a^2 - 15a + 5 & \\
\hline
2a^2 + 10a - 4 &
\end{array}
$$

Многочлен $2a^2 + 10a - 4$ уже не ділиться на $a^3 - 2a^2 + 3a - 1$, отже, в результаті ділення одержуємо частку $a^3 - 4a - 5$ і остачу $2a^2 + 10a - 4$.

Між діленим A, дільником B, часткою Q і остачею R існує така залежність:

$$A = BQ + R.$$

В розглянутому прикладі маємо:

$$a^6 - 2a^5 - a^4 + 2a^3 - a + 1 =$$
$$= (a^3 - 2a^2 + 3a - 1)(a^3 - 4a - 5) + 2a^2 + 10a - 4.$$

Примітка. У випадку ділення многочленів від кількох букв частка і остача визначаються не однозначно, залежно від того, яку букву вибрано головною. Наприклад,

$$
\begin{array}{r|l}
a^2 + ab + b^2 & a + b \\
\hline
-\,a^2 + ab \quad & a \\
\hline
b^2 &
\end{array}
\text{, але }
\begin{array}{r|l}
b^2 + ba + a^2 & b + a \\
\hline
-\,b^2 + ba \quad & b \\
\hline
a^2 &
\end{array}.
$$

Тут ділене і дільник в обох випадках однакові, але частки і остачі — різні.

§ 6. Формули скороченого множення

1. Добуток суми двох чисел на їх різницю. *Добуток суми двох чисел на їх різницю дорівнює різниці квадратів цих чисел:*

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Цю формулу можна зобразити геометрично (рис. 16). Площа заштрихованої частини на верхньому рисунку дорівнює $a^2 - b^2$, на нижньому — $(a + b)(a - b)$.

Приклади. $(7x + 2y^3)(7x - 2y^3) = 49x^2 - 4y^6$;

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{8}y\right)\left(\frac{7}{8}y - \frac{2}{3}x\right) = \frac{49}{64}y^2 - \frac{4}{9}x^2.$$

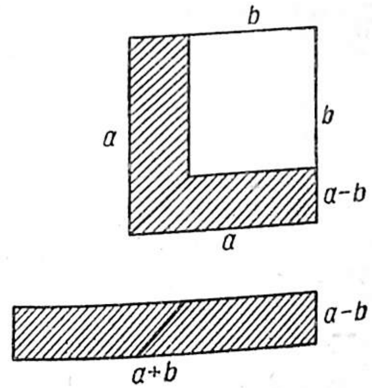


Рис. 16.

2. Квадрат суми. *Квадрат суми двох чисел дорівнює квадрату першого числа, плюс подвоєний добуток першого числа на друге, плюс квадрат другого числа:*

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Приклади.

$$\left(\frac{2}{5}xy + 10x^2\right)^2 = \left(\frac{2}{5}xy\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}xy \cdot 10x^2 + (10x^2)^2 =$$
$$= \frac{4}{25}x^2y^2 + 8x^3y + 100x^4;$$

$$\left(\frac{5}{6}m^2n^3 + \frac{3}{5}mn\right)^2 = \left(\frac{5}{6}m^2n^3\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}m^2n^3 \cdot \frac{3}{5}mn + \left(\frac{3}{5}mn\right)^2 =$$
$$= \frac{25}{36}m^4n^6 + m^3n^4 + \frac{9}{25}m^2n^2.$$

Геометрично формулу квадрата суми двох чисел можна зобразити, як показано на рис. 17.

Квадрат суми кількох доданків можна визначити за формулою

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n.$$

Квадрат многочлена дорівнює сумі квадратів усіх його членів, доданій до суми найрізноманітніших подвоєних добутків його членів, взятих по два.

Приклад. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ (рис. 18).

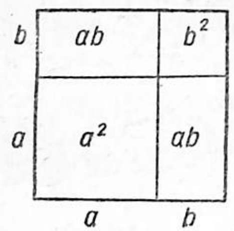


Рис. 17.

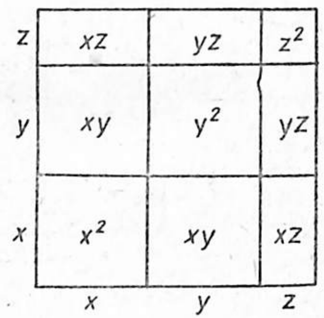


Рис. 18.

3. Квадрат різниці. *Квадрат різниці двох чисел дорівнює квадрату першого числа, мінус подвоєний добуток першого числа на друге, плюс квадрат другого числа:*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклади. $(x^2 - 3a)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(3a) + (3a)^2 = x^4 - 6x^2a + 9a^2$;

$$(1 - 0,5c)^2 = 1 - c + 0,25c^2.$$

4. Куб суми і різниці. *Куб суми двох чисел дорівнює кубу першого числа, плюс потроєний добуток квадрата першого на друге, плюс потроєний добуток першого на квадрат другого, плюс куб другого числа:*

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб різниці двох чисел дорівнює кубу першого числа, мінус потроєний добуток квадрата першого на друге, плюс потроєний добуток першого на квадрат другого, мінус куб другого числа:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Приклади. $(a^2 + 4b^3)^3 = (a^2)^3 + 3(a^2)^2 \cdot 4b^3 + 3a^2 \cdot (4b^3)^2 + (4b^3)^3 = a^6 + 12a^4b^3 + 48a^2b^6 + 64b^9$;

$(2a - 5b)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot 5b + 3 \cdot 2a(5b)^2 - (5b)^3 = 8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$.

5. Сума і різниця кубів. *Сума кубів двох чисел дорівнює добутку суми цих чисел на неповний квадрат їх різниці:*

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Примітка. *Неповним квадратом різниці* чисел a і b називається вираз $a^2 - ab + b^2$. Від повного квадрата різниці $a^2 - 2ab + b^2$ він відрізняється лише середнім коефіцієнтом. Вираз $a^2 + ab + b^2$ називається *неповним квадратом суми*.

Якщо наведену вище формулу прочитати справа наліво, одержимо: добуток суми двох чисел на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів цих чисел.

Різниця кубів двох чисел дорівнює добутку різниці цих чисел на неповний квадрат їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Цю формулу можна читати також справа наліво: добуток різниці двох чисел на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів цих чисел.

Приклади. $\frac{27}{512}x^3 + \frac{8}{729}y^9 = \left(\frac{3}{8}x\right)^3 + \left(\frac{2}{9}y^3\right)^3 = \left(\frac{3}{8}x + \frac{2}{9}y^3\right)\left(\frac{9}{64}x^2 - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{4}{81}y^6\right)$;

$\left(\frac{1}{3}m + \frac{3}{4}n\right) \cdot \left(\frac{1}{9}m^2 - \frac{1}{4}mn + \frac{9}{16}n^2\right) = \left(\frac{1}{3}m\right)^3 + \left(\frac{3}{4}n\right)^3 = \frac{1}{27}m^3 + \frac{27}{64}n^3$;

$\frac{8}{343}a^6 - \frac{27}{64}b^3 = \left(\frac{2}{7}a^2\right)^3 - \left(\frac{3}{4}b\right)^3 = \left(\frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{4}b\right) \times \left(\frac{4}{49}a^4 + \frac{3}{14}a^2b + \frac{9}{16}b^2\right)$;

$(0,8a^2 - 5b)(0,64a^4 + 4a^2b + 25b^2) = (0,8a^2)^3 - (5b)^3 = 0,512a^6 - 125b^3$.

6. Застосування формул скороченого множення. За допомогою формул скороченого множення можна порівняно швидко виконувати тотожні перетворення багатьох алгебраїчних виразів.

Приклад. Спростити $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)-(x^2+1)^3$.

Розв'язання (частинами):

$(x-1)(x+1)=x^2-1$;

$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1$;

$(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$;

$x^6-1-(x^6+3x^4+3x^2+1)=-3x^4-3x^2-2$.

Проте зручніше перетворення виконувати ланцюжком:

$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)-(x^2+1)^3=(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2+1)^3=(x^6-1)-(x^6+3x^4+3x^2+1)=-3x^4-3x^2-2$.

Формули скороченого множення застосовують і при діленні многочленів.

Приклади. $(49x^4-64y^2):(7x^2-8y)=[(7x^2)^2-(8y)^2]:(7x^2-8y)=7x^2+8y$;

$(16a^2-25b^6):(5b^3+4a)=[(4a)^2-(5b^3)^2]:(5b^3+4a)=4a-5b^3$;

$(a^3-8b^3):(a-2b)=[a^3-(2b)^3]:(a-2b)=a^2+2ab+4b^2$;

$(27x^3+8y^9):(3x+2y^3)=[(3x)^3+(2y^3)^3]:(3x+2y^3)=9x^2-6xy^3+4y^6$.

Формули скороченого множення використовують також для усних обчислень. Нехай, наприклад, треба обчислити $50,5^2-49,5^2$. В даному випадку підносити до квадратів недоцільно, краще скористатися формулою різниці квадратів:

$$50,5^2-49,5^2=(50,5+49,5)\cdot(50,5-49,5)=100\cdot1=100.$$

Ще приклад: $31\cdot29=(30+1)\cdot(30-1)=900-1=899$. Такі обчислення можна виконувати усно.

§ 7. Розкладання многочленів на множники

Розкласти многочлен на множники — значить подати його у вигляді добутку многочленів, тотожного даному многочлену.

Розглянемо найпростіші способи розкладання многочленів на множники.

1. Винесення за дужки спільного множника. Щоб розкласти многочлен на множники винесенням за дужки спільного множника, треба: а) визначити цей спільний множник; б) поділити на нього всі члени многочлена; в) записати добуток спільного множника на здобуту частку, взявши цю частку в дужки.

Приклади.

$2ax^3-4a^2x^2=2ax^2(x-2a)$;

$40m^2n-25mn^2+30mn=5mn(8m-5n+6)$;

$x(p-a)-y(p-a)-z(p-a)=(p-a)(x-y-z)$;

$a^2(x-1)-b(1-x)=a^2(x-1)+b(x-1)=(x-1)(a^2+b)$.

2. Спосіб групування. Покажемо цей спосіб на прикладі.

Приклад. Розкласти на множники $3a-3b+ax-bx$. Спільного множника всі члени даного многочлена не мають, але якщо згрупувати члени по два в тому порядку, як вони написані, вираз матиме такий вигляд:

$$(3a-3b)+(ax-bx).$$

Виносимо за дужки в першій групі спільний множник 3, а в другій x:

$$3(a-b)+x(a-b).$$

У цьому виразі спільним множником буде $a-b$. Його також можна винести за дужки. Отже,

$$3a-3b+ax-bx=(a-b)(3+x).$$

Примітка. Даний приклад можна розв'язати також іншим способом: $3a-3b+ax-bx=(3a+ax)-(3b+bx)=a(3+x)-b(3+x)=(3+x)(a-b)$.

У деяких випадках перед групуванням окремі члени многочлена слід подати у вигляді суми або різниці.

Приклади. $x^2+8x+12=x^2+6x+2x+12=x(x+6)+2(x+6)=(x+6)(x+2)$;

$x^2-2x-8=x^2-4x+2x-8=x(x-4)+2(x-4)=(x-4)(x+2)$;

$6x^2-x-1=6x^2-3x+2x-1=3x(2x-1)+(2x-1)=(2x-1)(3x+1)$.

3. Розкладання на множники за формулами скороченого множення. Цей спосіб полягає в застосуванні формул скороченого множення, які треба читати не тільки зліва направо, а й справа наліво:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3;$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3;$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Приклади. а) $(x+y)^2-(x-y)^2=(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot2y=4xy$;

б) $-6a-a^2-9=-(a^2+6a+9)=-(a+3)^2$;

в) $m^2+n^2-2mn=(m-n)^2$;

г) $125m^3-75m^2n+15mn^2-n^3=(5m-n)^3$;

д) $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$;

е) $125a^3-\frac{1}{64}b^6=\left(5a-\frac{1}{4}b^2\right)\left(25a^2+1\frac{1}{4}ab^2+\frac{1}{16}b^4\right)$.

4. Застосування різних способів розкладання на множники. При розкладанні многочленів на множники в кожному окремому випадку треба спочатку вивчити склад даного многочлена, а потім визначити, які способи розкладання слід використати. У більшості випадків доводиться застосовувати всі зазначені вище способи розкладання на множники в різній послідовності. Іноді використовують також штучні способи.

Приклади. а) $mp - np + m^2 - 2mn + n^2 = (mp - np) + (m^2 - 2mn + n^2) = p(m - n) + (m - n)^2 = (m - n)(p + m - n)$;

б) $1 - p^2 - 2pq - q^2 = 1 - (p^2 + 2pq + q^2) = 1 - (p + q)^2 = (1 + p + q)(1 - p - q)$;

в) $bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b) = b^2c + bc^2 + c^2a - ca^2 - ab(a + b) = (b^2c - ca^2) + (bc^2 + c^2a) - ab(a + b) = c(b^2 - a^2) + c^2(b + a) - ab(a + b) = c(a + b)(b - a) + c^2(a + b) - ab(a + b) = (a + b)[c(b - a) + c^2 - ab] = (a + b)(bc - ac + c^2 - ab) = (a + b)[(bc - ab) + (c^2 - ac)] = (a + b)[b(c - a) + c(c - a)] = (a + b)(c - a)(b + c)$;

г) $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x^3 - 1) + (5x^2 - 5) + (3x - 3) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x^2 - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 5(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1) = (x - 1)[x^2 + x + 1 + 5(x + 1) + 3] = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 5x + 5 + 3) = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2$.

§ 8. Алгебраїчні дроби

1. Дробові вирази і алгебраїчні дроби. Алгебраїчний вираз називається *дробовим*, якщо серед зазначених у ньому дій є ділення на буквений вираз.

Приклади дробових виразів:

$$\frac{3ax}{a+x},\quad 2a-\frac{1}{a^2},\quad \frac{a-\frac{1}{b}}{b-\frac{1}{a}},\quad \frac{1}{a+\frac{1}{b+c}}.$$

Найпростішими дробовими виразами вважаються вирази виду: $\frac{A}{B}$, де A і B — многочлени. Вони називаються *алгебраїчними дробами*. Многочлени A і B називаються відповідно *чисельником* і *знаменником* алгебраїчного дробу. Чисельник і знаменник називаються також *членами дробу*.

Приклади алгебраїчних дробів:

$$\frac{3ax+c}{x-0{,}5c^2},\quad \frac{2a}{a-1},\quad \frac{a^2+b-a}{2},\quad \frac{0{,}7}{4x}.$$

Примітка. Нагадаємо, що одночлен вважається окремим випадком многочлена (стор. 153). Зокрема, число 1 також можна розглядати як многочлен. Тому кожний цілий алгебраїчний вираз можна вважати алгебраїчним дробом із знаменником 1. Кожний звичайний дріб також можна розглядати як алгебраїчний дріб.

2. Основна властивість алгебраїчного дробу. Значення дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник помножити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулеві. Ця властивість за допомогою букв записується так:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

де a і b — члени дробу, а m — будь-яке ціле або дробове (додатне і від'ємне) число, відмінне від нуля.

З цієї властивості випливають такі положення.

Значення дробу не зміниться, якщо знаки чисельника і знаменника одночасно змінити на протилежні.

Наприклад. $\frac{-3x}{-4y}=\frac{-3x(-1)}{-4y(-1)}=\frac{3x}{4y}$;

$\frac{8a}{-13b^2}=\frac{8a(-1)}{-13b^2(-1)}=\frac{-8a}{13b^2}$.

Значення дробу не зміниться, якщо змінити знак у одного з членів дробу і перед самим дробом.

Приклади. $-\frac{a-b}{-c}=+\frac{a-b}{-c(-1)}=\frac{a-b}{c}$;

$\frac{a-1}{b-2}=-\frac{(a-1)(-1)}{b-2}=-\frac{1-a}{b-2}$.

3. Скорочення дробів. *Скоротити дріб* — це значить поділити чисельник і знаменник на їх спільний дільник.

Якщо чисельник і знаменник дробу одночлени, то спільні дільники можна знаходити усно і потім скорочувати.

Приклад. $\frac{24a^4b^2c}{40a^3b^2}=\frac{3ac}{5}$.

Якщо чисельник і знаменник дробу многочлени, їх треба спочатку розкласти на множники (якщо це можливо) і після цього виконати скорочення.

Приклади. $\frac{ac-bc+ad-bd}{ac+bc+ad+bd}=\frac{(ac-bc)+(ad-bd)}{(ac+bc)+(ad+bd)}=\frac{c(a-b)+d(a-b)}{c(a+b)+d(a+b)}=\frac{(a-b)(c+d)}{(a+b)(c+d)}=\frac{a-b}{a+b}$;

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3}=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2}{(a^3+b^3)+2ab\,(a+b)}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{(a+b)\,(a^2-ab+b^2)+2ab\,(a+b)}=\frac{(a^2+b^2-ab)\,(a^2+b^2+ab)}{(a+b)\,(a^2-ab+b^2+2ab)}=$$

$$=\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}.$$

4. Зведення дробів до спільного знаменника. Зведення алгебраїчних дробів до спільного знаменника виконується так само, як і в арифметиці.

Найпростішим спільним знаменником дробів з одночленними знаменниками є найменше спільне кратне коефіцієнтів знаменників*, помножене на всі різні букви, що містять знаменники, причому кожну букву треба брати з найбільшим показником, з яким вона є в знаменниках.

Так, наприклад, найпростіший спільний знаменник дробів $\frac{5x}{ab}$, $\frac{2y}{3a^2b}$ і $-\frac{1}{2a^2b^2}$ дорівнює $6a^2b^2$.

Додаткові множники: $6a^2b^2 : ab = 6ab$,
$6a^2b^2 : 3a^2b = 2b$,
$6a^2b^2 : 2a^2b^2 = 3$.

Звідси маємо: $\frac{5x}{ab}=\frac{5x\cdot 6ab}{ab\cdot 6ab}=\frac{30xab}{6a^2b^2}$;

$$\frac{2y}{3a^2b}=\frac{2y\cdot 2b}{3a^2b\cdot 2b}=\frac{4yb}{6a^2b^2};$$

$$-\frac{1}{2a^2b^2}=-\frac{1\cdot 3}{2a^2b^2\cdot 3}=-\frac{3}{6a^2b^2}.$$

Щоб обчислити найпростіший спільний знаменник дробів з многочленними знаменниками, треба спочатку ці знаменники розкласти на множники.

П р и к л а д. Звести до спільного знаменника алгебраїчні дроби: $\frac{m+n}{2m-2n}$; $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Розв'язання. $2m-2n=2\,(m-n)$;
$m^2-n^2=(m-n)\,(m+n)$.

* Якщо вони — натуральні числа.

Отже,

$$\frac{m+n}{2m-2n}=\frac{(m+n)\,(m+n)}{(2m-2n)\,(m+n)}=\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2};$$

$$\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}=\frac{(m^2+n^2)\cdot 2}{(m^2-n^2)\cdot 2}=\frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}.$$

Відповідь. $\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$; $\frac{2m^2+2n^2}{2m^2-2n^2}$.

П р и м і т к а. Якщо не обов'язково, щоб спільний знаменник був найпростішим, можна многочлени не розкладати на множники, а взяти спільним знаменником добуток знаменників даних дробів.

§ 9. Дії над алгебраїчними дробами

1. Додавання і віднімання. *Щоб додати (відняти) алгебраїчні дроби з однаковими знаменниками, треба додати (відняти) їх чисельники і результат поділити на їх спільний знаменник.*

П р и к л а д. Додати $\frac{a}{2x^2}$, $\frac{1}{2x^2}$; $\frac{a-5}{2x^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{a}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{a-5}{2x^2}=\frac{a+1+a-5}{2x^2}=\frac{2a-4}{2x^2}=\frac{a-2}{x^2}.$$

П р и к л а д. Спростити вираз $\frac{x+1}{a-b}-\frac{x+2}{b-a}-\frac{x-1}{a-b}$.

Розв'язання.

$$\frac{x+1}{a-b}-\frac{x+2}{b-a}-\frac{x-1}{a-b}=\frac{x+1}{a-b}+\frac{x+2}{a-b}-\frac{x-1}{a-b}=$$

$$=\frac{x+1+x+2-x+1}{a-b}=\frac{x+4}{a-b}.$$

Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника, додати (відняти) чисельники і результат поділити на їх спільний знаменник.

П р и к л а д. Спростити вираз:

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}.$$

Розв'язання. Розкладемо знаменники на множники:

$$a^2+2a+1=(a+1)^2,$$
$$a^2-2a+1=(a-1)^2,$$
$$a^2-1=(a-1)(a+1).$$

Спільний знаменник дорівнює $(a+1)^2(a-1)^2$. Отже,

$$\frac{a-1}{a^2+2a+1}-\frac{a+1}{a^2-2a+1}-\frac{1}{a^2-1}=\frac{(a-1)(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-$$
$$-\frac{(a+1)(a+1)^2}{(a+1)^2(a-1)^2}-\frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a-1)^2}=\frac{(a-1)^3-(a+1)^3-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{(a^3-3a^2+3a-1)-(a^3+3a^2+3a+1)-(a^2-1)}{(a^2-1)^2}=$$
$$=\frac{a^3-3a^2+3a-1-a^3-3a^2-3a-1-a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{-7a^2-1}{(a^2-1)^2}.$$

Оскільки кожний цілий алгебраїчний вираз можна розглядати як алгебраїчний дріб із знаменником 1, використовуючи викладені вище правила, можна додавати і віднімати також алгебраїчні дроби і цілі вирази.

Приклад.

$$a-b+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a-b}{1}+\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}.$$

2. Множення і ділення дробів. *Щоб перемножити дроби, треба перемножити окремо їх чисельники і знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником.*

Щоб поділити дріб на дріб, треба ділене помножити на дріб, обернений дільникові.

Приклади.

$$\frac{3p^2mq}{2a^2b^2}\cdot\frac{3abc}{8pq}=\frac{3p^2mq\cdot 3abc}{2a^2b^2\cdot 8pq}=\frac{9pmc}{16ab};$$
$$\frac{8b^2cd}{9a^5}:\frac{7cd}{12a^3}=\frac{8b^2cd}{9a^5}\cdot\frac{12a^3}{7cd}=\frac{8b^2cd\cdot 12a^3}{9a^5\cdot 7cd}=\frac{32b^2}{21a^2}.$$

При множенні і діленні дробів з многочленними чисельниками і знаменниками їх чисельники і знаменники розкладають на множники і скорочують, якщо це можливо.

Приклади.

$$\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\frac{x-y}{x^2+2xy}=\frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x-y)}\cdot\frac{x-y}{x(x+2y)}=$$
$$=\frac{(x+2y)(x-2y)(x-y)}{x(x-y)x(x+2y)}=\frac{x-2y}{x^2};$$
$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}:\frac{4a-4b}{3a+3b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}:\frac{4(a-b)}{3(a+b)}=$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)\cdot 3(a+b)}{(a+b)^2\cdot 4(a-b)}=\frac{3}{4}.$$

Користуючись правилом множення алгебраїчних дробів, можна також множити алгебраїчний дріб на цілий вираз і навпаки, оскільки цілий вираз можна розглядати як алгебраїчний дріб із знаменником 1.

Приклади.

$$\frac{a}{x-c}\cdot 2x=\frac{a}{x-c}\cdot\frac{2x}{1}=\frac{a\cdot 2x}{(x-c)\cdot 1}=\frac{2ax}{x-c};$$
$$\frac{1}{x^2-1}\cdot(x^4-1)=\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{x^4-1}{1}=\frac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1.$$

3. Піднесення до степеня. *Щоб піднести алгебраїчний дріб до будь-якого степеня, треба піднести до цього степеня окремо чисельник і знаменник і перший результат поділити на другий.*

Приклади. $\left(\frac{a}{3x^2}\right)^4=\frac{a^4}{(3x^2)^4}=\frac{a^4}{81x^8}$;

$$\left(\frac{a-1}{a+c}\right)^3=\frac{(a-1)^3}{(a+c)^3}.$$

4. Вправи на всі дії. Якщо треба виконати кілька дій над даними алгебраїчними дробами або спростити громіздкий вираз з алгебраїчними дробами, можна виконувати перетворення двома способами: *частинами* і *ланцюжком.*

Приклад. Спростити вираз

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right).$$

Розв'язання першим способом:

1) $$\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{a^2+ab+ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=$$
$$=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{a+b}{a^2+b^2};$$

$$(a^3+a^2b)+(ab^2+b^3)=$$
$$=a^2(a+b)+b^2(a+b)=$$
$$=(a+b)(a^2+b^2).$$

2) $$\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}=$$
$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=$$
$$=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a^2+b^2)}=\frac{a-b}{a^2+b^2};$$

$$(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)=$$
$$=a^2(a-b)+b^2(a-b)=$$
$$=(a-b)(a^2+b^2).$$

3) $$\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a-b}{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Розв'язання другим способом:

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)=$$
$$=\left[\frac{a(a+b)}{a^2(a+b)+b^2(a+b)}+\frac{b}{a^2+b^2}\right]:\left[\frac{1}{a-b}-\right.$$
$$\left.-\frac{2ab}{a^2(a-b)+b^2(a-b)}\right]=\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left[\frac{1}{a-b}-\right.$$
$$\left.-\frac{2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}\right]=\frac{a+b}{a^2+b^2}:\frac{a^2+b^2-2ab}{(a-b)(a^2+b^2)}=$$
$$=\frac{(a+b)\cdot(a-b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)\cdot(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

§ 10. Квадратні корені

1. Означення. *Квадратним коренем* із числа a називається число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, квадратний корінь з 9 дорівнює 3, бо $3^2=9$. Проте -3 також є квадратним коренем з 9, оскільки $(-3)^2=9$. Квадратний корінь з 9 має два значення: 3 і -3.

Додатне значення квадратного кореня називається також *арифметичним значенням*. Арифметичне значення квадратного кореня з числа a позначається символом $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ називається *знаком квадратного кореня* або *радикалом*. Число або вираз a, який стоїть під радикалом, називається *підкореневим числом* або *виразом*.

Підкореневе число може бути не тільки цілим, а й дробовим. Наприклад, $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$; $\sqrt{6{,}25}=2{,}5$.

Квадратний корінь з 0 має лише одне значення: 0.

Квадратний корінь з від'ємного числа взагалі не існує: немає раціонального числа, квадрат якого від'ємний.

2. Добування квадратних коренів. Обчислення квадратних коренів називається також *добуванням* квадратних коренів. Дія добування квадратного кореня обернена дії піднесення до квадрата: якщо із додатного числа a добути квадратний корінь і результат піднести до квадрата, дістанемо те саме число a, тобто

$$(\sqrt{a})^2=a.$$

З невеликих чисел, що являють собою *точні квадрати* натуральних чисел, наприклад 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, квадратні корені можна добувати усно.

Щоб добути квадратний корінь із багатоцифрового цілого числа, розбивають його справа наліво на грані по дві цифри в кожній (в крайній лівій грані може бути і одна цифра).

Записують так:

$$\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{27'\,98'\,41}=529} \\
 & -25 \\
\hline
102 & 2\,98 \\
2 & 2\,04 \\
\hline
1049 & 9441 \\
9 & 9441 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Щоб знайти першу цифру кореня (5), добувають квадратний корінь із найбільшого точного квадрата, що міститься в першій зліва грані (27). Потім віднімають від першої грані квадрат першої цифри кореня (25) і до різниці дописують (зносять) другу грань (98). Зліва від здобутого числа (298) пишуть подвоєну першу цифру кореня (10), ділять на неї число всіх десятків раніше здобутого числа ($29 : 10 \approx 2$), випробовують частку ($102 \cdot 2 = 204$ не повинно перебільшувати 298), після чого записують її (2) після першої цифри кореня і т. д.

П р и м і т к а. Поширена також інша форма запису, наприклад

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{5'\,79'\,36'\,49} = 2407} \\
-4 & \\
\hline
-179 & 44 \\
176 & 4 \\
\hline
-33649 & 4807 \\
33649 & 7 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Перевірка. $2407^2 = 5793649$.

Аналогічно добувають квадратні корені з десяткових дробів. Тільки підкореневе число треба розбивати на грані так, щоб кома була між гранями.

П р и к л а д. $\sqrt{0,'\,00'\,95'\,64'\,84'} = 0{,}0978$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -81 \\
\hline
187 & 14\ 64 \\
7 & 13\ 09 \\
\hline
1948 & 1\ 55\ 84 \\
8 & 1\ 55\ 84 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

П р и м і т к а. Якщо десятковий дріб має непарне число десяткових знаків, з нього точно квадратний корінь не добувається.

3. **Наближені значення квадратних коренів.** Якщо підкореневе число наближене, квадратний корінь з нього також буде наближеним числом. Квадратні корені з наближених чисел можна добувати так само, як і з точних, але враховуючи таке правило підрахунку цифр.

При добуванні квадратного кореня з наближених чисел в результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх містить підкореневе число. Щоб правильно визначити останню значущу цифру, треба знайти у результаті на одну значущу цифру більше, ніж у підкореневому числі, а потім результат округлити за правилом округлення, відкидаючи цю запасну цифру.

П р и к л а д. Добути квадратний корінь з наближеного числа 2,37.

Розв'язання.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{2{,}37} = 1{,}53} \\
-1 & \\
\hline
25 & 137 \\
5 & 125 \\
\hline
303 & 1200 \\
3 & 909 \\
\hline
3069 & 29100 \\
9 & 27621 \\
\hline
 & 1479
\end{array}
$$

Відповідь. $\sqrt{2{,}37} \approx 1{,}54$ (з надлишком).

Проте наближені значення квадратних коренів дістають не тільки в результаті добування квадратних коренів з наближених чисел, а й також з точних. Нехай, наприклад, потрібно добути квадратний корінь з точного числа 2. Маємо:

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{2} = 1{,}414\ldots} \\
-1 & \\
\hline
24 & 100 \\
4 & 96 \\
\hline
281 & 400 \\
1 & 281 \\
\hline
2824 & 11\,900 \\
4 & 11\,296 \\
\hline
\end{array}
$$

Цей процес можна продовжувати без кінця. Тому $\sqrt{2}$ у вигляді десяткового дробу можна обчислити лише наближено (з будь-якою точністю).

§ 11. Ірраціональні числа

1. Поняття про ірраціональне число. Якщо продовжувати добувати квадратний корінь з 2, дістанемо *нескінченний неперіодичний* десятковий дріб*.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots\ .$$

* Можна довести, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. З цього випливає, що $\sqrt{2}$ не дорівнює ні скінченному десятковому дробу, ні нескінченному періодичному десятковому дробу.

Це — не раціональне число, бо кожне раціональне число дорівнює або скінченному, або нескінченному періодичному десятковому дробу (стор. 98). Цей приклад приводить до такого висновку. Або ми не повинні вважати $\sqrt{2}$ числом, або повинні розширити вже відому нам множину раціональних чисел, додавши до них нові, не раціональні числа, які являють собою нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Але якщо не вважати $\sqrt{2}$ числом, тоді ми не зможемо, наприклад, виразити числами довжини багатьох відрізків. Вийшло б, що діагональ квадрата із стороною 1 *см* не має довжини. А насправді, якщо сторона квадрата $ABCD$ (рис. 19) дорівнює 1 *см*, то його площа дорівнює 1 *кв. см*, а площа квадрата $ACKL$ дорівнює 2 *кв. см* (порівняйте, скільки рівних трикутників міститься в кожному квадраті).

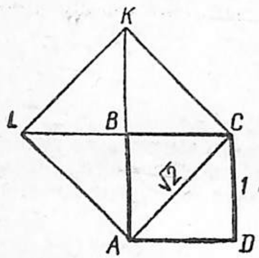


Рис. 19.

Отже, довжина сторони AC повинна виражатися числом, квадрат якого дорівнює 2. А серед раціональних чисел такого числа немає. Ось чому умовилися вважати числами і $\sqrt{2}$ і всі нескінченні неперіодичні десяткові дроби, які дістали назву *ірраціональних чисел*.

Ірраціональним називається кожне число, яке можна виразити нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

Ірраціональні числа бувають і додатні, і від'ємні.

Приклади ірраціональних чисел:

$$\sqrt{2}=1,4142\ldots,\quad \sqrt{10}=3,162\ldots,\quad -0,5050050005\ldots,$$
$$\pi=3,14159\ldots,\quad \lg 2=0,3010\ldots,\quad \cos 10^\circ=0,9848\ldots \text{ та ін.}$$

Раціональні та ірраціональні числа разом називаються *дійсними числами*.

Існування відрізків, довжину яких не можна виразити раціональним числом, виявили ще в стародавній Греції (Піфагор та Евклід). Проте вони не ввели ірраціональних чисел. Піфагор і Евклід вважали, що довжина таких відрізків не може бути виражена числом, так як розглядали лише раціональні числа.

Вперше поняття про ірраціональне число ввели вчені ближнього і середнього Сходу.

На початку XIII ст. ірраціональні числа з'являються і в працях західноєвропейських вчених, насамперед у Леонардо Пізанського. Проте вони розглядалися лише з точки зору геометрії, як нерівноправні числа. Цю думку поділяла більшість математиків до XVII ст. Проте розвиток математики в XVII ст. і ознайомлення з новими фактами примусили замислитися над самим поняттям ірраціонального числа. На початок

XVIII ст. більшість математиків вважала, що ірраціональне число є корінь деякого степеня з цілого або дробового числа, який не може бути виражений точно. Дещо інакше розглядав ірраціональні числа Ньютон, який виходив з відношення деякого числа до числа, взятого за одиницю; при неспільномірності обох чисел перше з них і дістало назву ірраціонального.

2. Порівняння дійсних чисел. *З двох додатних дійсних чисел більше те, у якого ціла частина більша. Якщо цілі частини рівні між собою, більшим вважається те число, у якого перший з нерівних десяткових знаків більший, а всі попередні однакові. З двох від'ємних дійсних чисел*

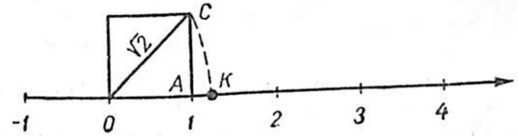


Рис. 20.

більше те, у якого абсолютна величина менша. Кожне від'ємне число менше від нуля і будь-якого додатного числа.

П р и к л а д и. $1,4142\ldots > 1,4139\ldots$

$$-1,4152\ldots < -1,4139\ldots$$
$$-0,0674\ldots < 0,00176\ldots$$
$$9,8691\ldots < 9,87.$$

Рівними вважаються дійсні числа, зображені одним і тим самим десятковим дробом.

3. Геометричне зображення дійсних чисел. Дійсні числа, як і раціональні, можна зобразити на числовій осі точками. Нехай дано числову вісь (рис. 20) з початковою (нульовою) точкою O і одиничним відрізком
OA. Зобразимо на цій осі точку, що відповідає ірраціональному числу $\sqrt{2}$.
Для цього побудуємо на відрізку OA квадрат, діагональ якого $OC=\sqrt{2}$.
Якщо розхилом циркуля OC, як показано на рисунку, зробити засічку
на осі, то точка перетину дуги з віссю K і буде відповідати числу $\sqrt{2}$.

Кожному дійсному числу на числовій осі відповідає єдина точка.
Навпаки, кожній точці на числовій осі відповідає єдине дійсне число.
Кажуть, що між усіма точками числової осі і всіма дійсними числами
існує *взаємно однозначна відповідність*.

П р и м і т к а. Між точками числової осі і всіма раціональними числами не існує взаємно однозначної відповідності, бо не кожній точці осі відповідає раціональне число.

4. Наближення ірраціональних чисел раціональними. Нехай ірраціональне число α виражається таким нескінченним неперіодичним десятковим дробом:

$$\alpha = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \dots + \frac{p_n}{10^n} + \dots$$

Тоді скінченні дроби

$$p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \dots + \frac{p_n}{10^n} \quad \text{і} \quad p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100} + \dots + \frac{p_n + 1}{10^n},$$

між якими знаходиться число α, називаються його десятковими наближеними значеннями з недостачею і з надлишком з точністю до $\frac{1}{10^n}$.

Щоб дістати десяткове наближене значення з недостачею даного дійсного числа з точністю до $\frac{1}{10^n}$, треба в десятковому дробі, що зображає це число, зберегти n перших десяткових знаків і відкинути всі наступні. Збільшивши на 1 останній десятковий знак наближеного значення з недостачею, дістанемо наближене значення з надлишком з точністю до $\frac{1}{10^n}$.

Приклад. Розглянемо число 3,5781... . Його наближені значення будуть:

З недостачею	З надлишком	З точністю
3	4	1
3,5	3,6	0,1
3,57	3,58	0,01
3,578	3,579	0,001

§ 12. Дії над дійсними числами

1. Позначення. Якщо α дане дійсне число, то його десяткові наближені значення з недостачею з точністю до 1; 0,1; 0,01 і т. д. до $\frac{1}{10^n}$ ... позначатимемо відповідно символами $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n, \dots$, а наближені значення з надлишком — символами $\overset{+}{\alpha}_0, \overset{+}{\alpha}_1, \overset{+}{\alpha}_2, \dots, \overset{+}{\alpha}_n, \dots$.

Нехай, наприклад, $\alpha = 3{,}1471\dots$.

Тоді $\overline{\alpha}_0 = 3$; $\overline{\alpha}_1 = 3{,}1$; $\overline{\alpha}_2 = 3{,}14$; $\overline{\alpha}_3 = 3{,}147$; ... .

$\overset{+}{\alpha}_0 = 4$; $\overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}2$; $\overset{+}{\alpha}_2 = 3{,}15$; $\overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}148$; ... .

2. Додавання. *Сумою двох додатних дійсних чисел називається дійсне число, більше від суми будь-яких наближених значень доданків з недостачею, але менше від суми будь-яких наближених значень доданків з надлишком.*

Приклад. Допустимо, що $\alpha = 3{,}3121\dots$ і $\beta = 2{,}5483\dots$, додаємо наближені значення з недостачею:

$$\begin{array}{lll}
\overline{\alpha}_0 = 3 & \overline{\beta}_0 = 2 & \overline{\alpha}_0 + \overline{\beta}_0 = 5 \\
\overline{\alpha}_1 = 3{,}3 & \overline{\beta}_1 = 2{,}5 & \overline{\alpha}_1 + \overline{\beta}_1 = 5{,}8 \\
\overline{\alpha}_2 = 3{,}31 & \overline{\beta}_2 = 2{,}54 & \overline{\alpha}_2 + \overline{\beta}_2 = 5{,}85 \\
\overline{\alpha}_3 = 3{,}312 & \overline{\beta}_3 = 2{,}548 & \overline{\alpha}_3 + \overline{\beta}_3 = 5{,}860 \\
\overline{\alpha}_4 = 3{,}3121 & \overline{\beta}_4 = 2{,}5483 & \overline{\alpha}_4 + \overline{\beta}_4 = 5{,}8604
\end{array}$$

Додаємо наближені значення з надлишком:

$$\begin{array}{lll}
\overset{+}{\alpha}_0 = 4 & \overset{+}{\beta}_0 = 3 & \overset{+}{\alpha}_0 + \overset{+}{\beta}_0 = 7 \\
\overset{+}{\alpha}_1 = 3{,}4 & \overset{+}{\beta}_1 = 2{,}6 & \overset{+}{\alpha}_1 + \overset{+}{\beta}_1 = 6{,}0 \\
\overset{+}{\alpha}_2 = 3{,}32 & \overset{+}{\beta}_2 = 2{,}55 & \overset{+}{\alpha}_2 + \overset{+}{\beta}_2 = 5{,}87 \\
\overset{+}{\alpha}_3 = 3{,}313 & \overset{+}{\beta}_3 = 2{,}549 & \overset{+}{\alpha}_3 + \overset{+}{\beta}_3 = 5{,}862 \\
\overset{+}{\alpha}_4 = 3{,}3122 & \overset{+}{\beta}_4 = 2{,}5484 & \overset{+}{\alpha}_4 + \overset{+}{\beta}_4 = 5{,}8606
\end{array}$$

Так послідовно визначають десяткові знаки суми

$$\alpha + \beta = 5{,}860\dots .$$

Примітка. Якщо будь-який доданок раціональний і виражається скінченним десятковим дробом або навіть є цілим числом, його також можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу, приписавши як десяткові знаки безліч нулів, наприклад:

$$2{,}3 = 2{,}3000\dots;\ 7 = 7{,}000\dots .$$

Тоді суму раціонального й ірраціонального чисел можна також визначити викладеним вище способом.

Аналогічно можна визначити і суму двох від'ємних дійсних чисел, і від'ємного з додатним.

Взагалі додавання двох дійсних чисел завжди можливе і однозначне.

3. Множення. *Добутком двох додатних дійсних чисел* α *і* β *називається дійсне число, яке більше від добутку будь-яких наближених значень співмножників з недостачею, але менше від добутку будь-яких наближених значень співмножників з надлишком.*

П р и к л а д. Припустимо $\alpha = 1,7320\ldots$; $\beta = 1,4142\ldots$, тоді дістанемо

$\overline{\alpha}_0 = 1$	$\overline{\beta}_0 = 1$	$\overline{\alpha}_0\overline{\beta}_0 = 1$
$\overline{\alpha}_1 = 1,7$	$\overline{\beta}_1 = 1,4$	$\overline{\alpha}_1\overline{\beta}_1 = 2,38$
$\overline{\alpha}_2 = 1,73$	$\overline{\beta}_2 = 1,41$	$\overline{\alpha}_2\overline{\beta}_2 = 2,4393$
$\overline{\alpha}_3 = 1,732$	$\overline{\beta}_3 = 1,414$	$\overline{\alpha}_3\overline{\beta}_3 = 2,449048$
$\overline{\alpha}_4 = 1,7320$	$\overline{\beta}_4 = 1,4142$	$\overline{\alpha}_4\overline{\beta}_4 = 2,44939440$
$\overset{+}{\alpha}_0 = 2$	$\overset{+}{\beta}_0 = 2$	$\overset{+}{\alpha}_0\overset{+}{\beta}_0 = 4$
$\overset{+}{\alpha}_1 = 1,8$	$\overset{+}{\beta}_1 = 1,5$	$\overset{+}{\alpha}_1\overset{+}{\beta}_1 = 2,70$
$\overset{+}{\alpha}_2 = 1,74$	$\overset{+}{\beta}_2 = 1,42$	$\overset{+}{\alpha}_2\overset{+}{\beta}_2 = 2,4708$
$\overset{+}{\alpha}_3 = 1,733$	$\overset{+}{\beta}_3 = 1,415$	$\overset{+}{\alpha}_3\overset{+}{\beta}_3 = 2,452195$
$\overset{+}{\alpha}_4 = 1,7321$	$\overset{+}{\beta}_4 = 1,4143$	$\overset{+}{\alpha}_4\overset{+}{\beta}_4 = 2,44970903$

Так послідовно визначають десяткові знаки добутку

$$\alpha\beta = 2,449\ldots .$$

Множення від'ємних дійсних чисел виконують згідно з правилами, наведеними для раціональних чисел: добуток двох від'ємних чисел вважається додатним, а від'ємного і додатного — від'ємним.

Дії віднімання, ділення і піднесення до степеня дійсних чисел визначаються так само, як і для раціональних чисел.

§ 13. Ірраціональні вирази

1. Корінь m-го степеня. У математиці розглядаються корені другого, третього, четвертого, п'ятого і взагалі m-го степеня.

Нехай m — довільне натуральне число більше 1, а a — будь-яке дійсне число. Коренем m-го степеня з a називається таке число, m-й степінь якого дорівнює a.

П р и к л а д и. Корінь 3-го степеня з 64 дорівнює 4, бо $4^3 = 64$; корінь 5-го степеня з -32 дорівнює -2, бо $(-2)^5 = -32$; корінь 4-го степеня з 81 має (у множині дійсних чисел) два значення: 3 і -3, бо $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

Корінь m-го степеня з числа a позначають символом $\sqrt[m]{a}$. Проте, якщо корінь має парний степінь, наприклад 2-й, 4-й і т. д., цим символом позначають лише невід'ємне значення кореня, наприклад $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{0,000001} = 0,1$. Їх називають арифметичними значеннями коренів, або *арифметичними коренями.*

Отже, $\sqrt[m]{a}$ лише при від'ємному a і непарному m має від'ємне значення. При додатному a $\sqrt[m]{a}$ завжди додатний. Якщо $a < 0$, а m парне, то $\sqrt[m]{a}$ (у множині дійсних чисел) не існує.

П р и м і т к а. Знак радикала вперше ввели німецькі алгебраїсти в XV ст. У 1525 р. математик Христоф Рудольф фон Яуер видав першу працю з алгебри німецькою мовою. Знак кореня він вживав у формі $\surd$. Горизонтальну риску над підрадикальним виразом ввів французький геометр Рене Декарт (1637 р.), а показник кореня над радикалом — голландський математик Альберт Жирар (1629 р.).

2. Ірраціональні вирази. Раніше ми розглядали раціональні алгебраїчні вирази, які містили лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником. Далі будуть розглядатися і такі вирази, які, крім цих п'яти дій, містять також і дії добування кореня m-го степеня. Такі алгебраїчні вирази називаються *ірраціональними.*

П р и к л а д и ірраціональних виразів:

$$\sqrt{2,5a};\quad c^2d\sqrt[5]{m-n};\quad \frac{a}{\sqrt[3]{c}} + \sqrt{3};\quad 5\sqrt{2};\quad \sqrt[3]{3}.$$

Ірраціональні вирази виду $a\sqrt{b}$ називаються також *радикалами.*

3. Тотожні перетворення ірраціональних виразів. Означення тотожних ірраціональних виразів і тотожнього перетворення залишаються такими самими, як і для раціональних виразів (див. стор. 154).

Далі розглянемо найважливіші тотожні перетворення ірраціональних виразів.

4. Основна властивість радикала. *Величина радикала не зміниться, якщо показник кореня і показник підкореневого виразу помножити на одне й те саме число,* тобто

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

З цієї властивості випливають наслідки:

1) *Радикали різних степенів можна звести до однакових показників.* Для цього досить знати спільне кратне (краще всього — найменше) показників усіх радикалів і помножити показник кожного з них на

відповідний додатковий множник, піднісши разом з тим кожний підкореневий вираз до належного степеня.

Приклади. Звести до однакового показника радикали:

а) $\sqrt{ax}$, $\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$;

в) $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, $\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}$, $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$.

Розв'язання. а) Найменше спільне кратне показників радикалів 6; додаткові множники: для першого радикала 3, для другого 2. Тоді:

$$\sqrt{ax}=\sqrt[6]{(ax)^3}=\sqrt[6]{a^3x^3};\quad \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{(a^2)^2}=\sqrt[6]{a^4}.$$

б) Найменше спільне кратне показників радикалів 30; додаткові множники відповідно будуть: 15, 6, 10. Тоді

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt[30]{\left(\frac{x}{y}\right)^{15}}=\sqrt[30]{\frac{x^{15}}{y^{15}}};\quad \sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}}=\sqrt[30]{\left(\frac{y^3}{z^2}\right)^6}=\sqrt[30]{\frac{y^{18}}{z^{12}}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}=\sqrt[30]{\left(\frac{a^2}{b}\right)^{10}}=\sqrt[30]{\frac{a^{20}}{b^{10}}}.$$

в) Найменше спільне кратне показників радикалів $4n$; додаткові множники відповідно будуть: n, 2 і 4. Тоді

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}=\sqrt[4n]{\frac{(x-1)^n}{(x+1)^n}};$$

$$\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}=\sqrt[4n]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}};$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\sqrt[4n]{\left(\frac{x}{y}\right)^4}=\sqrt[4n]{\frac{x^4}{y^4}}.$$

2) *Якщо підкореневий вираз є степінь, показник якого має спільний множник з показником радикала, то на цей множник можна поділити обидва показники*, тобто

$$\sqrt[mn]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^p}.$$

Примітка. Ця теорема вимагає додаткової умови: $\sqrt[n]{a^p}$ повинен існувати, інакше теорема може бути неправильною. Наприклад, замість $\sqrt[8]{(-2)^6}$ не можна писати $\sqrt[4]{(-2)^3}$, оскільки останній корінь в області дійсних чисел не існує. Завжди правильною буде така рівність:

$$\sqrt[mn]{|a^{mp}|}=\sqrt[n]{|a|^p}.$$

Зокрема,

$$\sqrt[m]{|a^{mp}|}=|a^p|;$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & \text{якщо } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

Приклади.

$$\sqrt[6]{x^9}=\sqrt{x^3};$$

$$\sqrt[4]{0{,}04}=\sqrt[4]{(0{,}2)^2}=\sqrt{0{,}2};$$

$$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3;$$

$$\sqrt[8]{(1-\sqrt{2})^6}=\sqrt[4]{|1-\sqrt{2}|^3}=\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^3}.$$

3) *Якщо підкореневий вираз є добуток кількох степенів, показники яких мають спільний множник з показником радикала, то на цей множник можна поділити усі показники.*

Приклад 1. Скоротити показники коренів і підкореневих виразів:

а) $\sqrt[6]{b^4c^8}$; б) $\sqrt[6]{8x^3y^3}$.

Розв'язання.

а) $\sqrt[6]{b^4c^8}=\sqrt[3]{b^2c^4}$; б) $\sqrt[6]{8x^3y^3}=\sqrt[6]{2^3x^3y^3}=\sqrt{2xy}$.

Приклад 2. Скоротити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу при заданих умовах:

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} \text{ при } x<1;\quad \sqrt[8]{(3-x)^4} \text{ при } x>3.$$

Розв'язання. Використаємо формулу

$$\sqrt[2mk]{a^{2m}}=\sqrt[2mk]{|a|^{2m}}=\sqrt[k]{|a|}=\begin{cases}\sqrt[k]{a}, & \text{якщо } a>0\\ \sqrt[k]{-a}, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

Тоді дістанемо

$$\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt[4]{|x-1|^2} = \sqrt{|x-1|} = \sqrt{-(x-1)} =$$
$$= \sqrt{-x+1} \quad (x < 1);$$
$$\sqrt[8]{(3-x)^4} = \sqrt[8]{|3-x|^4} = \sqrt{|3-x|} = \sqrt{-(3-x)} =$$
$$= \sqrt{-3+x} \quad (x > 3).$$

5. Основні теореми про радикали. *Корінь з добутку декількох чисел дорівнює добутку коренів того самого степеня з кожного числа, якщо корінь з кожного числа існує*, тобто

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Щоб добути корінь з дробу, треба добути його з чисельника і знаменника, якщо ці корені існують, і перший результат поділити на другий, тобто

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Примітка. При парних n і від'ємних a та b корені $\sqrt[n]{ab}$ і $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ існують, а $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[n]{b}$ не існують. У цих випадках наведені вище рівності невірні. Проте завжди вірні рівності:

$$\sqrt[n]{|ab|} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|} \quad \text{і} \quad \sqrt[n]{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Щоб добути корінь з степеня, показник якого ділиться на показник кореня, треба поділити показник степеня на показник кореня, тобто

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m.$$

Примітка. При a від'ємному, n парному і m непарному наведена вище рівність невірна. Проте завжди справедлива рівність

$$\sqrt[n]{|a^{mn}|} = |a^m|.$$

Користуючись цими теоремами, можна добувати корені з різних алгебраїчних виразів.

Приклади. Добути корені *:

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64} a^6c^9}$; в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{16}{81} a^{8n}x^{16}}$.

Розв'язання.

а) $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 10^5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{10^5} = 2 \cdot 10 = 20;$

б) $\sqrt[3]{\frac{125}{64} a^6c^9} = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} \cdot \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{c^9} = \frac{5}{4} a^2c^3;$

в) $\sqrt{\frac{9a^4b^2}{(a-b)^4}} = \frac{\sqrt{9a^4b^2}}{\sqrt{(a-b)^4}} = \frac{3a^2b}{(a-b)^2};$

г) $\sqrt[4]{\frac{16}{81} a^{8n}x^{16}} = \frac{2}{3} a^{2n}x^4.$

6. Винесення множників за знак радикала. *Якщо підкореневий вираз розкладається на такі множники, що з деяких можна добути точний корінь, то такі множники, після добування з них кореня, можна написати перед знаком кореня* (тобто можна винести за знак кореня).

Це виконується за формулою

$$\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b} \quad (a > 0).$$

Приклади.

а) $\sqrt[3]{a^6c} = a^2\sqrt[3]{c};$

б) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = 10\sqrt{3};$

в) $\sqrt[n]{a^{2n}c^{n+1}} = \sqrt[n]{a^{2n} \cdot c^n \cdot c} = a^2c\sqrt[n]{c}.$

Примітка. При від'ємному a і парному n рівність $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}$ невірна, але при будь-яких значеннях a, b і n

$$\sqrt[n]{|a^nb|} = |a| \cdot \sqrt[n]{|b|}.$$

* І тут і в наступних прикладах на перетворення радикалів з парними показниками, в яких не наводяться додаткові умови, під буквами слід розуміти додатні числа.

Приклади. Винести множники за знак радикала, враховуючи допустимі значення букв або обмеження на них:

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2}$ при $a > 0, \quad b \geqslant 3$;

б) $\sqrt{a^3(3-a)^2}$ при $0 < a \leqslant 3$;

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}}$.

Розв'язання.

а) $\sqrt{a^5(b-3)^2} = a^2(b-3)\sqrt{a}$;

б) $\sqrt{a^3(a-3)^2} = a(3-a)\sqrt{a}$;

в) $\sqrt{\dfrac{3(x^2-2xy+y^2)}{4(x^2+2xy+y^2)}} = \sqrt{\dfrac{3(x-y)^2}{4(x+y)^2}} = \dfrac{|x-y|}{|x+y|} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Введення множників під знак радикала. *Щоб ввести під знак кореня множники, що стоять перед ним, досить піднести ці множники до степеня, показник якого дорівнює показникові кореня, а потім написати ці степені під знаком кореня.*

Це виконується за формулою

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (a > 0).$$

Приклади*.

а) $2xy\sqrt{\dfrac{3x}{2y}} = \sqrt{4x^2y^2 \cdot \dfrac{3x}{2y}} = \sqrt{\dfrac{12x^3y^2}{2y}} = \sqrt{6x^3y}$.

б) $\dfrac{x}{y^2}\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{x^4}{y^8} \cdot \dfrac{y}{x}} = \sqrt[4]{\dfrac{x^4y}{xy^8}} = \sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y^7}}$.

в) $(a-b)\sqrt{\dfrac{2}{a^2-b^2}} = \sqrt{(a-b)^2 \cdot \dfrac{2}{a^2-b^2}} = \sqrt{\dfrac{2(a-b)}{a+b}}$.

г) $x\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[3]{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \sqrt[3]{x^3+x}$.

д) Ввести множники під знак радикала при заданих значеннях букв:

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}} \text{ при } a > 2; \quad \frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}} \text{ при } 0 < x < y.$$

* У прикладах а) — г) всі множники перед радикалами вважаються додатними.

Розв'язання.

$$(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}} = -(a-2)\sqrt{\frac{2a}{a-2}} = -\sqrt{(a-2)^2 \cdot \frac{2a}{a-2}} =$$

$$= -\sqrt{2a(a-2)};$$

$$\frac{2}{x-y}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}} = -\frac{2}{y-x}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{2}} =$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{2}{y-x}\right)^2 \cdot \frac{y^2-x^2}{2}} = -\sqrt{\frac{2(x+y)}{y-x}}.$$

е) Не добуваючи коренів, визначити, яке з чисел більше:

$$2\sqrt{3} \text{ чи } 3\sqrt{2}; \quad 2\sqrt[3]{3} \text{ чи } \sqrt[3]{25}.$$

Розв'язання.

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}, \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}, \text{ оскільки}$$

$$\sqrt{18} > \sqrt{12}, \text{ то } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2};$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}, \text{ оскільки } \sqrt[3]{25} > \sqrt[3]{24},$$

$$\text{то } \sqrt[3]{25} > 2\sqrt[3]{3}.$$

8. Звільнення підкореневого виразу від дробу. Використовуючи два попередні перетворення радикалів, можна звільняти підкореневі вирази від дробу.

Приклади. Звільнити підкореневі вирази від дробу:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{2}{7}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{\frac{3}{8}}.$$

Розв'язання. а) Щоб можна було добути квадратний корінь із знаменника, помножимо обидва члени дробу на 7:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7}{7^2}} = \sqrt{\frac{14}{7^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{14}.$$

б) Щоб можна було добути кубічний корінь із знаменника, помножимо обидва члени дробу на 3^2:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 3^2}{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}.$$

в) Щоб можна було добути корінь четвертого степеня із знаменника, помножимо обидва члени дробу на 2 (бо $8 = 2^3$):

$$\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 2}{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\frac{6}{2^4}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{6}.$$

Якщо підкореневий вираз — алгебраїчний дріб, подібні приклади розв'язують аналогічно.

Приклади.

а) $\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{mn}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{mn};$

б) $\sqrt[3]{\frac{3m}{2a}} = \sqrt[3]{\frac{3m \cdot (2a)^2}{(2a)^3}} = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{12a^2m};$

в) $15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}} = 15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m \cdot 3m^2n}{27m^2n^3 \cdot 3m^2n}} =$

$= 15mn\sqrt[4]{\frac{3a^3m^3n}{(3mn)^4}} = 15mn \cdot \frac{1}{3mn}\sqrt[4]{3a^3m^3n} = 5\sqrt[4]{3a^3m^3n};$

г) $(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy(x-y)^2}{(x-y)^4}} =$

$= (x-y)^2 \cdot \frac{1}{|x-y|}\sqrt[4]{xy(x-y)^2} = |x-y|\sqrt[4]{xy(x-y)^2}.$

Примітка. Останні приклади можна розв'язувати також іншим способом:

$$15mn\sqrt[4]{\frac{a^3m}{27m^2n^3}} = 5\sqrt[4]{\frac{3^4 \cdot m^4n^4 \cdot a^3m}{27m^2n^3}} = 5\sqrt[4]{3a^3m^3n}.$$

$$(x-y)^2\sqrt[4]{\frac{xy}{(x-y)^2}} = |x-y| \cdot \sqrt[4]{\frac{(x-y)^4\,xy}{(x-y)^2}} =$$

$$= |x-y|\sqrt[4]{(x-y)^2\,xy}.$$

9. Зведення радикалів до найпростішого вигляду. Щоб звести радикал до найпростішого, або нормального, вигляду треба виконати послідовно такі операції:

1) спростити підкореневий вираз (якщо це можливо);
2) скоротити показники кореня і підкореневого виразу (якщо вони мають спільний множник);
3) винести з-під радикала раціональні множники;
4) звільнити підкореневий вираз від дробу.

Приклади. Звести до найпростішого вигляду такі радикали:

а) $\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}}$; б) $\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}$; в) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8 - a^6b^2}$;

г) $a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}}$.

Розв'язання.

а) $\frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{8}{xy}} = \frac{3xy^2}{2}\sqrt{\frac{4 \cdot 2xy}{x^2y^2}} = \frac{3xy^2}{2} \cdot \frac{2}{xy}\sqrt{2xy} = 3y\sqrt{2xy};$

б) $\frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}} = \frac{2ab^2}{c}\sqrt[3]{\frac{5a \cdot 2^2b}{2^4b^2c^3 \cdot 2^2b}} = \frac{2ab^2}{c} \cdot \frac{1}{2^2bc}\sqrt[3]{20ab} =$

$= \frac{ab}{2c^2}\sqrt[3]{20ab};$

в) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8 - a^6b^2} = \frac{1}{a}\sqrt[3]{a^6(a^2 - b^2)} = \frac{1}{a} \cdot a^2\sqrt[3]{a^2 - b^2} = a\sqrt[3]{a^2 - b^2};$

г) $a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}} = a^2\sqrt[4]{\frac{a-1}{a^4}} = a^2 \cdot \frac{1}{a}\sqrt[4]{a-1} = a\sqrt[4]{a-1}.$

10. Подібність радикалів. Два або кілька радикалів називаються *подібними*, якщо вони однакового степеня і мають однакові підкореневі вирази.

Приклад. $a\sqrt[3]{x^2c}$ і $4x\sqrt[3]{x^2c}$ — подібні радикали, бо вони обидва третього степеня і мають однакові підкореневі вирази x^2c. Іноді дані радикали стають подібними лише після деяких перетворень.

Приклади. а) Чи подібні радикали

$$\sqrt{18},\ \sqrt{128},\ \sqrt{32}?$$

Розв'язання.

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2};\quad \sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2};$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}.$$

Відповідь. Подібні.

б) Чи подібні радикали

$$\sqrt[3]{\frac{8}{3}} \text{ і } \sqrt[3]{\frac{8}{9}}?$$

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 3}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{\frac{3^2}{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9}.$$

Відповідь. Не подібні.

в) Чи подібні радикали

$$\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)},\ x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}} \text{ і } \sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}}?$$

Розв'язання.

$$\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)} = \frac{x}{y}\sqrt{x^2y\cdot\frac{x-y}{y}} = \frac{x^2}{y}\sqrt{x-y};$$

$$x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}} = x\sqrt{\frac{z}{z(x-y)}} = x\sqrt{\frac{1}{x-y}} = \frac{x}{|x-y|}\sqrt{x-y};$$

$$\sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}} = \sqrt{\frac{4x-4y}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{4(x-y)} = \frac{2}{y}\sqrt{x-y}.$$

Відповідь. Подібні.

§ 14. Дії над радикалами

1. Додавання і віднімання. *Щоб додати (або відняти) радикали, їх сполучають знаком плюс (або мінус) і зводять подібні члени, якщо вони є.*

П р и к л а д и.

а) $3\sqrt{20} + \sqrt{80} = 6\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

б) $(\sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y}) - (\sqrt[3]{27y} - \sqrt{16x}) = \sqrt{9x} - \sqrt[3]{8y} - \sqrt[3]{27y} + \sqrt{16x} = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[3]{y} + 4\sqrt{x} = 7\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{y}$.

в) $5\sqrt[3]{x^2y^5} + 4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} + \frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2} - 6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} - \frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}} = 5y\sqrt[3]{x^2y^2} + 4y^2\cdot\frac{1}{y}\sqrt[3]{x^2y^2} - \frac{4y}{x^2}\cdot x^2\sqrt[3]{x^2y^2} - 6xy\cdot\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2y^2} - \frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{2}{xy}\right)\sqrt[3]{x^2y^2} =$

$= 5y\sqrt[3]{x^2y^2} + 4y\sqrt[3]{x^2y^2} - 4y\sqrt[3]{x^2y^2} - 6y\sqrt[3]{x^2y^2} + 3y\sqrt[3]{x^2y^2} = +2y\sqrt[3]{x^2y^2}$.

г) $\sqrt{1-\frac{x}{2}} + 3\sqrt{4-2x} - \sqrt{16-8x} + 8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x}{2}} = \sqrt{1-\frac{x}{2}} + 3\sqrt{4\left(1-\frac{x}{2}\right)} - \sqrt{16\left(1-\frac{x}{2}\right)} + 8\sqrt{\frac{1}{4}(1-2x)} = \sqrt{1-\frac{x}{2}} + 6\sqrt{1-\frac{x}{2}} - 4\sqrt{1-\frac{x}{2}} + 4\sqrt{1-2x} =$

$$= 3\sqrt{1-\frac{x}{2}} + 4\sqrt{1-2x}.$$

2. Множення. *Щоб перемножити кілька коренів однакового степеня, треба перемножити підкореневі вирази і з добутку добути корінь того самого степеня.*

Якщо перемножуються радикали з різними показниками, їх треба спочатку звести до одного показника. Якщо перед радикалами є коефіцієнти, їх перемножають.

П р и к л а д 1. Виконати множення:

а) $5\sqrt[4]{2a}\cdot 2\sqrt[4]{8a^3} = 10\sqrt[4]{16a^4} = 10\cdot 2a = 20a$;

б) $\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{8}\right)\cdot 2\sqrt{6} = 2\sqrt{36} - 6\sqrt{18} + 10\sqrt{12} - \sqrt{48} = 12 - 18\sqrt{2} + 10\cdot 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 12 - 18\sqrt{2} + 16\sqrt{3}$;

в) $(4x\sqrt[3]{x^2} - 5y\sqrt[3]{xy} + xy\sqrt[3]{y^2})\cdot 2xy\sqrt[3]{xy} = 8x^2y\sqrt[3]{x^3y} - 10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 2x^2y^2\sqrt[3]{xy^3} = 8x^3y\sqrt[3]{y} - 10xy^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 2x^2y^3\sqrt[3]{x}$;

г) $(7\sqrt{5} - 4)(2\sqrt{5} - 1) = 14\sqrt{25} - 8\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 4 = 70 + 4 - 15\sqrt{5} = 74 - 15\sqrt{5}$.

П р и к л а д 2. Перемножити радикали з різними показниками:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{8}$;

б) $m\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}=m\sqrt[8]{3^4m^4}\cdot\sqrt[8]{3^2m^2}\cdot m^2\sqrt[8]{3m^3}=$
$=m^3\sqrt[8]{3^7m^9}=3m^4\sqrt[8]{\dfrac{m}{3}}$;

в) $(a\sqrt{a}+\sqrt[6]{a})\cdot(\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt[4]{a^3})=(a\sqrt[12]{a^6}+\sqrt[12]{a^2})\cdot(\sqrt[12]{a^8}-$
$-a\sqrt[12]{a^9})=a\sqrt[12]{a^{14}}-a^2\sqrt[12]{a^{15}}+\sqrt[12]{a^{10}}-a\sqrt[12]{a^{11}}=a^2\sqrt[12]{a^2}-$
$-a^3\sqrt[12]{a^3}+\sqrt[12]{a^{10}}-a\sqrt[12]{a^{11}}=a^2\sqrt[6]{a}-a^3\sqrt[4]{a}+\sqrt[6]{a^5}-a\sqrt[12]{a^{11}}$.

3. Ділення. *Щоб поділити радикали з однаковими показниками, треба поділити їх підкореневі вирази і з частки добути корінь того самого степеня.*

Щоб поділити радикали з різними показниками, їх треба звести спочатку до однакових показників. Якщо є коефіцієнти, їх ділять.

П р и к л а д 1. Виконати ділення:

а) $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{\dfrac{6a^4}{2a}}=\sqrt[3]{3a^3}=a\sqrt[3]{3}$;

б) $-6\sqrt{\dfrac{2a-2b}{x^2}}:\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{a-b}{2bx^2}}=-\dfrac{6\cdot5}{4}\sqrt{\dfrac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=$
$=-15\sqrt{b}$;

в) $\dfrac{3a}{5b}\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{a-x}}:\dfrac{2a}{5b}\sqrt{\dfrac{2a}{a-x}}=\dfrac{3a}{5b}\sqrt[6]{\dfrac{a^4}{(a-x)^2}}:\dfrac{2a}{5b}\sqrt[6]{\dfrac{8a^3}{(a-x)^3}}=$
$=\dfrac{3a\cdot5b}{5b\cdot2a}\sqrt[6]{\dfrac{a^4(a-x)^3}{(a-x)^2\,8a^3}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[6]{\dfrac{a(a-x)}{8}}$.

г) $\left(\dfrac{3x}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-0{,}4\sqrt{\dfrac{3}{xy}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{xy}{2}}\right):\dfrac{4}{15}\sqrt{\dfrac{3y}{2x}}=\dfrac{45x}{8}\sqrt{\dfrac{2x^2}{3y^2}}-$
$-\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{y^2}}+\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{x^2}{3}}=\dfrac{15x^2}{8y}\sqrt{6}-\dfrac{3}{2y}\sqrt{2}+\dfrac{5x}{12}\sqrt{3}$;

д) $(\sqrt{8x^2y}-2y\sqrt{x}-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=(2x\sqrt{2y}-2y\sqrt{x}-$
$-x\sqrt{x}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=[(x\sqrt{2y}-x\sqrt{x})+(x\sqrt{2y}-2y\sqrt{x})]:$
$:(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=[x(\sqrt{2y}-\sqrt{x})-\sqrt{2xy}(\sqrt{2y}-\sqrt{x})]:(\sqrt{2y}-$
$-\sqrt{x})=(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(x-\sqrt{2xy}):(\sqrt{2y}-\sqrt{x})=x-\sqrt{2xy}$.

П р и к л а д 2. Виконати ділення за допомогою формул скороченого множення:

$$(\sqrt[3]{25a^2}-\sqrt[3]{16b^2}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})=[(\sqrt[3]{5a})^2-(\sqrt[3]{4b})^2]:$$
$$:(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})=(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})(\sqrt[3]{5a}+\sqrt[3]{4b}):(\sqrt[3]{5a}-\sqrt[3]{4b})=$$
$$=\sqrt[3]{5a}+\sqrt[3]{4b}.$$

4. Піднесення до степеня. *Щоб піднести радикал до степеня, треба піднести до цього степеня підкореневий вираз, залишивши той самий показник кореня:*

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}.$$

П р и к л а д и.

а) $(\sqrt[3]{2ax^2})^2=\sqrt[3]{4a^2x^4}=x\sqrt[3]{4a^2x}$;

б) $(\sqrt[3]{(x+y)^2})^5=\sqrt[3]{(x+y)^{10}}=(x+y)^3\sqrt[3]{x+y}$;

в) $\left(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m}\right)^{np}=\sqrt[n]{(x^2+y^2)^{mnp}}=(x^2+y^2)^{mp}$.

Алгебраїчні суми радикалів можна підносити до степеня, користуючись формулами скороченого множення.

П р и к л а д и.

а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$;

б) $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3=\sqrt{3^3}-3\cdot3\cdot2\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\cdot4\sqrt[3]{4}-8\sqrt[3]{2^3}=$
$=3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}-16=3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt[6]{432}-16$;

в) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=3+\sqrt{5}+$
$+2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}=6+2\sqrt{9-5}=6+2\cdot2=10$;

г) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2=[(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})-\sqrt{10}]^2=$
$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2-2(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})\sqrt{10}+(\sqrt{10})^2=18-12\sqrt{10}+$
$+20-6\sqrt{20}+4\sqrt{50}+10=48-12\sqrt{10}-12\sqrt{5}+20\sqrt{2}$*.

5. Добування кореня. *Щоб добути корінь з кореня, треба перемножити показники коренів:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$$

---

* Можна також застосувати формулу квадрата многочлена (див. стор. 162).

Приклади.

а) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$;

б) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[12]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^5}$;

в) $\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}} = \sqrt{x\sqrt[3]{\sqrt{\frac{x^5}{y^3}}}} = \sqrt{x\sqrt[6]{\frac{x^5}{y^3}}} =$

$= \sqrt{\sqrt[6]{\frac{x^{11}}{y^3}}} = \sqrt[12]{\frac{x^{11}}{y^3}} = \frac{1}{y}\sqrt[12]{x^{11}y^9}$.

6. Квадратний корінь з двочлена виду $A \pm \sqrt{B}$. При перетворенні виразів, що містять квадратні радикали, іноді користуються формулою

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

де $A > 0$, $B > 0$ і $A^2 > B$, а знаки в правій і лівій частинах одночасно треба брати або верхні, або нижні (відповідно). Ця формула називається *формулою складного радикала.*

Приклади.

а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 - 3}}{2}} + \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4 - 3}}{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$;

б) $\sqrt{3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 24}}{2}} -$

$- \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 24}}{2}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2}} -$

$- \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3}.$

7. Звільнення знаменника або чисельника дробу від радикала. Заміна дробу, у якого знаменник (чисельник) — ірраціональний вираз, тотожним йому дробом з раціональним знаменником (чисельником) називається знищенням ірраціональності в знаменнику (чисельнику).

Нижче розглянемо основні способи знищення ірраціональності в чисельниках (знаменниках).

1) Дріб виду $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$, $n > k$. В цьому випадку чисельник і знаменник множать на такий множник, щоб у знаменнику корінь добувався націло, тобто на $\sqrt[n]{b^{n-k}}$.

Приклади.

а) $\frac{5}{\sqrt[4]{125}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5}} = \frac{5\sqrt[4]{5}}{5} = \sqrt[4]{5}$;

б) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[5]{27}$;

в) $\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}\sqrt[n]{x}} = \frac{a\sqrt[n]{x}}{x}$.

2) Дріб виду $\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. Чисельник і знаменник треба помножити на *спряжений** вираз $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

В окремому випадку, якщо маємо дріб виду $\frac{A}{p\sqrt{a} \pm q}$, то члени його треба помножити на $p\sqrt{a} \pm q$.

Приклади.

а) $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{8}} = \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{(\sqrt{5} - \sqrt{8})(\sqrt{5} + \sqrt{8})} = \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{8})^2} =$

$= \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{5 - 8} = -2(\sqrt{5} - \sqrt{8})$;

* *Спряженим* відносно ірраціонального виразу M називається будь-який вираз B, нерівний тотожно нулю, такий, що добуток MB не містить радикалів.

б) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2})^2-4^2}=$

$=\frac{6(3\sqrt{2}-4)}{18-16}=3(3\sqrt{2}-4);$

в) $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}=$

$=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2}=\frac{15(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{75-45}=\frac{1}{2}(5\sqrt{3}+3\sqrt{5});$

г) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}=$

$=\frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2}=\frac{a+b-2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+a-b}{a+b-(a-b)}=$

$=\frac{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$

3) Дріб виду $\frac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$. В цьому випадку чисельник і знаменник дробу множать на неповний квадрат різниці або суми: $\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

Приклади.

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}}=\frac{6(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}{(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2})}=$

$=\frac{6(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})}{(\sqrt[3]{7})^3-(\sqrt[3]{4})^3}=2(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16});$

б) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{5}}=\frac{1\cdot(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{(1+\sqrt[3]{5})(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}=\frac{1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1+5}=$

$=\frac{1}{6}(1-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}).$

4) Дріб виду $\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$. В цьому випадку спряжений множник визначають, користуючись тотожністю

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

Для дробу виду $\frac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$ спряжений множник визначають, користуючись тотожністю

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\pm b^{n-1})$$

(останній член b^{n-1} береться із знаком + при n непарному, і знаком — при n парному).

Приклад.

$$\frac{4}{1+\sqrt[5]{2}}=\frac{4(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}{(1+\sqrt[5]{2})(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16})}=$$

$$=\frac{4}{3}(1-\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}).$$

Якщо у знаменнику є радикали з різними показниками, їх треба спочатку звести до спільного знаменника.

Приклад.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\cdot\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{4})(\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\cdot\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5})}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\cdot\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{27-4}=\frac{\sqrt[6]{27^5}+\sqrt[6]{27^4}\cdot\sqrt[6]{4}+\cdots+\sqrt[6]{4^5}}{23}.$$

Але такі приклади можна розв'язувати також іншим способом, звільняючи знаменник дробу спочатку від одного радикала, а потім від другого:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}{3-\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{(3-\sqrt[3]{4})(9+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(9+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})}{23}.$$

5) Дріб виду $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$. В цьому випадку користуються тотожністю

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

6) Якщо в знаменнику є три і більше радикалів, іноді корисно спочатку згрупувати члени.

Приклад.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}.$$

8. Приклади більш складних перетворень.

1) Довести, що при $x=\frac{2ab}{b^2+1}$ $(b>0,\ a>0)$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\begin{cases} b & \text{при } b\geqslant 1,\\ \frac{1}{b} & \text{»}\quad 0<b<1.\end{cases}$$

Доведення.

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\frac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\frac{2ab}{b^2+1}}=\frac{a(b^2+1)+\sqrt{a^2(b^2-1)^2}}{2ab}.$$

Якщо $0<b<1$ і $a>0$, то

$$\sqrt{a^2(b^2-1)^2}=-a(b^2-1).$$

Отже, даний вираз дорівнює

$$\frac{a(b^2+1)-a(b^2-1)}{2ab}=\frac{1}{b}.$$

Якщо $b\geqslant 1$, то даний вираз дорівнює

$$\frac{a(b^2+1)+a(b^2-1)}{2ab}=b.$$

2) Довести, що коли $x=\sqrt{ab}$ і $a>b>0$, то

$$A=\frac{\sqrt{(a+x)(b+x)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(b+x)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Доведення. Поділивши чисельник і знаменник на $\sqrt{(a-x)(x-b)}$, дістанемо

$$A=\frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{x+b}{x-b}}+1}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{x+b}{x-b}}-1}.$$

Оскільки $x^2=ab$, $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, $\frac{a+x}{a-x}=\frac{x+b}{x-b}$ і $a>b>0$, то $x=\sqrt{ab}>\sqrt{b^2}=b$, тобто $x>b>0$, і

$$A=\frac{\frac{x+b}{x-b}+1}{\frac{x+b}{x-b}-1}=\frac{2x}{2b}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Примітка. Цей і наступні приклади можна також розв'язати, безпосередньо підставляючи замість x його значення.

3) Знайти

$$A=\frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

при

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\quad(a>0,\ b>0).$$

Розв'язання.

$$x^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right);$$

$$1+x^2=1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2.$$

Підставимо значення x і $1+x^2$ в даний вираз

$$A=\frac{2b\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}}=$$

$$=\frac{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{b}{a}}}=a+b.$$

4) Спростити вираз $\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}$ при $x=\frac{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a}$, якщо $a<b<2a$.

Розв'язання. З умови $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ випливає, що $a^2x^2=$ $=\frac{2a}{b}-1$ або $b=\frac{2a}{1+a^2x^2}$.

Тому

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=\frac{(1-ax)\sqrt{1+\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1-\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}=$$

$$=\frac{(1-ax)\sqrt{(1+ax)^2}}{(1+ax)\sqrt{(1-ax)^2}}=1,$$

оскільки при $a<b<2a$ $\sqrt{\frac{2a}{b}-1}<1$; отже, $1-ax>0$ і $1+ax>0$.

5) Перетворити

$$B=\frac{2x}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}},$$

де x — будь-яке дійсне число, відмінне від нуля.

Розв'язання.

$$B=\frac{2x}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}=\frac{2x\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{4x^2}}=$$

$$=\frac{x}{|x|}(1+x^2)=\begin{cases}1+x^2, \text{ якщо } x>0;\\ -(1+x)^2, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$$

§ 15. Степені з від'ємними, нульовими і дробовими показниками

1. Попередні зауваження. Раніше ми розглядали степені лише з натуральними показниками. Піднесення до n-го степеня ми розуміли як повторення деякого числа співмножником n разів. З цього погляду вирази 10^{-2}, $3^{0,3}$, $(1-\sqrt{3})^0$ не мають значень, бо не можна число взяти співмножником мінус два рази, 0,3 раза, 0 разів. Проте у математиці розглядають і такі вирази, тобто **степені** з будь-якими раціональними і навіть ірраціональними показниками. Який же смисл вкладено в ці поняття?

2. Степені з від'ємними і нульовими показниками. Під степенем будь-якого відмінного від нуля числа з *від'ємним показником* розуміють дріб, чисельник якого дорівнює одиниці, а знаменник — степінь того самого числа з додатним показником, протилежним даному від'ємному показнику, тобто, якщо $a\neq 0$, то

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Приклади. $10^{-3}=0{,}001$; $x^{-1}=\frac{1}{x}$; $(3-\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{(3-\sqrt{2})^2}$.

Дії над степенями з від'ємними показниками можна виконувати за тими самими правилами, що й дії над степенями з додатними показниками. Рівності

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad (a^m)^n=a^{mn};\quad a^m:a^n=a^{m-n}$$

вірні не тільки при додатних m і n, а й при від'ємних. Остання з цих рівностей тепер вже вірна не тільки при $m>n$ (див. стор. 158), а й при $m<n$. Щоб ця рівність була справедливою при будь-яких m і n, навіть при $m=n$, ввели поняття про степінь з нульовим показником.

Під степенем будь-якого відмінного від нуля числа з *нульовим показником* розуміють одиницю, тобто, якщо $a\neq 0$, то $a^0=1$.

Приклади. $3^0=1$; $0{,}2^0=1$; $(\sqrt{3}-1)^0=1$; $(3+x^2)^0=1$.

Примітка. Вираз 0^0 неозначений.

3. Степені з дробовими показниками. Під степенем будь-якого числа a з дробовим показником $\frac{m}{n}$ розуміють корінь $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

П р и к л а д и. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $(9 + x^2)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{9 + x^2}$.

П р и м і т к а. Формулу $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ в елементарній математиці звичайно розглядають лише при $a \geqslant 0$, бо при від'ємних значеннях a вираз $\sqrt[n]{a^m}$, а значить, і вираз $a^{\frac{m}{n}}$ може не мати значення (у множині дійсних чисел).

Дробові показники можуть бути не тільки додатними, а й від'ємними, тобто будь-якими раціональними числами.

Дії над степенями з будь-якими раціональними показниками виконуються за тими самими правилами, що й дії над степенями з натуральними показниками. Для будь-яких раціональних u і v і дійсного $a > 0$ вірні рівності:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$
$$a^u : a^v = a^{u-v},$$
$$(a^u)^v = a^{uv}.$$

4. Перетворення виразів, що містять степені з раціональними показниками. Нижче показані деякі види перетворень алгебраїчних виразів, які містять степені з різними раціональними показниками.

П р и к л а д 1. Обчислити значення таких виразів:

$$\text{а)}\ \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1};\quad \text{б)}\ \frac{4^{-1} - 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}};\quad \text{в)}\ \frac{2^{-3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1} + \left(-\frac{1}{8}\right)^{0}}.$$

Розв'язання.

$$\text{а)}\ \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3};$$

$$\text{б)}\ \frac{4^{-1} - 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}}{5 - \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{9}{4}}{5 - 2} = = \frac{\frac{1}{4} - \frac{27}{4}}{3} = \frac{-\frac{26}{4}}{3} = -2\frac{1}{6};$$

$$\text{в)}\ \frac{2^{-3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{10^{-1} + \left(-\frac{1}{8}\right)^{0}} = \frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{4}}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{10} + 1} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{4^3}{3^4}}{1\frac{1}{10}} = = \frac{\frac{1}{8} - \frac{64}{81}}{1\frac{1}{10}} = -\frac{431\cdot 10}{81\cdot 8\cdot 11} = -\frac{2155}{3564}.$$

П р и к л а д 2. Перетворити вирази так, щоб вони не містили від'ємних показників степенів:

$$\text{а)}\ \frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}};\quad \text{б)}\ \frac{5a\,(a-b)^{-4}}{b^{-2}\,(x-y)^{-2}}.$$

Розв'язання.

$$\text{а)}\ \frac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}} = \frac{x\cdot 2^3b^4}{a\cdot 5y^2} = \frac{8b^4x}{5ay^2};$$

$$\text{б)}\ \frac{5a\,(a-b)^{-4}}{b^{-2}\,(x-y)^{-2}} = \frac{5ab^2\,(x-y)^2}{(a-b)^4}.$$

П р и к л а д 3. Виконати дії:

$$\text{а)}\ \left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2};\quad \text{б)}\ (x^{-2} + a^{-3})\cdot(x^{-2} - a^{-3}).$$

Розв'язання.

$$\text{а)}\ \left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{5a^{n+1}}{3b^n}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{25a^{2n+2}}{9b^{2n}}} = \frac{9b^{2n}}{25a^{2n+2}};$$

б) $(x^{-2}+a^{-3})\cdot(x^{-2}-a^{-3}) = (x^{-2})^2-(a^{-3})^2 = x^{-4}-a^{-6} =$

$$= \frac{1}{x^4}-\frac{1}{a^6} = \frac{a^6-x^4}{a^6x^4}.$$

Приклад 4. Замінити виразами з дробовими показниками такі радикали:

$$\sqrt[3]{x^4};\quad \sqrt[4]{a^3};\quad \sqrt{(a+b)^{-1}};\quad \sqrt[3]{(x-y)^{-2}}.$$

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}};\quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}};\quad \sqrt{(a+b)^{-1}} = (a+b)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt[3]{(x-y)^{-2}} = (x-y)^{-\frac{2}{3}}.$$

Приклад 5. Замінити вирази з дробовими показниками радикалами: $m^{-1,5}$; $(x+y)^{\frac{1}{3}}$; $(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}$; $(p+q)^{-\frac{m}{n}}$.

Розв'язання.

$$m^{-1,5} = m^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{m^3}};\quad (x+y)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+y};$$

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(x^2+y^2)^3};\quad (p+q)^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(p+q)^{-m}}.$$

Приклад 6. Спростити вирази:

а) $$[(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}]^{-1}\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}}+(a^4b)^{\frac{1}{4}}}{a-b}$$

при $a>0,\ b>0,\ a>b$;

б) $$\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right]\cdot\frac{a^0+a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}}-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}};$$

в) $$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-2x+x^2)^{-1}].$$

Розв'язання.

а) $$[(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}]^{-1}\left[\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}}+(a^4b)^{\frac{1}{4}}}{a-b} =$$

$$= \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}\left[(ab)^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right] : \frac{a^{\frac{5}{4}}+ab^{\frac{1}{4}}}{a-b} = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{(ab)^{\frac{1}{2}}(a+\sqrt{ab})-ab}{a+\sqrt{ab}} : \frac{a^{\frac{5}{4}}+ab^{\frac{1}{4}}}{a-b} = \frac{1}{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}\times$$

$$\times\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+ab-ab}{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})} : \frac{a(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})}{a-b} =$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\quad(a-b)}{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})\,a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\,a\,(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})} = b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b};$$

б) $$\left[\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right]\cdot\frac{a^0+a(a-2)}{\frac{1}{a^{-2}}-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} =$$

$$= \left(\frac{a^3}{a-1}-\frac{1}{1-a}\right)\cdot\frac{1+a^2-2a}{a^2-a+1}\cdot(a+1) = \frac{a^3+1}{a-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}\times$$

$$\times(a+1) = (a+1)(a^2-1);$$

в) $$\left[x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : [(1-x)^{\frac{1}{3}}(1-2x+x^2)^{-1}] =$$

$$= \left[\frac{x}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right] : \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x}{(1-x)(1-x)^{\frac{2}{3}}} : \frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{(1-x)^2} = x.$$

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

§ 16. Загальні відомості про рівняння

1. Означення рівняння. Два числа або які-небудь вирази, з'єднані знаком рівності (=), утворюють *рівність*. У математиці рівності вживаються в двох випадках: якщо стверджують, що дані числа або вирази при таких-то значеннях букв рівні, і якщо ставлять запитання, при яких значеннях букв, що входять до виразів, ці вирази рівні. В першому випадку рівність називається *тотожністю*, а в другому — *рівнянням*. Наприклад, якщо стверджують «при будь-якому a дійсному $a + 1 = 1 + a$», тут рівність є тотожністю; якщо ставлять запитання «при якому значенні x $x + 3 = 10$?», тут маємо рівняння.

Рівнянням називається рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами. Букви, що позначають невідомі числа в рівнянні, називаються *невідомими*. У рівнянні може бути декілька невідомих.

Вирази, що стоять у рівнянні зліва і справа від знака рівності, називаються відповідно *лівою* і *правою частинами* рівняння.

2. Види рівнянь. Розрізняють рівняння з *одним, двома, трьома* і т. д. *невідомими* залежно від того, скільки невідомих воно містить. Наприклад,

$3x - 5 = 10$ — рівняння з одним невідомим x;
$x^2 + y = 50x$ — рівняння з двома невідомими x і y;
$x^2 = \sqrt{y - z}$ — рівняння з трьома невідомими x, y і z.

Рівняння може містити, крім невідомих, інші букви, які називаються *параметрами*. Наприклад, рівняння $ax + 3 = c$ має одне невідоме x, а параметри a і c можна вважати довільними відомими числами. Такі рівняння називаються *буквеними*. Рівняння, які, крім невідомих, не містять ніяких букв, називаються *числовими*. Числовими, наприклад, є такі рівняння:

$$2x + 3 = 7; \quad x^y = y^x.$$

За характером дій, що виконуються над невідомими, рівняння поділяються на алгебраїчні, дробові, ірраціональні і трансцендентні.

Позначимо ліву і праву частини рівняння буквами A і B. Тоді рівняння $A = B$ називається:

1) *алгебраїчним*, якщо A і B — многочлени;
2) *дробовим* (раціональним), якщо A і B — раціональні вирази, причому хоч один з них дробовий;
3) *ірраціональним*, якщо A і B — алгебраїчні вирази, причому хоч один з них ірраціональний;

4) *трансцендентним*, якщо хоч один з виразів A і B містить трансцендентні* дії над невідомими.

Рівняння

$2x^2 + 3 = 7x$ і $ax + by = c$ — алгебраїчні;
$x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3}{1 - x}$ і $\frac{a}{x - 1} + x^2 = \frac{x - 1}{c}$ — дробові;
$\sqrt{3 - x} = 5$ і $\sqrt{a + x} + \sqrt{x^2 - 1} = 0$ — ірраціональні;
$x^y = \log_y x$ і $\sin x - \operatorname{tg} x = 0$ — трансцендентні.

Алгебраїчні рівняння можуть бути *першого, другого, третього* і т. д. *степеня*, залежно від степеня многочленів A і B. Наприклад,

$3x = 2(x - 5) + 1$ — рівняння першого степеня;
$0{,}5x^2 - 3{,}2x = 0$ — рівняння другого степеня;
$7xy + x - y = 5$ — теж рівняння другого степеня,

бо сума показників при невідомих у першому члені $7xy$ дорівнює 2.

Алгебраїчне рівняння першого степеня називається також *лінійним* рівнянням, а рівняння другого і вище степенів називається *нелінійним*.

3. Розв'язок рівнянь. Якщо в рівняння з одним невідомим замість невідомого підставити яке-небудь число, виражене цифрами або буквами, і в результаті виявиться, що ліва частина тотожно дорівнює правій, то кажуть, що дане число (значення невідомого) *задовольняє* рівняння. В іншому випадку кажуть, що воно *не задовольняє* рівняння. Значення невідомого, що задовольняє рівняння, називається *розв'язком*, або *коренем*, рівняння.

Наприклад, якщо у рівняння $3x + 7 = 13$ замість невідомого x підставити число 2, дістанемо тотожність $3 \cdot 2 + 7 = 13$. Отже, значення $x = 2$ задовольняє дане рівняння, число 2 є розв'язок або корінь цього рівняння. А значення $x = 3$ не задовольняє це рівняння, бо $3 \times \times 3 + 7 \neq 13$.

Ще приклад. Рівняння $2x + c = 3$ з невідомим x має розв'язок $x = 0{,}5\,(3 - c)$, бо $0{,}5(3 - c) \cdot 2 + c = 3$ — тотожність.

Розв'язком рівняння з кількома невідомими називається система значень усіх невідомих, що задовольняють дане рівняння. Нехай, наприклад, маємо рівняння з двома невідомими

$$x^2 + 2y = 7.$$

Пара значень $x = 1$, $y = 3$ задовольняє це рівняння, бо $1^2 + 2 \cdot 3 = 7$. Ця пара чисел вважається *одним розв'язком* даного рівняння**. Існують і інші розв'язки цього рівняння, наприклад $x = -1$, $y = 3$; $x = 3$, $y = -1$ і т. д.

---

*Трансцендентними називають неалгебраїчні дії, наприклад піднесення до степеня з ірраціональним показником, логарифмування, обчислення значень тригонометричних функцій і т. ін.

** У таких випадках слово «корінь» не вживають.

Рівняння може зовсім не мати розв'язків, може мати єдиний розв'язок, декілька розв'язків і безліч розв'язків.

Приклади.

Рівняння $x + 8 = x + 5$ не має розв'язків, бо при будь-яких дійсних значеннях x ліва частина більша за праву.

Рівняння $3x + 2 = 11$ має єдиний корінь $x = 3$.

Рівняння $x + \frac{12}{x} = 7$ має два корені: 3 і 4 $\left(\text{бо } 3 + \frac{12}{3} = 7;\ 4 + \frac{12}{4} = 7\right)$.

Рівняння $5(x - 3) + 2 = 3(x - 4) + 2x - 1$ задовольняється при будь-якому значенні x, тобто воно є тотожністю.

Наведене вище рівняння $x^2 + 2y = 7$ також має безліч розв'язків, але воно не буде тотожністю.

4. Рівносильні рівняння. Два рівняння називаються *рівносильними* (або еквівалентними), якщо всі розв'язки першого рівняння є розв'язками другого і, навпаки, всі розв'язки другого рівняння є розв'язками першого. До рівносильних рівнянь відносяться також рівняння, що не мають розв'язків.

Приклади. Рівняння $2x - 5 = 11$ і $7x + 6 = 62$ рівносильні, бо вони мають один і той самий корінь $x = 8$.

Рівняння $x^2 + y + 1 = 8 - y$ і $x^2 + 2y = 7$ рівносильні, бо кожний розв'язок першого рівняння задовольняє друге і будь-який розв'язок другого рівняння задовольняє перше.

Рівняння $x + 2 = x + 5$ і $2x + 7 = 2x$ рівносильні, тому що обидва не мають розв'язків.

Рівняння $x + 2 = 2(x + 1) - x$ і $3x = 3(x - 1) + 3$ рівносильні, бо будь-яке значення x задовольняє і перше і друге рівняння.

Примітка. Згідно з наведеним вище означенням, рівняння

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \text{ і } x - 7 = 0$$

рівносильні, бо кожний корінь одного рівняння задовольняє також друге рівняння, і навпаки. Проте багато хто з авторів вважає їх нерівносильними, бо вони мають різне число коренів; вважають, що рівняння другого степеня $x^2 - 14x + 49 = 0$ має два однакових корені: $x_1 = 7$, $x_2 = 7$, а рівняння першого степеня $x - 7 = 0$ має лише один корінь: $x_1 = 7$.

Поняття про рівносильність рівнянь є відносним: два рівняння, розглянуті в одній області чисел, можуть бути рівносильними, а в другій області — нерівносильними. Наприклад,

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0,$$
$$(x - 2)(x^2 + 4) = 0.$$

В області дійсних чисел дані рівняння рівносильні, в області комплексних чисел — нерівносильні.

Два рівняння, рівносильні третьому, рівносильні між собою.

5. Теореми про рівносильні рівняння. Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння додати одне й те саме число або многочлен, то нове рівняння буде рівносильним даному.

Так, рівняння $2x - 1 = 7$ має корінь $x = 4$; додавши до обох частин по 5, дістанемо рівняння $2x + 4 = 12$, яке має той самий корінь $x = 4$.

Висновки з першої теореми:

а) Якщо в обох частинах рівняння є однакові члени, то їх можна відкинути.

Так, рівняння $9x + 5x = 18 + 5x$ має один корінь $x = 2$; відкинувши в обох частинах $5x$, дістанемо рівняння $9x = 18$, яке має той самий корінь $x = 2$.

б) Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння до другої, змінивши його знак на протилежний.

Так, рівняння $7x - 11 = 3$ має один корінь $x = 2$; якщо перенести 11 в праву частину з протилежним знаком, дістанемо рівняння $7x = 3 + 11$, яке має той самий розв'язок $x = 2$.

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння помножити на одне й те саме число, відмінне від нуля, то нове рівняння буде рівносильним даному*.

Приклад. Рівняння $2x - 15 = 10 - 3x$ має корінь $x = 5$. Помноживши обидві частини рівняння на 3, дістанемо

$$(2x - 15) \cdot 3 = (10 - 3x) \cdot 3, \text{ або } 6x - 45 = 30 - 9x,$$

яке має той самий корінь $x = 5$.

Ділення на будь-яке число, відмінне від нуля, можна розглядати як множення на число, йому обернене. Тому обидві частини рівняння можна також і поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Приклад. Рівняння $12x^2 - 3 = 6x + 33$ має два корені: $x_1 = 2$ і $x_2 = -1{,}5$.

Поділивши всі його члени на 3, дістанемо рівняння $4x^2 - 1 = 2x + 11$, рівносильне даному, бо воно має ті самі два корені: $x_1 = 2$ і $x_2 = -1{,}5$.

---

* Вірні також більш загальні теореми.

Теорема 1. *До обох частин рівняння можна додати будь-який вираз, що має смисл при всіх допустимих значеннях невідомого; здобуте рівняння буде рівносильним даному.*

Теорема 2. *Обидві частини рівняння можна помножити на будь-який вираз, що має смисл і відмінний від нуля при всіх допустимих значеннях невідомого; здобуте рівняння буде рівносильним даному.*

Висновки з другої теореми:

а) Знаки всіх членів рівняння можна змінити на протилежні, що є рівносильним множенню обох частин рівняння на -1.

Приклад. Рівняння $-3x + 7 = -8$ після множення обох частин на -1 матиме такий вигляд: $3x - 7 = 8$. Перше і друге рівняння мають єдиний корінь $x = 5$.

б) Рівняння, в якому коефіцієнти всіх або деяких членів — дробові числа, можна замінити рівносильним йому рівнянням з цілими коефіцієнтами (для цього обидві частини рівняння треба помножити на найменше спільне кратне знаменників дробових коефіцієнтів).

Приклад. Рівняння $\frac{5x-4}{2} = \frac{16x+1}{7}$ після множення обох його частин на 14 матиме такий вигляд:

$$\frac{5x-4}{2} \cdot 14 = \frac{16x+1}{7} \cdot 14; \quad (5x-4) \cdot 7 = (16x+1) \cdot 2;$$

$$35x - 28 = 32x + 2.$$

Не важко переконатися в тому, що перше і останнє рівняння задовольняються лише при $x = 10$.

в) Рівняння можна скоротити (поділити всі його члени на одне й те саме число).

Приклад. Рівняння $75x^2 - 200x = 900 + 60x^2 - 50x$ можна скоротити на 5. Тоді дістанемо рівняння $15x^2 - 40x = 180 + 12x^2 - 10x$, рівносильне даному.

Примітка. Іноді доводиться множити обидві частини рівняння на який-небудь вираз, що містить невідоме. В результаті цього можна дістати рівняння, не рівносильне даному.

Приклади. Нехай дано рівняння $2x - 1 = 5$, що має один корінь $x = 3$. Якщо помножити обидві частини цього рівняння на $x - 2$, дістанемо нове рівняння $(2x - 1)(x - 2) = 5(x - 2)$, не рівносильне даному, бо, крім кореня $x = 3$, воно має ще один корінь $x = 2$, який не задовольняє дане рівняння. Якби обидві частини даного рівняння помножили на $\frac{1}{x-3}$, то дістали б рівняння $\frac{2x-1}{x-3} = \frac{5}{x-3}$, яке взагалі не має коренів і, значить, теж не рівносильне даному.

Розглянуті теореми (їх називають також властивостями рівнянь) і висновки з них дозволяють порівняно легко розв'язувати багато рівнянь. Адже, перетворюючи рівняння згідно зі згаданими властивостями і висновками, ми кожного разу дістаємо нове, простіше, рівняння, рівносильне даному. Таким способом можна прийти до дуже простого рівняння, корені якого визначити неважко. А оскільки здобуте рівняння рівносильне даному, корені його є не що інше, як корені даного рівняння.

§ 17. Рівняння першого степеня

1. Означення. Рівнянням першого степеня з одним невідомим називається кожне рівняння, в одній частині якого є многочлен першого степеня відносно одного невідомого, а в другій — теж многочлен першого степеня відносно цього ж невідомого або будь-яке число.

Приклади. $2x + 3 = 7 - \frac{x}{5}$; $0{,}7y = 0$; $\frac{x}{2} + 1 = x - \frac{1}{2}$.

Кожне рівняння першого степеня з одним невідомим x можна звести до такого виду

$$ax = b.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на a (якщо $a \neq 0$), дістанемо єдиний розв'язок: $x = \frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків (при $b \neq 0$), або має їх безліч (при $b = 0$).

2. Загальна схема розв'язування рівнянь першого степеня. Нехай, наприклад, треба розв'язати таке рівняння:

$$\frac{x-4}{3} + \frac{2(x+1)}{4} - 1 = \frac{5(x-3)}{2} + 2x - \frac{11x+43}{6}.$$

Розв'язання.

а) Помножимо всі члени на найменше спільне кратне знаменників, яке дорівнює 12. Виконавши скорочення, дістанемо:

$$4(x-4) + 6(x+1) - 12 = 30(x-3) + 24x - 2(11x + 43).$$

б) Щоб відокремити члени, які містять невідоме, і вільні члени, розкриємо дужки:

$$4x - 16 + 6x + 6 - 12 = 30x - 90 + 24x - 22x - 86.$$

в) Згрупуємо в одній частині члени, що містять невідомі, а в другій — вільні члени:

$$4x - 6x - 30x - 24x + 22x = -90 - 86 + 16 - 6 + 12.$$

г) Зведемо подібні члени:

$$-22x = -154.$$

д) Поділимо обидві частини на -22. Дістанемо:

$$x = 7.$$

Як бачимо, корінь одержаного рівняння, а значить і даного, дорівнює $x = 7$.

Взагалі такі рівняння можна розв'язувати за такою схемою:

а) звести рівняння до цілого виду;

б) розкрити дужки;

в) згрупувати члени, що містять невідоме, в одній частині рівняння, а вільні члени — в другій;

г) звести подібні члени;

д) розв'язати рівняння виду $ax = b$, здобуте після зведення подібних членів.

Проте ця схема не може бути обов'язковою для кожного рівняння. По-перше, при розв'язуванні багатьох, простіших, рівнянь доводиться починати не з першого, а з другого, третього і навіть зразу з п'ятого етапу. По-друге, при розв'язуванні деякі проміжні етапи можуть стати непотрібними. По-третє, іноді буває вигідніше порушити вказаний схемою порядок, бо рівняння тоді розв'язується простіше і коротше.

Аналогічно можна розв'язувати і рівняння першого степеня з одним невідомим з буквеними коефіцієнтами.

Приклади.

а) $cx - b(c - x) = a(b - x) - b(a - x);$

$$cx - bc + bx = ab - ax - ab + bx;$$
$$cx - bc = -ax;$$
$$cx + ax = bc; \quad x(a + c) = bc;$$
$$x = \frac{bc}{a + c} \text{ (якщо } a \neq -c).$$

б) $\frac{a - x}{b - a} + \frac{3x}{a + b} = \frac{3a^2 - ab - 4b^2}{a^2 - b^2};$

$$-\frac{\overbrace{a - x}^{a+b}}{a - b} + \frac{\overbrace{3x}^{a-b}}{a + b} = \frac{\overbrace{3a^2 - ab - 4b^2}^{1}}{a^2 - b^2};$$
$$-(a - x)(a + b) + 3x(a - b) = 3a^2 - ab - 4b^2;$$
$$-a^2 - ab + ax + bx + 3ax - 3bx = 3a^2 - ab - 4b^2;$$
$$4ax - 2bx = 4a^2 - 4b^2; \quad 2x(2a - b) = 4(a^2 - b^2);$$
$$x = \frac{4(a^2 - b^2)}{2(2a - b)}; \quad x = \frac{2(a^2 - b^2)}{2a - b} \text{ (якщо } 2a \neq b).$$

3. Рівняння, що містять невідоме в знаменнику. До рівнянь першого степеня зводиться багато дробових рівнянь з одним невідомим. Щоб розв'язати таке рівняння, часто доводиться множити обидві частини на вираз, що містить невідоме, а це, як показано на стор. 210, може призвести до порушення рівносильності рівнянь. Тому при розв'язуванні цих рівнянь треба всі здобуті корені перевіряти підстановкою в початкове рівняння. Корені, що не задовольняють початкове рівняння, треба відкинути як сторонні.

Приклади. а) Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{x + 2} = \frac{13}{x^2 + x - 2}.$$

Розв'язання. Розкладаючи $x^2 + x - 2$ на множники, дістаємо: $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Отже, $x^2 + x - 2$ — спільний знаменник

дробів. Тоді додатковими множниками будуть відповідно $x + 2$, $x - 1$, 1.

$$\frac{\overbrace{2}^{x+2}}{x - 1} + \frac{\overbrace{5}^{x-1}}{x + 2} = \frac{\overbrace{13}^{1}}{x^2 + x - 2};$$
$$\frac{2(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} + \frac{5(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{13}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Щоб спростити рівняння, треба обидві частини його помножити на $(x - 1)(x + 2)$; дістанемо:

$$2(x + 2) + 5(x - 1) = 13;$$
$$2x + 4 + 5x - 5 = 13;$$
$$7x = 13 - 4 + 5;$$
$$7x = 14; \quad x = 2.$$

Перевірка. $\frac{2}{2 - 1} + \frac{5}{2 + 2} = \frac{13}{4 + 2 - 2}; \quad 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}; \ \frac{13}{4} = \frac{13}{4}.$

$x = 2$ задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x = 2$.

б) Розв'язати рівняння $\frac{2}{x - 1} + \frac{5}{x + 2} = \frac{6}{x^2 + x - 2}$ (1).

Розв'язання. Спільний знаменник: $x^2 + x - 2$; додаткові множники: $x + 2$, $x - 1$, 1.

$$\frac{\overbrace{2}^{x+2}}{x - 1} + \frac{\overbrace{5}^{x-1}}{x + 2} = \frac{\overbrace{6}^{1}}{x^2 + x - 2}; \qquad (2)$$
$$\frac{2(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} + \frac{5(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{6}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $(x - 1)(x + 2)$, дістанемо

$$2(x + 2) + 5(x - 1) = 6;$$
$$2x + 4 + 5x - 5 = 6; \qquad (3)$$
$$7x = 7;$$
$$x = 1.$$

Рівняння (3) має корінь $x = 1$. Але він є стороннім для даного рівняння, бо 1 не може бути допустимим значенням для x: при $x = 1$ знаменники першого і третього дробу рівняння (1) перетворюються на нуль. Еквівалентність порушилася при переході від рівняння (2) до рівняння (3).

Відповідь. Дане рівняння не має розв'язку.

в) Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{x+3}=\frac{2(x-2)}{x+5}$.

Розв'язання. Зводимо до спільного знаменника

$$\frac{(x-2)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{2(x-2)(x+3)}{(x+5)(x+3)}.$$

Множимо обидві частини рівняння на $(x+5)(x+3)$, дістаємо: $(x-2)(x+5)=2(x-2)(x+3)$.

Ділимо обидві частини рівняння на $x-2$,

$$x+5=2(x+3);\ x+5=2x+6;$$
$$-1=x;\ x=-1.$$

Не важко переконатися, що $x=-1$ задовольняє дане рівняння. Проте при діленні рівняння $(x-2)(x+5)=2(x-2)(x+3)$ на $x-2$ ми втратили корінь $x=2$. Щоб не було втрати кореня, рівняння слід розв'язувати так:

$$(x-2)(x+5)-2(x-2)(x+3)=0;$$
$$(x-2)[(x+5)-2(x+3)]=0;$$
$$(x-2)(x+5-2x-6)=0;\ (x-2)(-x-1)=0.$$

Добуток дорівнює нулю, якщо хоч один із співмножників дорівнює нулю. Тоді здобуте рівняння розпадається на два: $x-2=0$ і $-x-1=0$. Звідси маємо: $x_1=2$, $x_2=-1$.

Відповідь. $x_1=2$; $x_2=-1$.

§ 18. Розв'язування задач за допомогою рівнянь першого степеня з одним невідомим

Щоб розв'язати задачу за допомогою рівняння, необхідно: 1) вибрати невідоме і позначити його буквою; 2) за допомогою цієї букви виразити всі інші невідомі; 3) скласти рівняння; 4) розв'язати рівняння; 5) перевірити одержаний розв'язок за умовою задачі. Далі для прикладу наведені розв'язання кількох задач за допомогою складання рівнянь першого степеня.

З а д а ч а 1. На першому складі було 185 *т* вугілля, а на другому — 237 *т*. Перший склад почав відпускати щодня 15 *т* вугілля, а другий — 18 *т*. Через скільки днів на другому складі буде в півтора рази більше вугілля, ніж на першому?

Розв'язання. Припустимо, що через x днів на другому складі буде в півтора рази більше вугілля, ніж на першому. Перший склад відпускав щодня 15 *т* вугілля, а тому за x днів з першого складу видано вугілля $15x$ (*т*). Отже, на першому складі залишилося вугілля $185-15x$ (*т*). Другий склад відпускав щодня 18 *т*, а тому за x днів з другого складу видано вугілля $18x$ (*т*). На другому складі залишилося вугілля $237-18x$ (*т*). За умовою задачі залишок вугілля на другому складі в півтора рази більший, ніж на першому.

Складаємо рівняння:

$$237-18x=\frac{3}{2}(185-15x),$$
$$2(237-18x)=3(185-15x),$$

звідки

$$474-36x=555-45x,\quad -36x+45x=555-474,\quad 9x=81;\quad x=9.$$

Перевірка. 1) За 9 днів з першого складу видано вугілля $15\cdot 9=135$ (*т*), з другого — $18\cdot 9=162$ (*т*); 2) на першому складі залишилося $185-135=50$ (*т*) вугілля, на другому $237-162=75$ (*т*); залишок вугілля на другому складі в півтора рази більший, ніж на першому. Задачу розв'язано правильно.

Відповідь. 9 днів.

З а д а ч а 2. Сума цифр двозначного числа дорівнює 11. Якщо до цього числа додати 63, дістанемо число, позначене тими самими цифрами, але написане в зворотному порядку. Знайти це число.

Розв'язання. Позначимо число одиниць у шуканому числі буквою x, тоді число десятків буде $11-x$ і шукане число матиме вигляд $(11-x)10+x$. Число, записане тими самими цифрами в зворотному порядку, буде $10x+(11-x)$.

Складемо рівняння: $(11-x)10+x+63=10x+11-x$, розв'язок якого $x=9$ дасть одиниці шуканого числа. Число десятків дорівнюватиме $11-x=2$. Шукане число буде 29.

Відповідь. 29.

З а д а ч а 3. У трьох ящиках міститься 64,2 *кг* цукру. В другому ящику міститься $\frac{4}{5}$ того, що є в першому, в третьому — $42\frac{1}{2}$ % того, що є в другому. Скільки цукру в кожному ящику?

Розв'язання. Позначимо вагу цукру в першому ящику (в *кг*) буквою x. Тоді вага цукру в другому ящику буде $\frac{4}{5}x$, або $0{,}8x$, а в третьому $0{,}8x\cdot\frac{42{,}5}{100}=0{,}34x$.

Складемо рівняння:

$$x+0{,}8x+0{,}34x=64{,}2,$$

звідси $x = 30$, тоді

$$\frac{4}{5}x = 24 \text{ і } 0{,}34x = 10{,}2.$$

Відповідь. 30, 24 і 10,2 *кг*.

З а д а ч а 4. Протягом семигодинного робочого дня токар повинен за нормою обточити певну кількість деталей. Застосувавши новий різець, токар почав обточувати за кожну годину на 4 деталі більше від годинної норми, а тому за 6 *год* роботи він виконав 1,2 денної норми. Скільки деталей за годину обточує токар, застосовуючи новий різець?

Розв'язання. Позначимо кількість деталей, що їх обробив токар за 1 *год*, через x. Тоді його денна норма протягом семигодинного робочого дня буде $7x$. Застосовуючи новий різець, він обточує за 1 *год* $(x + 4)$ деталей, за 6 *год* роботи — $6(x + 4)$.

Складемо рівняння: $6(x + 4) = 1{,}2 \cdot 7x$; $x = 10$; $x + 4 = 14$.

Відповідь. 14 деталей.

З а д а ч а 5. Двома екскаваторами викопали котлован для колгоспної електростанції за 24 дні. Першим екскаватором можна було виконати цю роботу в півтора рази швидше, ніж другим. За скільки днів кожним із екскаваторів окремо можна виконати всю роботу?

Розв'язання. Позначимо через x днів час, протягом якого першим екскаватором можна було виконати всю роботу; $1{,}5x$ днів — час, протягом якого другим екскаватором можна було виконати всю роботу. Першим екскаватором протягом одного дня виконували $\frac{1}{x}$ частину роботи; другим екскаватором протягом одного дня виконували $\frac{1}{1{,}5x}$ частину роботи. Обидва екскаватори протягом одного дня виконували $\frac{1}{24}$ частину роботи.

Складемо рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1{,}5x} = \frac{1}{24}; \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{24};$$

$$1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{24}; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{24} : \frac{5}{3}; \quad \frac{1}{x} = \frac{1 \cdot 3}{24 \cdot 5} = \frac{1}{40}; \quad x = 40.$$

Розв'язок рівняння $x = 40$ дає кількість днів, протягом яких першим екскаватором можна виконати всю роботу. Другим екскаватором можна виконати цю роботу за $40 \cdot 1{,}5 = 60$ (днів).

Відповідь. 40 днів; 60 днів.

З а д а ч а 6. Однією автомашиною можна перевезти деякий вантаж за 18 *год*, а другою — за 24 *год*. Вантаж почали перевозити двома машинами одночасно. Через декілька годин другу машину перевели на

іншу роботу, а залишок вантажу перевозили лише першою автомашиною протягом 4 *год*. Скільки годин працювала перша автомашина?

Розв'язання. Позначимо буквою x (*год*) час, протягом якого працювала друга автомашина; x (*год*) є також час, протягом якого працювали обидві машини одночасно. За 1 *год* першою машиною можна перевезти $\frac{1}{18}$ вантажу, а другою $\frac{1}{24}$. Двома машинами за 1 *год*, перевезли $\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right)$ вантажу, а за x годин $\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right)x$ — вантажу. Перша машина перевезла вантаж, що залишився, за 4 *год*; отже, за цей час вона перевезла $\frac{1}{18} \cdot 4 = \frac{2}{9}$ вантажу.

Враховуючи, що увесь вантаж складає умовну одиницю, дістанемо рівняння:

$$\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right)x + \frac{2}{9} = 1.$$

Розв'язок рівняння $x = 8$ (*год*) дає час спільної роботи обох машин. Тоді перша машина працювала $8 + 4 = 12$ (*год*).

Відповідь. 12 *год*.

З а д а ч а 7. Турист ішов з села до залізничної станції. Пройшовши за першу годину 3 *км*, він розрахував, що якщо буде рухатися з тією самою швидкістю, то спізниться до поїзда на 40 *хв*. А тому решту шляху він пройшов з швидкістю 4 *км/год* і прийшов на станцію за 45 *хв* до відходу поїзда. Обчислити відстань від села до станції?

Розв'язання. Нехай відстань від села до станції дорівнює x (*км*). Якби турист увесь час ішов із швидкістю 3 *км/год*, то витратив би на дорогу $\frac{x}{3}$ *год*, що на $\frac{2}{3}$ *год* більше, ніж він мав у своєму розпорядженні. Таким чином, щоб встигнути точно до відходу поїзда він повинен був витратити часу $\frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ *год*. Насправді ж за першу годину він пройшов 3 *км*, а ті, що залишилися $(x - 3)$ *км*, він пройшов із швидкістю 4 *км/год* за $\frac{x-3}{4}$ *год*. Весь шлях він пройшов за $1 + \frac{x-3}{4}$ *год*. Враховуючи, що турист прийшов за $\frac{3}{4}$ *год* до відходу поїзда, складемо рівняння

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 1 + \frac{x-3}{4} + \frac{3}{4}.$$

Розв'язок рівняння $x = 20$ і дає шукану відстань.

Відповідь. 20 *км*.

Задача 8. Щодня о 12 *год* дня від пристані A до пристані B відходить пасажирський катер. Всю відстань від A до B катер проходить без зупинки з швидкістю 12 *км/год*. Витративши на зупинку біля пристані B 2,5 *год*, катер повертається назад і, пройшовши всю відстань без зупинки з швидкістю 15 *км/год*, прибуває до пристані A о 19 *год* того самого дня. Знайти відстань від A до B.

Розв'язання. Нехай відстань від A до B дорівнює x (*км*). Тоді час руху катера від A до B буде $\frac{x}{12}$ *год*, а від B до A $\frac{x}{15}$ *год*. Катер повернувся до пункту A через $19 - 12 = 7$ *год*, з них 2,5 *год* — зупинка, а тому він перебував у дорозі $7 - 2,5 = 4,5$ *год*.

Звідси дістаємо рівняння

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{15} = 4,5,$$

розв'язок якого $x = 30$ (*км*) дає шукану відстань.

Відповідь. Відстань від A до B дорівнює 30 *км*.

Задача 9. Кусок заліза і кусок міді разом важать 1280 *г*, причому об'єм куска міді в два рази більший за об'єм куска заліза. Знайти об'єм кожного куска, якщо питома вага заліза 6,8 *г/см*^{3}, а питома вага міді 8,9 *г/см*^{3}.

Розв'язання. Позначимо об'єм (в *куб. см*) куска заліза через x, тоді об'єм куска міді дорівнює $2x$. Вага заліза $x \cdot 7,8$, а міді $2x \cdot 8,9$.

Складемо рівняння: $7,8x + 17,8x = 1280$. Його розв'язок $x = 50$ дає об'єм куска заліза. Тоді об'єм куска міді дорівнює 100 *куб. см*.

Відповідь. 50 *куб. см* і 100 *куб. см*.

Задача 10. Є два сплави золота і срібла; в одному кількості цих металів відносяться як 2 : 3, у другому — як 3 : 7. Скільки потрібно взяти кожного сплаву, щоб одержати 8 *кг* нового сплаву, в якому золото і срібло відноситимуться як 5 : 11?

Розв'язання. Позначимо через x вагу першого сплаву, в *кг*, тоді вага другого сплаву буде $(8 - x)$ *кг*. Золота в першому сплаві $\frac{2}{5}x$ *кг* і срібла $\frac{3}{5}x$ *кг*. У $(8 - x)$ *кг* другого сплаву міститься $\frac{3}{10}(8 - x)$ *кг* золота і $\frac{7}{10}(8 - x)$ *кг* срібла.

Склавши рівняння за умовою задачі, дістанемо:

$$\left[\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8-x)\right] : \left[\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}(8-x)\right] = 5 : 11.$$

Його розв'язок $x = 1$ (*кг*) дає вагу першого сплаву. Вага другого сплаву $8 - x = 7$ (*кг*).

Відповідь. 1 *кг* і 7 *кг*.

§ 19. Системи двох рівнянь першого степеня з двома невідомими

1. Рівняння першого степеня з двома невідомими. Якщо в рівнянні з двома невідомими кожний член містить лише одне з невідомих і до того ж першого степеня або зовсім не містить невідомих, то таке рівняння називається рівнянням *першого степеня з двома невідомими*, або лінійним рівнянням з двома невідомими. В загальному вигляді воно записується так: $ax + by = c$, де x і y — невідомі числа, а коефіцієнти a, b, c — відомі (параметри).

Приклади таких рівнянь:

$$5x - 2x + 3 = 2x + y - 1;$$

$$8x - 1,3y = 15; \quad \frac{2}{5}x + 0,7y = 3,4; \quad y = 4x - 9.$$

Будь-яка пара допустимих значень x і y, що задовольняє рівняння, називається розв'язком даного рівняння. Наприклад, значення $x = 1$, $y = 14$ є розв'язком рівняння $x + y = 15$.

Рівняння з двома невідомими першого степеня має безліч розв'язків. Так, у рівнянні $x + y = 15$ невідоме x може набувати будь-якого значення і для кожного з них є відповідне значення y, наприклад: $x_1 = 1$, $y_1 = 14$; $x_2 = 2$, $y_2 = 13$; $x_3 = 100$, $y_3 = -85$ і т. д.

Для рівняння першого степеня з двома невідомими залишаються справедливими всі ті властивості, що і для рівняння з одним невідомим (стор. 209). Застосовуючи їх, кожне таке рівняння можна звести до нормального виду (тобто, до виду $ax + by = c$).

Приклад. $$\overset{12}{\frac{7}{x}} + \overset{3}{\frac{x - 3y}{4}} = \overset{12}{2x} - \overset{4}{\frac{y + 5}{3}};$$

$$84 + 3(x - 3y) = 24x - 4(y + 5);$$

$$84 + 3x - 9y = 24x - 4y - 20;$$

$$3x - 9y - 24x + 4y = -20 - 84;$$

$$-21x - 5y = -104;$$

$$21x + 5y = 104.$$

2. Системи рівнянь з двома невідомими. Якщо знаходять спільні розв'язки двох або декількох рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему*. В системі рівнянь кожне невідоме означає одне й те саме число в усіх рівняннях.

Щоб показати, що дані рівняння утворюють систему, їх звичайно записують одне під одним і об'єднують фігурною дужкою, наприклад

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Кожна пара значень невідомих, що одночасно задовольняє обом рівнянням системи, називається *розв'язком системи*. Наприклад, наведену вище систему рівнянь задовольняє пара чисел: $x = 15$, $y = 5$. Це і є розв'язок даної системи. Інших розв'язків вона не має. Існують системи рівнянь, що мають безліч розв'язків, а також системи, що зовсім не мають розв'язків. Система, що не має розв'язків, називається *несумісною*.

Примітка. Розв'язки системи не можна називати коренями.

Розв'язати систему — це значить знайти всі розв'язки цієї системи або показати, що вона їх не має.

Дві системи рівнянь називаються *рівносильними* (еквівалентними), якщо всі розв'язки однієї з них є розв'язками другої і, навпаки, всі розв'язки другої системи є розв'язками першої. Наприклад, розв'язком системи

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

є одна пара чисел: $x = 4$ і $y = 3$. Ці самі числа є також розв'язком системи

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11, \\ x + 8y = 28. \end{cases}$$

(Це легко перевірити, підставивши значення $x = 4$ і $y = 3$ в обидва рівняння системи.) Отже, розглянуті системи рівнянь рівносильні.

Дві несумісні системи рівнянь також вважаються рівносильними. Дві рівносильні системи рівнянь можуть складатися з однакової і різної кількості рівнянь. Зокрема, система рівнянь може бути рівносильна одному рівнянню. Поняття рівносильності систем рівнянь є відносне: дві системи рівнянь можуть бути рівносильні в одній числовій множині і не рівносильні — в другій.

Найважливішим способом розв'язування систем рівнянь є перехід від даної системи до другої, рівносильної даній, але простішої від неї. Тому важливо вміти переходити від однієї системи до інших систем рівнянь, рівносильних даній. Це виконують, користуючись такими теоремами.

3. Теореми про рівносильність систем рівнянь першого степеня.

Теорема 1. Будь-яке з рівнянь системи можна замінити рівносильним йому рівнянням; одержана в результаті цього система буде рівносильна даній.

Наприклад, якщо в системі

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

замінити друге рівняння рівносильним йому рівнянням $9x + 6y = 57$, дістанемо нову систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 9x + 6y = 57, \end{cases}$$

рівносильну даній.

Теорема 2. Будь-яке з рівнянь системи можна замінити рівнянням, одержаним у результаті алгебраїчного додавання обох рівнянь системи. Нова система буде рівносильна даній.

Наприклад, якщо перше рівняння в наведеній вище системі замінити «сумою» даних рівнянь, дістанемо нову систему

$$\begin{cases} 5x - \ \ y = 23, \\ 3x + 2y = 19, \end{cases}$$

яка буде рівносильна даній.

Теорема 3. Можна з одного рівняння системи виразити будь-яке невідоме через друге і підставити цей вираз у друге рівняння. Нове рівняння разом з першим утворить систему, рівносильну даній.

Нехай, наприклад, дано систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 33, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння невідоме x через y

$$x = 2y + 1$$

і підставимо цей вираз у перше рівняння; дістанемо

$$2(2y + 1) + 3y = 33.$$

Якщо до цього рівняння з одним невідомим приєднати друге рівняння системи, дістанемо нову систему

$$\begin{cases} 2(2y + 1) + 3y = 33, \\ x - 2y = 1, \end{cases}$$

рівносильну даній.

На наведених вище теоремах засновані різні способи розв'язування систем рівнянь. Нижче розглянемо найважливіші з цих способів.

4. Розв'язування систем рівнянь способом алгебраїчного додавання. Якщо коефіцієнти при якому-небудь невідомому в обох рівняннях рівні за абсолютною величиною, то додаванням обох рівнянь (або відніманням одне від одного) можна дістати рівняння з одним невідомим. Розв'язуючи це рівняння, визначають одне невідоме, а, підставляючи його в одне з рівнянь системи, знаходять друге невідоме.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання. Тут коефіцієнти при y за абсолютним значенням рівні між собою, але протилежні за знаком. Щоб дістати рівняння з одним невідомим, можна почленно додати рівняння системи

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \\ \hline 5x = \quad 20; \ x = 4. \end{array}$$

Здобуте значення $x = 4$ підставляємо в будь-яке рівняння системи (наприклад, у перше) і знаходимо значення y:

$$2 \cdot 4 + y = 11,$$
$$y = 11 - 8,$$
$$y = 3.$$

Отже, система має розв'язок: $x = 4$, $y = 3$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 5y = 7, \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Тут коефіцієнти при x рівні між собою. Щоб дістати рівняння з одним невідомим, рівняння системи почленно віднімають:

$$\begin{array}{l} -\begin{cases} x + 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \\ \hline 8y = 6, \ y = \frac{3}{4}. \end{array}$$

Здобуте значення $y = \frac{3}{4}$ підставляємо в одне з рівнянь системи (наприклад, у друге) і знаходимо значення x:

$$x - 3 \cdot \frac{3}{4} = 1; \quad x - \frac{9}{4} = 1; \quad x = 3\frac{1}{4}.$$

Система рівнянь має розв'язок:

$$x = 3\frac{1}{4}, \quad y = \frac{3}{4}.$$

Якщо коефіцієнти при невідомих у рівняннях системи різні за абсолютною величиною, то в цьому випадку слід зрівняти абсолютні величини коефіцієнтів при одному з невідомих, а потім зробити так само, як і в першому випадку.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 3y = -4, \\ 6x + 5y = -7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зрівняємо коефіцієнти при x. Для цього помножимо перше рівняння на 3, а друге на -2 і додамо здобуті рівняння. Розв'язування можна записати так:

$$\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 6x + 5y = -7 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix} \begin{array}{r} 12x + 9y = -12 \\ -12x - 10y = 14 \\ \hline -y = 2 \\ y = -2 \end{array}$$

$$4x + 3 \cdot (-2) = -4,$$
$$4x = 2, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$.

Аналогічно можна розв'язувати і системи рівнянь з буквеними коефіцієнтами.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2, \\ x + y = 2a \quad (a + b \neq 0). \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ x + y = 2a \end{cases} \Bigg| \, b \, \Bigg| \begin{array}{l} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + by = 2ab \\ \hline x(a + b) = (a + b)^2 \\ x = a + b^* \end{array}$$

$$a + b + y = 2a;$$
$$y = a - b.$$

Відповідь. $x = a + b$, $y = a - b$.

* Якби за умовою не передбачалося, що $a + b \neq 0$, то цей випадок слід було розглядати окремо. При $a + b = 0$ здобуте рівняння задовольняє будь-якому значенню x. В цьому випадку система має безліч розв'язків: x — будь-яке число, $y = 2a - x$.

5. Розв'язування систем способом підстановки. Якщо з одного рівняння системи будь-яке з невідомих виразити через друге і підставити цей вираз у друге рівняння, то дістанемо рівняння з одним невідомим. З цього рівняння можна знайти значення одного невідомого, а із здобутого виразу — значення другого невідомого.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x - 5y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння знаходимо

$$x = \frac{11 + 2y}{3}.$$

Підставивши це значення в друге рівняння, дістанемо рівняння з одним невідомим —y:

$$4 \cdot \frac{11 + 2y}{3} - 5y = 3,$$

$$4(11 + 2y) - 15y = 9,$$
$$44 + 8y - 15y = 9; \ -7y = -35; \ y = 5.$$

Підставивши $y = 5$ у вираз для x, дістанемо:

$$x = \frac{11 + 2 \cdot 5}{3}; \ x = 7.$$

Система має розв'язок: $x = 7$, $y = 5$.

Деякою видозміною цього способу є спосіб зрівнювання невідомих. Щоб розв'язати систему цим способом, треба в кожному рівнянні одне й те саме невідоме виразити через друге. Здобуті таким чином різні вирази для цього невідомого сполучають знаком рівності і дістають рівняння з одним невідомим. Розв'язавши це рівняння, знаходять значення одного невідомого, а потім другого.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 6y = 13, \\ 7x + 18y = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. З обох рівнянь виражаємо x через y:

$$x = \frac{13 - 6y}{5}; \ x = \frac{-1 - 18y}{7}.$$

Прирівнюючи ці вирази, дістаємо рівняння з одним невідомим y:

$$\frac{13 - 6y}{5} = \frac{-1 - 18y}{7}.$$

Розв'язуємо це рівняння:

$$7(13 - 6y) = -5(1 + 18y);$$
$$91 - 42y = -5 - 90y;$$
$$48y = -96; \ y = -2.$$

Невідоме x знайдемо, підставивши значення y в один з виразів для x:

$$x = \frac{13 - (-2) \cdot 6}{5} = 5.$$

Таким чином, система має розв'язок: $x = 5$, $y = -2$.

6. Спосіб заміни. До систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими можна звести багато нелінійних систем. Для цього придатний спосіб заміни.

Нехай, наприклад, треба розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{y} = 9, \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 35. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінимо невідомі, вважаючи, що $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$; дістанемо лінійну систему:

$$\begin{cases} 15u - 7v = 9, \\ 4u + 9v = 35, \end{cases}$$

яка має розв'язок: $u = 2$, $v = 3$. Із співвідношень $\frac{1}{x} = 2$, $\frac{1}{y} = 3$ знаходимо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

7. Розв'язування системи за допомогою визначників. Розв'язки системи виду

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можна знаходити за формулами

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Ці формули легко запам'ятати, якщо ввести спеціальне позначення. Домовимося вираз $ps - rg$ позначити так: $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$. Цей вираз називається *визначником*, або *детермінантом* другого порядку.

Отже,

$$\begin{vmatrix} pq \\ rs \end{vmatrix} = ps - rq.$$

Приклад. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$

За допомогою визначників розв'язок системи

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

можна подати в зручному для запам'ятання вигляді:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Знаменник тут спільний. Його називають *визначником системи* і позначають знаком

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи не дорівнює нулеві, то система має єдиний розв'язок: значення невідомого дорівнює дробу, знаменник якого є визначником системи, а чисельник — визначником, здобутим із визначника системи заміною коефіцієнтів при цьому невідомому вільними членами (правило Крамера).

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 3.$$

Застосовуємо правило Крамера (бо $\Delta \neq 0$):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

8. Дослідження системи рівнянь. Дослідимо, скільки розв'язків може мати система рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Можливі такі випадки:

а) $\Delta \neq 0$. В цьому випадку система має єдиний розв'язок.

б) $\Delta = 0$ і принаймні один з визначників Δ_1 і Δ_2 відмінний від нуля. Система не має розв'язків.

в) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ і принаймні один з коефіцієнтів при невідомих відмінний від нуля. В цьому випадку система має безліч розв'язків.

Приклади останніх двох випадків дають системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x + 6y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

г) Всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулеві. Якщо хоч один з вільних членів c_1 і c_2 відмінний від нуля, то система не має розв'язків. Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то система задовольняється тотожно довільними значеннями x і y.

§ 20. Системи лінійних рівнянь з трьома невідомими

1. Рівняння першого степеня з трьома невідомими. Рівняння першого степеня з трьома невідомими x, y, z у нормальному вигляді записується так:

$$ax + by + cz = d.$$

П р и к л а д и. $10x+10y+8z=164$; $2x-3y+z=7$.

Одне рівняння першого степеня з трьома невідомими має безліч розв'язків. Справді, якщо візьмемо для x і y будь-які довільні числа, наприклад, $x=2$, $y=5$, і підставимо ці значення в рівняння $15x+10y+8z=164$, то дістанемо $15\cdot2+10\cdot5+8z=164$, або $80+8z=164$. Звідси $z=10\frac{1}{2}$. Якщо надамо інших довільних значень x і y, то дістанемо інше значення для z і т. д.

2. Система двох рівнянь з трьома невідомими. Систему двох рівнянь першого степеня з трьома невідомими в загальному вигляді записують так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2.\end{cases}$$

Взагалі, система двох рівнянь з трьома невідомими має безліч розв'язків. Розглянемо, наприклад, систему

$$\begin{cases} 3x+5y+4z=64,\\ 2x+y+z=14.\end{cases}$$

Надамо довільного значення невідомому x. Нехай $x=\frac{1}{4}$. Якщо підставимо це значення у рівняння нашої системи, то дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 5y+4z=63\frac{1}{4},\\ y+z=13\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $y=9\frac{1}{4}$, $z=4\frac{1}{4}$. Отже, дана система має розв'язок: $x=\frac{1}{4}$, $y=9\frac{1}{4}$, $z=4\frac{1}{4}$.

Надавши x іншого значення, дістанемо нову систему з двома невідомими, з якої знайдемо y і z і т. д.

Проте можна навести приклад системи, що не має жодного розв'язку, наприклад

$$\begin{cases} x-y+2z=5,\\ x-y+2z=7.\end{cases}$$

При будь-яких значеннях x, y і z, вираз $x-y+2z$ не може одночасно дорівнювати 5 і 7.

3. Система трьох рівнянь з трьома невідомими. Система трьох рівнянь з трьома невідомими має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

Тут x, y, z — невідомі, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 — дані числа.

Усі властивості рівнянь з одним і двома невідомими залишаються справедливими і для системи рівнянь з трьома невідомими. Тому для розв'язування даної системи застосовують ті самі способи, що й для розв'язування системи двох рівнянь з двома невідомими.

П р и к л а д 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 15x+10y+8z=164,\\ x+y+z=16,\\ z=2y.\end{cases}$$

Розв'язання. Виключаємо x з першого і другого рівнянь даної системи*. Для цього помножимо обидві частини другого рівняння на 15:

$$\begin{cases} 15x+15y+15z=240,\\ 15x+10y+8z=164.\end{cases}$$

Коефіцієнти при x рівні. Віднявши від першого рівняння друге, дістанемо $5y+7z=76$. Разом з третім рівнянням воно утворює систему рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 5y+7z=76,\\ z=2y,\end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо: $y=4$, $z=8$.

Якщо підставимо ці значення у перше або друге рівняння, то дістанемо $x=4$. Отже, дана система трьох рівнянь з трьома невідомими має єдиний розв'язок: $x=4$, $y=4$, $z=8$.

П р и к л а д 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 7x+6y+7z=100,\\ x-2y+z=0,\\ 3x+y-2z=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння на 3 і додамо його до першого:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 7x+6y+7z=100\\ 3x-6y+3z=0\end{array}\\ \hline 10x\quad+10z=100\end{array}\ \text{або}\ x+z=10.$$

* Цю систему неважко також розв'язати, підставивши в перші два рівняння замість z вираз $2y$, що дорівнює йому.

Помножимо третє рівняння на 2 і додамо до другого:

$$\begin{array}{l} x - 2y + \ z = 0 \\ 6x + 2y - 4z = 0 \\ \hline 7x \qquad\ - 3z = 0. \end{array}$$

Здобуті два рівняння утворюють систему:

$$\begin{cases} x + \ z = 10, \\ 7x - 3z = \ 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знайдемо: $x = 3$, $z = 7$.

Якщо підставимо значення x і z у третє рівняння системи, дістанемо:

$$9 + y - 14 = 0, \ y = 5.$$

Відповідь. Система має єдиний розв'язок: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

В окремих випадках, враховуючи специфічні властивості даної системи, можна застосовувати прийоми, які спрощують процес розв'язування.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо почленно всі три рівняння і поділимо на 2:

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Віднімемо від нього послідовно третє, друге і перше рівняння, і знаходимо:

$$x = \frac{a + b + c}{2} - c = \frac{a + b - c}{2};$$

$$y = \frac{a - b + c}{2}; \ z = \frac{-a + b + c}{2}.$$

Приклад 4. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0, \end{cases}$$

де a, b, c — попарно різні числа.

Розв'язання. Якщо віднімемо друге рівняння від першого, то дістанемо:

$$(a - b)y + (a^2 - b^2)z + (a^3 - b^3) = 0.$$

Скоротимо на $(a - b)$ (бо $a \neq b$):

$$y + (a + b)z + (a^2 + ab + b^2) = 0.$$

Аналогічно, віднімаючи від першого рівняння третє, знаходимо:

$$y + (a + c)z + (a^2 + ac + c^2) = 0;$$

віднімаючи почленно здобуті рівняння, виключаємо y:

$$(b - c)z + (ab - ac + b^2 - c^2) = 0,$$

звідки

$$z = -(a + b + c).$$

Тоді з рівняння

$$y + (a + b)z + (a^2 + ab + b^2) = 0$$

дістанемо

$$y = ab + bc + ac,$$

і, використавши перше рівняння системи, знайдемо $x = -abc$.

4. Розв'язування систем трьох лінійних рівнянь за допомогою визначників. Визначником третього порядку, складеним з таблиці дев'яти чисел

$$\begin{array}{l} a_1, \ b_1, \ c_1, \\ a_2, \ b_2, \ c_2, \\ a_3, \ b_3, \ c_3, \end{array}$$

називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Визначники третього порядку можна обчислити за *правилом Сарруса.* Дописавши до даної таблиці перший і другий стовпці, складемо добуток елементів, що містяться на «головній діагоналі» (рис. 21), а також добуток елементів, що містяться на паралельних їй діагоналях, і візьмемо ці добутки з їх знаками; складемо добуток елементів, що містяться на «побічній діагоналі», а також на паралельних їй діагоналях, і візьмемо ці добутки з протилежним знаком. Алгебраїчна сума всіх добутків дорівнює Δ.

Можна обчислити визначник за допомогою правила, що називається *схемою трикутників* (рис. 22). На лівому рисунку з'єднані місця таб-

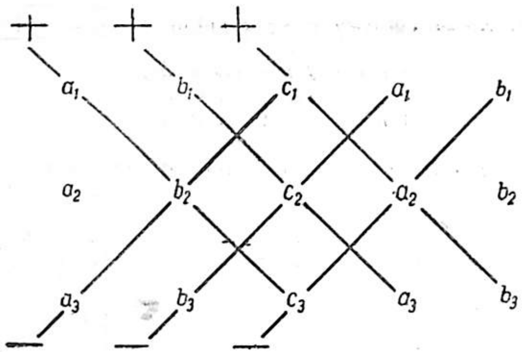


Рис. 21.

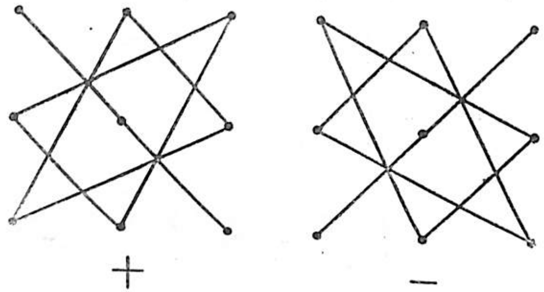


Рис. 22.

лиці, для яких добутки елементів слід взяти з своїми знаками. На правому рисунку з'єднані ті місця таблиці, для яких добутки елементів слід брати з протилежними знаками.

П р и к л а д. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Відповідно до правила Саррюса, маємо $\Delta = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -11$.

Тепер розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Якщо система має розв'язок, то його можна подати в зручному для запам'ятовування вигляді:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Якщо позначимо визначники, що стоять у чисельнику, відповідно через Δ_1, Δ_2, Δ_3 і визначник, що стоїть у знаменнику, через Δ (визначник системи рівнянь), розв'язок системи рівнянь запишемо так:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Ці рівності виражають правило Крамера для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

П р и к л а д. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + 3z = 7, \\ 2x + 3y - z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

За правилом Крамера знаходимо єдиний розв'язок системи: $x = \frac{4}{4} = 1$; $y = \frac{0}{4} = 0$; $z = \frac{8}{4} = 2$.

5. Дослідження системи рівнянь. Дослідження системи робиться відповідно до таких можливих випадків.

а) $\Delta \neq 0$. Система має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

б) $\Delta = 0$ і принаймні один з визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 відмінний від нуля. В цьому випадку система не має розв'язків або має безліч розв'язків*.

Приклад. Дослідити систему

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + 2z = -1, \\ 11x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Відповідь. Система не має розв'язків.

Коли всі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулеві, то система не має розв'язків (якщо хоч один з вільних членів відмінний від нуля) або задовольняється тотожно (якщо всі вільні члени дорівнюють нулеві).

6. Однорідні системи. Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо всі вільні члени її дорівнюють нулеві. Однорідна система трьох рівнянь з трьома невідомими має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases}$$

Однорідна система не може бути несумісною, бо вона завжди має нульовий, або тривіальний, розв'язок $x = y = z = 0$. Для того щоб система однорідних рівнянь допускала розв'язки, відмінні від тривіального, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулеві.

§ 21. Розв'язування задач за допомогою системи рівнянь

Задача. Для корму 8 коням і 15 коровам щодня відпускали 162 *кг* сіна. Скільки сіна щодня видавали на кожного коня і кожну корову, якщо 5 коней з'їдали щодня сіна на 3 *кг* більше, ніж 7 корів?

* Уточнення наводяться в курсі вищої алгебри, наприклад Л. Я. Окунєв, Вища алгебра, Учбово-педагогічне видавництво, 1958.

Розв'язання. Нехай для коня щодня відпускали x *кг* сіна,
а для корови » » y » »

Тоді з першої частини умови випливає:

$$8x + 15y = 162,$$

а з другої частини умови — ще одне рівняння:

$$5x - 7y = 3.$$

Розв'яжемо систему цих рівнянь:

$$\begin{cases} 8x + 15y = 162 \\ 5x - 7y = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{r} 5 \\ -8 \end{array} \right| \quad \begin{array}{r} -40x + 75y = 810 \\ -40x + 56y = -24 \\ \hline 131y = 786 \\ y = 6. \end{array}$$

$$5x - 42 = 3,$$
$$x = 9.$$

Відповідь. 9 *кг* і 6 *кг* сіна.

Задача. Латунь складається із міді й цинку. Кусок латуні вагою 124 *г* при зануренні у воду «втратив» 15 *г*. Скільки в ньому міститься міді й цинку окремо, якщо відомо, що 89 *г* міді «втрачають» у воді 10 *г*, а 7 *г* цинку — 1 *г*.

Розв'язання. Нехай у латуні було x грамів міді і y грамів цинку. Тоді $x + y = 124$. Оскільки мідь «втрачає» $\frac{10}{89}$ своєї ваги, а цинк $\frac{1}{7}$, то x грамів міді втратять $\frac{10}{89}x$, а y грамів цинку $\frac{1}{7}y$. Отже, $\frac{10}{89}x + \frac{1}{7}y = 15$.

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо: $x = 89$, $y = 35$.

Відповідь. 89 *г* міді і 35 *г* цинку.

Задача. Пароплав проплив 100 *км* за течією ріки і 64 *км* проти течії за 9 *год*. Другим разом за цей час він проплив 80 *км* проти течії і 80 *км* за течією ріки. Обчислити швидкість пароплава в стоячій воді і швидкість течії ріки.

Вказівка. Швидкість руху за течією дорівнює сумі власної швидкості пароплава і швидкості течії. Швидкість руху проти течії дорівнює різниці між власною швидкістю пароплава і швидкістю течії.

Розв'язання. Нехай власна швидкість пароплава в *км/год* дорівнює x, а швидкість течії y.

Використаємо табличний запис.

Етапи	Напрямок руху	Відстань (*км*)	Швидкість (*км/год*)	Час (*год*)	Витрачено часу
Перший	За течією	100	$x+y$	$\frac{100}{x+y}$	9 *год*
	Проти течії	64	$x-y$	$\frac{64}{x-y}$	
Другий	Проти течії	80	$x-y$	$\frac{80}{x-y}$	9 *год*
	За течією	80	$x+y$	$\frac{80}{x+y}$	

Маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{100}{x+y} + \dfrac{64}{x-y} = 9, \\ \dfrac{80}{x+y} + \dfrac{80}{x-y} = 9. \end{cases}$$

Це нелінійна система, але її можна звести до лінійної. Позначимо

$$\frac{1}{x+y} = u, \quad \frac{1}{x-y} = v.$$

Тоді дістанемо

$$\left\{ \begin{array}{l} 100u + 64v = 9 \\ 80u + 80v = 9 \end{array} \right. \left| \begin{array}{r} 5 \\ -4 \end{array} \right| \begin{array}{r} 500u + 320v = 45 \\ \underline{-320u - 320v = -36} \\ 180u \qquad\quad = 9 \end{array}$$

$$u = \frac{1}{20}$$

$$80 \cdot \frac{1}{20} + 80v = 9,$$

$$v = \frac{9}{80} - \frac{1}{20} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}.$$

Отже,

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{x-y} = \frac{1}{16},$$

або

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо: $x = 18$, $y = 2$.

Відповідь. 18 *км/год* і 2 *км/год*.

Задача. Два трактори різної потужності при спільній роботі зорали за 15 *год* $\frac{1}{6}$ всього поля. Якби перший трактор працював один протягом 12 *год*, а другий — протягом 20 *год*, то вони зорали б 20% всього поля. За який час можна зорати все поле кожним трактором окремо?

Розв'язання. Нехай першим трактором можна зорати поле за x (*год*), а другим — за y (*год*). Тоді за годину перший трактор зоре $\frac{1}{x}$ частину поля, а другий — $\frac{1}{y}$. За умовою задачі маємо:

$$15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{6}, \quad \frac{12}{x} + \frac{20}{y} = \frac{1}{5} \left(\text{оскільки} \quad 20\% = \frac{1}{5}\right).$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо $x = 360$, $y = 120$.

Відповідь. 360 *год* і 120 *год*.

Задача. З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 650 *км*, назустріч один одному вирушили два поїзди. Якщо обидва поїзди вирушать з пунктів одночасно, вони зустрінуться через 10 *год*. Якщо другий поїзд вирушить на 4 *год* і 20 *хв* раніше, ніж перший, то вони зустрінуться через 8 *год* після відправлення першого. Обчислити середню швидкість кожного поїзда.

Розв'язання. Нехай швидкість першого поїзда x (*км/год*), швидкість другого y (*км/год*), тоді в першому випадку перший поїзд пройде до зустрічі $10x$ (*км*), а другий $10y$ (*км*). Отже, $10x + 10y = 650$. В другому випадку перший поїзд пройде до зустрічі $8x$ (*км*), а другий, який йшов $12\frac{1}{3}$ *год*, пройде $12\frac{1}{3}y$ (*км*). Отже, $8x + 12\frac{1}{3}y = 650$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 10x + 10y = 650, \\ 8x + 12\frac{1}{3}y = 650, \end{cases}$$

дістанемо: $x = 35$, $y = 30$.

Відповідь. 35 *км/год* і 30 *км/год*.

З а д а ч а. Два поїзди вирушили одночасно назустріч один одному з станцій A і B, відстань між якими дорівнює 600 *км*. Перший поїзд приходить на станцію B на 3 *год* раніше, ніж другий на станцію A. В той час, коли перший поїзд проходить 250 *км*, другий пройде 200 *км*. Знайти швидкість кожного поїзда.

Розв'язання. Нехай швидкість першого поїзда x (*км/год*), другого y (*км/год*). Відстань у 600 *км* перший поїзд проходить за $\frac{600}{x}$ *год*, а другий — за $\frac{600}{y}$ *год*. Згідно з умовою задачі, запишемо систему рівнянь

$$\frac{600}{x} + 3 = \frac{600}{y}, \quad \frac{250}{x} = \frac{200}{y},$$

розв'язавши яку, дістанемо: $x = 50$ (*км/год*); $y = 40$ (*км/год*).

Відповідь. 50 *км/год* і 40 *км/год*.

З а д а ч а. Відстань між селами по шосе дорівнює 19 *км*. З села A до села B виїхав велосипедист з деякою сталою швидкістю; через 15 *хв* після нього в тому самому напрямку виїхав автомобіліст. Через 10 *хв* після виїзду він наздогнав велосипедиста і продовжував їхати до села B, де, не зупиняючись, повернув назад і через 50 *хв* після свого виїзду з A зустрів велосипедиста вдруге. Обчислити швидкості автомобіліста і велосипедиста.

Розв'язання. Нехай швидкість велосипедиста x (*км/хв*), автомобіліста — y (*км/хв*). Автомобіліст був у дорозі 10 *хв*, а велосипедист $10 + 15 = 25$ (*хв*), коли його наздогнав автомобіліст. У цей момент відстані, пройдені ними, були однакові. Отже, $25x = 10y$. Коли, повертаючись назад, автомобіліст зустрів велосипедиста, автомобіліст пройшов уже $50y$ (*км*), а велосипедист — $65x$ (*км*). Ці відстані в сумі становлять подвійну відстань між селами A і B. Тому $65x + 50y = 38$. Розв'язавши систему рівнянь $25x = 10y$ і $65x + 50y = 38$, знайдемо: $x = 0,2$ (*км/хв*), $y = 0,5$ (*км/хв*).

Відповідь. 0,5 *км/хв* і 0,2 *км/хв*.

З а д а ч а. По колу рухаються два тіла; перше пробігає коло на 5 *сек* швидше від другого. Коли вони рухаються в одному напрямку, то зустрічаються кожні 100 *сек*. Яку частину кола (в градусах) пробігає кожне тіло за 1 *сек*?

Розв'язання. Нехай за 1 *сек* перше тіло пробігає дугу в x (градусів), а друге — y (градусів). З першої умови знаходимо $\frac{360}{y} - \frac{360}{x} = 5$. Кожної секунди відстань між тілами (по дузі) збільшується на $x - y$ (градусів). За час, що проходить від однієї зустрічі до іншої (тобто за 100 *сек*), відстань повинна збільшитися на 360°. Тому $100 (x - y) = 360$. Здобута система має два розв'язки: $x_1 = 18$, $y_1 = 14,4$; $x_2 = -14,4$, $y_2 = -18$. Обидва вони придатні і мають один

і той самий фізичний смисл (змінюються лише номера тіл і напрямок руху).

Відповідь. Перше тіло за 1 *сек* пробігає 18°, друге — 14°24′.

З а д а ч а. Велосипедист прибув з пункту A до пункту B у призначений час, рухаючись з певною швидкістю. Якби він збільшив цю швидкість на 3 *км/год*, то прибув би на місце раніше на годину, а якби він проїжджав за годину на 2 *км* менше, ніж в дійсності, то спізнився б на годину. Обчислити відстань між пунктами A і B, швидкість велосипедиста і час його руху.

Розв'язання. Невідому відстань позначимо через S, швидкість велосипедиста — через v і час його руху — через t. Використаємо табличний запис.

Етапи	Відстань (*км*)	Швидкість (*км/год*)	Час *год*
Перший	S	v	t
Другий	S	$v + 3$	$t - 1$
Третій	S	$v - 2$	$t + 1$

Маємо систему трьох рівнянь (нелінійних) з трьома невідомими

$$\begin{cases} vt = S, \\ (v + 3) \cdot (t - 1) = S, \\ (v - 2) \cdot (t + 1) = S. \end{cases}$$

Цю систему можна звести до системи лінійних рівнянь:

з $vt = (v + 3) \cdot (t - 1)$ і $vt = (v - 2) \cdot (t + 1)$

випливає

$$\begin{cases} -v + 3t = 3, \\ v - 2t = 2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо $t = 5$, $v = 12$. Тоді $S = 12 \cdot 5 = 60$ (*км*).

Відповідь. 60 *км*, 12 *км/год*, 5 *год*.

§ 22. Квадратні рівняння

1. Загальні поняття. Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — невідоме, а коефіцієнти a, b і c — дані числа, називається *квадратним рівнянням*. У квадратному рівнянні $a \neq 0$, бо в противному разі воно являло б собою рівняння першого степеня: $bx + c = 0$. Число a може бути і додатним, і від'ємним. Якщо $a < 0$, то, помноживши обидві частини рівняння на -1, дістанемо рівняння з додатним коефіцієнтом при x^2. Коефіцієнт c називається вільним членом, ax^2 — старшим членом, bx — членом, що містить перший степінь невідомого.

Якщо $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ називається *повним квадратним рівнянням загального виду*.

Поділивши всі члени його на a ($a \neq 0$), дістанемо

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Вважаючи $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, маємо рівняння

$$x^2 + px + q = 0,$$

яке називається повним квадратним рівнянням зведеного виду або *зведеним квадратним рівнянням*. Якщо хоч один з коефіцієнтів b чи c дорівнює нулеві, то квадратне рівняння називається *неповним*. Неповні квадратні рівняння можуть бути трьох видів:

а) якщо $b = 0$, $c \neq 0$, то $ax^2 + c = 0$;

б) » $b \neq 0$, $c = 0$, то $ax^2 + bx = 0$;

в) » $b = 0$, $c = 0$, то $ax^2 = 0$.

2. Розв'язування неповних квадратних рівнянь. а) Рівняння виду $ax^2 + c = 0$ і $ax^2 = 0$.

Щоб розв'язати рівняння виду $ax^2 + c = 0$, переносимо вільний член у праву частину і знаходимо:

$$x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Якщо коефіцієнти a і c мають однакові знаки, то рівняння $ax^2 + c = 0$ в області дійсних чисел не має розв'язків, бо квадрат дійсного числа не може дорівнювати від'ємному числу $-\frac{c}{a}$. Якщо a і c мають протилежні знаки, то рівняння $ax^2 + c = 0$ завжди має два корені.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$2x^2 - 32 = 0.$$

Розв'язання.

$$2x^2 = 32,$$
$$x^2 = 16,$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4.$$

Відповідь. $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Приклад. Розв'язати рівняння $2x^2 + 8 = 0$.

Розв'язання. $x^2 = -4$.

Відповідь. В області дійсних чисел рівняння не має розв'язку.

Якщо a і c мають протилежні знаки, то рівняння $ax^2 + c = 0$ можна розв'язати, застосовуючи розкладання на множники.

Приклад.

$$4x^2 - 9 = 0, \quad (2x - 3)(2x + 3) = 0;$$
$$2x - 3 = 0, \quad x_1 = \frac{3}{2};$$
$$2x + 3 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння $ax^2 = 0$ має рівні між собою корені: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

б) Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$. Щоб розв'язати рівняння $ax^2 + bx = 0$, треба його ліву частину розкласти на множники: $x(ax + b) = 0$. Тоді або $x = 0$, або $ax + b = 0$, звідки $x = -\frac{b}{a}$. Отже, рівняння $ax^2 + bx = 0$ має два корені:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 - 12x = 0$.

Розв'язання.

$$x(x - 12) = 0, \quad x_1 = 0,$$
$$x - 12 = 0, \quad x_2 = 12.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$.

Розв'язання.

$$47 - 3x^2 - 4x = 34 - 4x - 62; \quad 47 - 3x^2 + 28 = 0,$$
$$3x^2 = 75; \quad x^2 = 25; \quad x = \pm\sqrt{25}; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = -5.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3.$$

Розв'язання.

$$\frac{5x^2 + \overset{5}{9}}{6} - \frac{4x^2 - \overset{6}{9}}{5} = \overset{30}{3},$$

$$25x^2 + 45 - 24x^2 + 54 = 90; \quad x^2 + 99 = 90; \quad x^2 + 9 = 0.$$

Відповідь. Рівняння не має розв'язку (в області дійсних чисел).

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $10(x-2)+19=(5x-1)\times$ $\times(1+5x)$.

Розв'язання.

$$10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x),$$
$$10x-20+19=25x^2-1,\ 10x-25x^2=0;$$

$$5x(2-5x)=0;\ x_1=0,\quad 2-5x=0,\ x_2=\frac{2}{5}.$$

Відповідь. $x_1=0;\ x_2=\frac{2}{5}$.

3. **Зведене квадратне рівняння.** а) Р о з в'я з а н н я к в а д р а т н о г о р і в н я н н я в и д і л е н н я м п о в н о г о к в а д р а т а д в о ч л е н а. Нехай треба розв'язати рівняння x^2+14x+ $+24=0$.

Розкладемо ліву частину на множники, виділивши з виразу x^2+ $+14x+24$ повний квадрат двочлена. Перший член є квадрат числа x (першого числа), другий член ($14x$) можна розглядати, як подвоєний добуток першого числа x на друге число, що дорівнює 7, бо $14x=2\times$ $\times x\cdot 7$. Щоб дістати повний квадрат двочлена, додамо квадрат другого числа $7^2=49$, а щоб числове значення не змінилося, віднімемо це саме число 49. Дістанемо:

$$(x^2+14x+49)-49+24=0,\ \text{або}\ \ (x+7)^2-25=0.$$

Розклавши ліву частину на множники, дістанемо

$$(x+7+5)(x+7-5)=0,\ \text{або}\ (x+12)(x+2)=0.$$

Отже, рівняння $x^2+14x+24=0$ рівносильне такому:

$$(x+12)(x+2)=0,$$

звідси

$$x+2=0;\ x_1=-2;\ x+12=0;\ x_2=-12.$$

П р и к л а д. Розв'язати рівняння виділенням повного квадрата двочлена:

$$\text{а)}\ x^2+8x-33=0;\ \text{б)}\ x^2-11x+30=0.$$

Розв'язання.

$$\text{а)}\ x^2+2\cdot 4\cdot x+16-16-33=0,\ \text{або}$$
$$(x+4)^2-49=0,\ (x+4-7)(x+4+7)=0,$$
$$(x-3)(x+11)=0.$$

Звідси

$$x-3=0,\ x_1=3;\ x+11=0,\ x_2=-11.$$

$$\text{б)}\ x^2-2\cdot\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}-\frac{121}{4}+30=0^5,\ \left(x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,$$

$$\left(x-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)=0^5,\ (x-6)(x-5)=0.$$

Звідси $x-6=0,\ x_1=6;\ x-5=0,\ x_2=5$.

б) Ф о р м у л а к о р е н і в з в е д е н о г о к в а д р а т н о г о р і в н я н н я. За допомогою виділення повного квадрата двочлена у рівнянні $x^2+px+q=0$ можна одержати загальну формулу для коренів зведеного квадратного рівняння:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Цю формулу можна прочитати так: *корінь зведеного квадратного рівняння дорівнює половині коефіцієнта при невідомому в першому степені, взятому з протилежним знаком, плюс — мінус квадратний корінь з квадрата половини цього коефіцієнта без вільного члена.*

За цією формулою можна визначити дійсні корені зведеного рівняння лише у випадку, коли вираз $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ (він називається *дискримінантом* зведеного квадратного рівняння) невід'ємний. Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$, то дане рівняння $x^2+px+q=0$ має два різних корені.

Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$, то дане рівняння не має дійсних коренів.

Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$, то обидва корені рівні: $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$.

Розглянемо на прикладах, як за допомогою цієї формули можна розв'язувати рівняння.

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)}\ x^2-4x-60=0;$$

$$\text{б)}\ x^2-\frac{5}{3}x-26=0.$$

Розв'язання.

а) Тут $p=-4,\ q=-60$. За формулою маємо:

$$x=2\pm\sqrt{4-(-60)}=2\pm\sqrt{64}=2\pm 8;\ x_1=2+8=10;$$
$$x_2=2-8=-6.$$

б) Тут $p = -\frac{5}{3}$, $q = -26$. За формулою маємо:

$$x = -\frac{-\frac{5}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{5}{3}}{2}\right)^2 - (-26)} = \frac{5}{6} \pm \sqrt{26\frac{25}{36}} =$$

$$= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{961}{36}} = \frac{5}{6} \pm \frac{31}{6}; \; x_1 = \frac{5}{6} + \frac{31}{6} = 6, \; x_2 = \frac{5}{6} - \frac{31}{6} = -4\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 + 2mx - 2(mn + 0{,}5n^2) = 0$.

Розв'язання. Тут $p = 2m$, $q = -2\left(mn + \frac{1}{2}n^2\right)$. За формулою маємо:

$$x = -m \pm \sqrt{m^2 + 2\left(mn + \frac{1}{2}n^2\right)} = -m \pm \sqrt{m^2 + 2mn + n^2} =$$

$$= -m \pm \sqrt{(m+n)^2} = -m \pm |m + n|; \; x_1 = -m + (m + n) = n;$$

$$x_2 = -m - (m + n) = -2m - n.$$

Примітка. Формули $\pm|m + n|$ і $\pm(m + n)$ дають однакові пари чисел, тому в даному випадку замість $-m \pm |m + n|$ можна писати $-m \pm (m + n)$.

Далі наведено кілька прикладів для дослідження квадратних рівнянь зведеного виду.

Приклад 1. Не розв'язуючи рівнянь, визначити, які з них мають два різних корені або не мають коренів (дійсних).

а) $x^2 - 4x + 4 = 0$; б) $x^2 - 2x + 5 = 0$; в) $x^2 + 16 + 48 = 0$.

Розв'язання. а) Тут $p = -4$, $q = 4$; $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4 = 0$, отже, рівняння має два рівних корені.

б) Тут $p = -2$ і $q = 5$, оскільки $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 5 < 0$, то рівняння не має дійсних коренів.

в) Тут $p = 16$ і $q = 48$, оскільки $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{16}{2}\right)^2 - 48 > 0$, то рівняння має два різних дійсних корені.

Приклад 2. При якому значенні k рівняння $x^2 + kx + 15 = 0$ має корінь, що дорівнює 5.

Розв'язання.

$$5^2 + k \cdot 5 + 15 = 0, \; 25 + 5k + 15 = 0, \; 5k = -40, \; k = -8.$$

Відповідь. При $k = -8$.

Приклад 3. При яких значеннях a рівняння мають по два рівних дійсних корені:

а) $x^2 + ax + 9 = 0$; б) $x^2 + 12x + a = 0$;
в) $x^2 + 2(a - 4)x + a^2 + 6a + 3 = 0$.

Розв'язання. а) Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має рівні корені при умові $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$. У нашому випадку $p = a$, $q = 9$. Отже,

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 9, \; a^2 = 36, \; a = \pm 6.$$

$$\text{б)}\; p = 12, \quad q = a, \quad \left(\frac{12}{2}\right)^2 = a, \quad a = 36.$$

в) $p = 2(a - 4)$, $q = a^2 + 6a + 3$, $(a - 4)^2 = a^2 + 6a + 3$,

$$a^2 - 8a + 16 = a^2 + 6a + 3, \quad 14a = 13, \quad a = \frac{13}{14}.$$

4. Повне квадратне рівняння загального виду. Квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ можна розв'язувати за формулою коренів зведеного рівняння, якщо дане рівняння спочатку поділити на a $(a \neq 0)$. Проте можна користуватися і спеціальною формулою:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Цю формулу можна прочитати так: *корінь повного квадратного рівняння загального виду дорівнює дробу, чисельник якого є коефіцієнт при невідомому в першому степені, взятий з протилежним знаком, плюс — мінус корінь квадратний з квадрата цього коефіцієнта без почетвереного добутку коефіцієнта при невідомому другого степеня на вільний член, а знаменник є подвоєний коефіцієнт при невідомому другого степеня.*

Вираз $b^2 - 4ac$, що входить у цій формулі під радикал, називається *дискримінантом* квадратного рівняння загального виду.

Якщо $b^2 - 4ac > 0$, рівняння має два різних дійсних корені.

Якщо $b^2 - 4ac = 0$, рівняння має два однакових корені:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Якщо $b^2 - 4ac < 0$, рівняння не має коренів (дійсних).

На наведених нижче прикладах показано, як можна застосовувати загальну формулу коренів для розв'язування квадратних рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

Розв'язання. Тут $a = 3$, $b = 11$, $c = 6$. За формулою маємо:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 4\cdot 3\cdot 6}}{2\cdot 3} = \frac{-11\pm\sqrt{121-72}}{6} =$$

$$= \frac{-11\pm\sqrt{49}}{6} = \frac{-11\pm 7}{6}; \quad x_1 = \frac{-11+7}{6} = -\frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{-11-7}{6} = -3.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{3}.$$

Розв'язання.

$$72x + 6(x^2-6x+9) = 3(x^2+6x+9) + 8(x^2-1);$$

$$72x + 6x^2 - 36x + 54 = 3x^2 + 18x + 27 + 8x^2 - 8;$$

$$-5x^2 + 18x + 35 = 0, \quad 5x^2 - 18x - 35 = 0;$$

$$x = \frac{18\pm\sqrt{324+700}}{10} = \frac{18\pm\sqrt{1024}}{10} = \frac{18\pm 32}{10};$$

$$x_1 = 5;\ x_2 = -1{,}4.$$

Примітка. За загальною формулою можна розв'язувати також і квадратні рівняння зведеного виду.

Якщо b — парне число, то загальну формулу краще представити в такому вигляді

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння:

а) $3x^2 - 14x - 80 = 0$; б) $ax^2 - 2(a+b)x + 4b = 0$.

Розв'язання. а) Тут $a = 3$, $b = -14$, $c = -80$. Підставивши у формулу значення коефіцієнтів, дістанемо

$$x = \frac{7\pm\sqrt{7^2+3\cdot 80}}{3} = \frac{7\pm\sqrt{289}}{3} = \frac{7\pm 17}{3};\ x_1 = 8;\ x_2 = -\frac{10}{3}.$$

б) За формулою маємо:

$$x = \frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{a} = \frac{a+b\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{a} =$$

$$= \frac{a+b\pm(a-b)^*}{a};$$

$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2b}{a}.$

Приклад. Не розв'язуючи рівнянь, визначити, скільки дійсних коренів має кожне з них:

а) $4x^2 + 6x + 9 = 0$; б) $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Розв'язання. а) $b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = 36 - 144 < 0$. Рівняння не має дійсних коренів.

б) $(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 > 0$. Рівняння має два дійсних різних корені.

Приклад. При якому значенні k рівняння $kx^2 + 12x - 3 = 0$ має корінь, що дорівнює $\frac{1}{5}$?

Розв'язання.

$$k\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 12\cdot\frac{1}{5} - 3 = 0, \quad \frac{k}{25} + \frac{12}{5} - 3 = 0,$$

$$k + 60 - 75 = 0, \quad k = 15.$$

Приклад. При якому значенні a рівняння

$$ax^2 + 4x + 1 = 0$$

має два рівних корені?

Розв'язання. Рівняння має два рівних корені при умові, що його дискримінант дорівнює нулеві. В нашому випадку $4^2 - 4\cdot 1\cdot a = 0$, звідки $a = 4$.

5. Залежність між коефіцієнтами і коренями квадратного рівняння. Між коефіцієнтами і коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ існують такі залежності:

а) *Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює коефіцієнту при невідомому в першому степені, взятому з протилежним знаком,* тобто

$$x_1 + x_2 = -p\cdot z.$$

* Див. примітку на стор. 244.

б) *Добуток коренів цього рівняння дорівнює вільному члену*, тобто

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Ці залежності відомі під назвою *теореми Вієта*.

Приклади. а) Рівняння $x^2 + 2x - 80 = 0$ має корені

$$x_1 = 8, x_2 = -10, \quad x_1 + x_2 = 8 - 10 = -2;$$
$$x_1 \cdot x_2 = 8(-10) = -80.$$

б) Рівняння $x^2 + 9x + 14 = 0$ має корені

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -7, \quad x_1 + x_2 = -2 + (-7) = -9; \quad x_1x_2 = (-2)(-7) = 14.$$

Правильним буде і обернене твердження: якщо сума двох чисел x_1 і x_2 дорівнює $-p$, а їх добуток дорівнює q, то ці числа — корені квадратного рівняння

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для випадку повного квадратного рівняння незведеного виду існують залежності:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = -\frac{c}{a}.$$

Наприклад, рівняння $4x^2 + 25x - 21 = 0$ має корені:

$$x_1 = -7, \quad x_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_1 + x_2 = -7 + \frac{3}{4} = -\frac{25}{4}, \quad x_1x_2 = (-7)\cdot\frac{3}{4} = -\frac{21}{4}.$$

Ці твердження дають можливість складати квадратні рівняння, які мали б наперед задані корені, а також розв'язувати багато інших задач на складання і дослідження квадратних рівнянь.

Приклад 1. Скласти квадратне рівняння, що має корені 5 і -6.

Розв'язання. Тут $x_1 + x_2 = 5 + (-6) = -1$, $x_1x_2 = 5(-6) = -30$; отже, $p = 1$; $q = -30$. Дістаємо рівняння

$$x^2 + x - 30 = 0.$$

Приклад 2. Скласти квадратне рівняння, корені якого були б оберненими кореням рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ так: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, і нехай його коренями будуть x_1 і x_2. Тоді

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{і} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

За умовою, коренями шуканого рівняння будуть $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$. Щоб дістати його коефіцієнти, обчислимо

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{c}.$$

Рівняння матиме такий вигляд:

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,$$

або

$$cx^2 + bx + a = 0.$$

Приклад 3. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + px + q = 0$, виразити суму квадратів його коренів через p і q.

Розв'язання. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$ і $x_1x_2 = q$;

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Приклад 4. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 3x + m = 0$. При якому значенні m різниця коренів даного рівняння дорівнюватиме 6?

Розв'язання. Маємо:

$$x_1 + x_2 = -3, \quad x_1x_2 = m,$$

звідси

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 9;$$
$$-4x_1x_2 = -4m.$$

Додаючи почленно рівності, одержуємо

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 9 - 4m,$$

або

$$(x_1 - x_2)^2 = 9 - 4m.$$

Тоді $6^2 = 9 - 4m$; значить $m = \frac{-27}{4}$.

§ 23. Задачі на складання квадратних рівнянь

Задача 1. Прямокутну ділянку, одна сторона якої на 10 *м* більша від другої, треба обгородити. Обчислити довжину огорожі, якщо відомо, що площа ділянки дорівнює 1200 *кв. м.*

Розв'язання. Нехай одна сторона прямокутника x, тоді інша буде $x + 10$. За умовою маємо:

$$x(x + 10) = 1200.$$

Отже, одержали квадратне рівняння:

$$x^2 + 10x - 1200 = 0.$$

Розв'язуючи його, дістаємо:

$$x_1 = 30, \; x_2 = -40.$$

Другий розв'язок рівняння відкидаємо, бо довжина сторони прямокутника не може бути виражена від'ємним числом. Тому довжина огорожі дорівнює

$$2x + 2(x + 10) = 2 \cdot 30 + 2(30 + 10) = 140 \; (м).$$

Відповідь. 140 *м.*

Задача 2. Бригада лісорубів повинна була за планом заготовити протягом кількох днів 216 *куб. м* дров. Протягом перших трьох днів бригада щодня виконувала установлену за планом норму, а потім кожного дня заготовляла 8 *куб. м* понад план. Тому вже за день до строку було заготовлено 232 *куб. м* дров. Скільки дров протягом дня треба було заготовити бригаді за планом?

Розв'язання. Нехай кількість дров, яку бригада повинна заготовити протягом дня за планом, дорівнює x (*куб. м*). Протягом перших трьох днів бригада заготовила $3x$ (*куб. м*). Решту днів вона заготовляла по $x + 8$ (*куб. м*). За планом бригада повинна була працювати $\frac{216}{x}$ (днів); при продуктивності $x + 8$ (*куб. м*) на день вона працювала $\frac{232 - 3x}{x + 8}$ (днів). Згідно з умовою задачі, маємо:

$$\frac{232 - 3x}{x + 8} + 3 + 1 = \frac{216}{x}, \quad \text{або} \quad \frac{232 - 3x}{x + 8} + 4 = \frac{216}{x}.$$

Після перетворень дістаємо рівняння $x^2 + 48x - 1728 = 0$. Його корені $x_1 = 24$, $x_2 = -72$. Отже, протягом дня бригада мала заготовити за планом 24 *куб. м.*

Відповідь. 24 *куб. м.*

Задача 3. Два автомобілі виходять з одного міста в інше. Швидкість першого на 10 *км/год* більша від швидкості другого, а тому перший автомобіль приходить до міста на 1 *год* раніше від другого. Обчислити швидкість обох автомобілів, якщо відомо, що відстань між містами дорівнює 560 *км.*

Розв'язання. Нехай швидкість другого автомобіля x (*км/год*). Тоді швидкість першого буде $x + 10$ (*км/год*). Значить, час руху першого автомобіля буде $\frac{560}{x}$; час руху другого дорівнює $\frac{560}{x + 10}$.

За умовою задачі перше з цих чисел на 1 більше від другого. Отже,

$$\frac{560}{x} - 1 = \frac{560}{x + 10}.$$

Після перетворень маємо: $x^2 - 10x + 5600 = 0$. Корені цього рівняння: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Відкидаючи другий корінь, бо швидкість не може бути від'ємною, дістаємо: швидкість першого автомобіля 70 *км/год.* Тоді швидкість другого дорівнює 80 *км/год.*

Відповідь. 70 *км/год* і 80 *км/год.*

Задача 4. Теплохід проплив за течією ріки 48 *км* і таку саму відстань проти течії, витративши на це 5 *год.* Обчислити швидкість теплохода в стоячій воді, якщо відомо, що швидкість течії ріки дорівнює 4 *км/год.*

Розв'язання. Позначимо швидкість теплохода у стоячій воді буквою x (*км/год*). Тоді його швидкість за течією ріки буде $x + 4$ (*км/год*), а швидкість проти течії — $x - 4$ (*км/год*). Значить, теплохід пропливе за течією 48 *км* за $\frac{48}{x + 4}$ *год* і проти течії за $\frac{48}{x - 4}$ *год.* За умовою задачі дістаємо:

$$\frac{48}{x - 4} + \frac{48}{x + 4} = 5.$$

Після перетворень дістаємо рівняння $5x^2 - 96x - 80 = 0$. Його корені: $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{4}{5}$. Значить, швидкість теплохода у стоячій воді була 20 *км/год.*

Відповідь. 20 *км/год.*

Задача 5. З пункту A відправили за течією ріки пліт. Через 5 *год* 20 *хв* слідом за плотом з цього самого пункту вийшов моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 2 *км*. З якою швидкістю (в *км/год*) рухався пліт, якщо моторний човен йшов швидше за нього на 12 *км/год*?

Розв'язання. Позначимо швидкість плоту через x (*км/год*), тоді швидкість моторного човна буде $x + 12$ (*км/год*). Час, протягом якого моторний човен наздогнав пліт (до цього моменту човен пройшов 20 *км*), буде: $\frac{20}{x+12}$ *год*. Пліт пройде 20 *км* за $\frac{20}{x}$ *год*. Але пліт плив на $5\frac{1}{3}$ *год* довше, ніж човен. Тоді

$$\frac{20}{x+12} + 5\frac{1}{3} = \frac{20}{x}.$$

Після перетворень дістаємо рівняння $x^2 + 12x - 45 = 0$. Його корені $x_1 = 3$, $x_2 = -15$. Від'ємний корінь не підходить за смислом задачі. Отже, пліт плив з швидкістю 3 *км/год*.

Відповідь. 3 *км/год*.

Задача 6. Два велосипедисти виїжджають одночасно назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 28 *км*, і через годину зустрічаються. Не зупиняючись, вони їдуть далі з тією самою швидкістю. Перший велосипедист прибув до пункту B на 35 *хв* раніше, ніж другий до пункту A. Обчислити швидкість кожного велосипедиста.

Розв'язання. Відстань між пунктами A і B зобразимо відрізком AB і припустимо, що велосипедисти зустрілися в точці C (рис. 23).

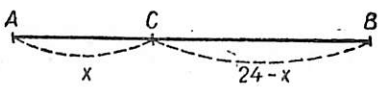


Рис. 23.

Нехай відстань AC (у *км*) дорівнює x. Тоді відстань CB (у *км*) буде $28 - x$. З умови задачі випливає, що швидкість першого велосипедиста x *км/год*, а другого $(28 - x)$ *км/год*. Перший пройшов відстань 28 *км* за $\frac{28}{x}$ *год*, а другий за $\frac{28}{28-x}$ *год*.

Оскільки перший велосипедист прибуває до пункту B на 35 *хв* $\left(\frac{7}{12}\text{ год}\right)$ раніше, ніж другий до пункту A, дістаємо рівняння:

$$\frac{28}{28-x} - \frac{7}{12} = \frac{28}{x}.$$

Після перетворень рівняння матиме такий вигляд: $x^2 + 68x - 1344 = 0$. Його корені: $x_1 = 16$, $x_2 = -84$. Від'ємний корінь не підходить за смислом задачі. Дістаємо, відповідно, швидкості велосипедистів 16 і 12 *км/год*.

Відповідь. 16 *км/год* і 12 *км/год*.

Задача 7. З двох пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 24 *км*, вирушили одночасно два автомобілі назустріч один одному. Після їх зустрічі автомобіль, що вийшов з пункту A, приїхав до пункту B через 16 *хв*, а другий автомобіль приїхав до пункту A через 4 *хв*. Обчислити швидкість кожного автомобіля.

Розв'язання. Зобразимо відстань від A до B відрізком AB і припустимо, що автомобілі зустрілися в точці C (рис. 24).

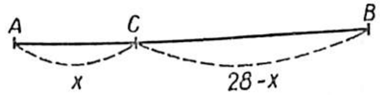


Рис. 24.

Нехай відстань AC дорівнює x (в *км*). Тоді відстань CB (в *км*) буде $24 - x$. Оскільки 4 *хв* $= \frac{1}{15}$ *год*, а 16 *хв* $= \frac{4}{15}$ *год*, то швидкість автомобіля, що вийшов з пункту A, дорівнює $\frac{24-x}{\frac{4}{15}} = \frac{15(24-x)}{4}$ (*км/год*). Швидкість автомобіля, що вийшов з пункту B, дорівнює: $x : \frac{1}{15} = 15x$ (*км/год*).

До зустрічі перший автомобіль їхав $x : \frac{15(24-x)}{4} = \frac{4x}{15(24-x)}$ (*год*); другий — $(24 - x) : 15x = \frac{24-x}{15x}$ (*год*). До зустрічі вони їхали один і той самий час, тому

$$\frac{4x}{15(24-x)} = \frac{24-x}{15x}.$$

Після перетворень дістаємо рівняння $x^2 + 16x - 192 = 0$. Його корені $x_1 = 8$, $x_2 = -24$.

Від'ємний корінь відкидаємо. Отже, відстань дорівнює 8 *км*. Тоді швидкості автомобілів: першого $\frac{15(24-8)}{4} = 60$ (*км/год*); другого $15 \cdot 8 = 120$ (*км/год*).

Відповідь. 60 *км/год* і 120 *км/год*.

Задача 8. За чотири дні спільної роботи двох тракторів різної потужності зорано $^2/_3$ колгоспного поля. За скільки днів можна зорати все поле кожним трактором окремо, якщо першим трактором можна зорати все поле на 5 днів швидше, ніж другим трактором?

Розв'язання. Припустимо, що другим трактором можна зорати все поле за x днів, тоді першим трактором можна зорати все поле за $x-5$ днів. Отже, за 4 дні другим трактором можна зорати $\frac{1}{x} \cdot 4 = \frac{4}{x}$ частину поля, а першим $\frac{1}{x-5} \cdot 4 = \frac{4}{x-5}$ частину. Оскільки це становить $\frac{2}{3}$ всього поля, дістанемо рівняння $\frac{4}{x} + \frac{4}{x-5} = \frac{2}{3}$. Після перетворення це рівняння матиме такий вигляд: $x^2 - 17x + 30 = 0$. Його корені $x_1 = 15$, $x_2 = 2$. Другий корінь не відповідає умові задачі, бо $2 - 5 = -3$.

Виходить, що другим трактором можна зорати все поле за 15 днів, а першим — за 10 днів.

Відповідь. 10 днів і 15 днів.

Задача 9. Колгосп купив для заправки тракторів на a карбованців лігроїну і на таку саму суму гасу, всього n *кг*. Скільки кілограмів лігроїну і скільки гасу купив колгосп, якщо кілограм першого на b карбованців дорожчий від другого?

Розв'язання. Нехай куплено x (*кг*) лігроїну. Тоді гасу куплено $n - x$ (*кг*). Ціна кілограма лігроїну буде $\frac{a}{x}$ крб., а гасу $\frac{a}{n-x}$ крб. Оскільки кілограм лігроїну на b карбованців дорожчий від кілограма гасу, дістаємо рівняння

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{n-x} = b.$$

Після перетворень рівняння матиме такий вигляд:

$$bx^2 - (2a + bn)x + an = 0.$$

Тоді

$$x = \frac{2a + bn \pm \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b}.$$

Знак плюс перед радикалом не годиться, тому що в цьому випадку x більший за n, бо*

$$\frac{2a+bn}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2} \quad \text{і} \quad \frac{\sqrt{4a^2+b^2n^2}}{2b} > \frac{\sqrt{b^2n^2}}{2b} > \frac{bn}{2b} = \frac{n}{2}.$$

Покажемо, що другий корінь додатний, тобто що

$$\frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} > 0$$

або, що

$$2a + bn > \sqrt{4a^2 + b^2n^2}.$$

$$\sqrt{4a^2 + b^2n^2 + 8a^2b^2n^2} = 2a + bn,$$

тоді

$$\sqrt{4a^2 + b^2n^2} < 2a + bn.$$

Отже, маємо: лігроїну

$$\frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} \ (кг),$$

а гасу

$$n - \frac{2a + bn - \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} = \frac{bn - 2a + \sqrt{4a^2 + b^2n^2}}{2b} \ (кг).$$

§ 24. Ірраціональні рівняння

1. Означення. *Ірраціональним* називається будь-яке рівняння, ліва і права частини якого є алгебраїчні вирази, причому хоч один з них ірраціональний.

Приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3} = 7; \quad \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-5} = 10; \quad \sqrt[3]{x} + x = 71.$$

Але рівняння $\sqrt{2x} + 3 = 7$, $\lg x - \sqrt{x-2} = 7$ не ірраціональні.

У елементарній алгебрі розглядаються лише такі ірраціональні рівняння, в яких радикали парного степеня припускаються арифметичними (а непарного степеня — додатними або від'ємними, залежно від знака підкореневого виразу).

Загальний метод розв'язування ірраціонального рівняння полягає в тому, що спочатку ізолюється один радикал, потім обидві

* З умови задачі випливає, що $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$.

частини рівняння підносять до степеня, тоді знову ізолюється радикал і т. д. Будь-яке ірраціональне рівняння після скінченного числа таких перетворень може бути зведене до раціонального рівняння. Одержане в результаті рівняння взагалі не буде еквівалентним даному. Тому, знайшовши розв'язки цього рівняння, треба перевірити їх способом підстановки в дане рівняння і відкинути, як сторонні, ті з них, які його не задовольняють. Проте, якщо обидві частини ірраціонального рівняння підносились до непарного степеня, то перевіряти розв'язок не обов'язково, бо в цьому випадку прийдемо до рівняння, еквівалентного даному.

Якщо рівняння містить радикали з невідомими в знаменнику, його слід, як завжди, звільнити від знаменника, виконавши необхідні перетворення.

Перш ніж почати розв'язування ірраціонального рівняння, доцільно визначити область допустимих значень для невідомого, бо в деяких випадках після цього взагалі відпадає необхідність розв'язувати рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3.$$

Розв'язання. Для першого радикала $x \geqslant 3$, для другого $x \leqslant 2$. В області дійсних чисел рівняння не має розв'язків, бо немає спільних значень x, для яких обидва радикали мають значення.

Відповідь. Дане рівняння не має розв'язку.

2. Розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $3+\sqrt{x-2}=4$.

Розв'язання.

$$\sqrt{x-2}=4-3, \quad \sqrt{x-2}=1, \quad x-2=1, \quad x=3.$$

Перевірка. $3+\sqrt{3-2}=3+1=4$. Як бачимо, $x=3$ задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x=3$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-7}=x-13$.

Розв'язання. Піднесемо до квадрата обидві частини

$$x-7=x^2-26x+169;$$
$$x^2-27x+176=0, \ x_1=16, \ x_2=11.$$

Перевірка показує, що $x=16$ задовольняє рівняння, а $x_2=11$ не задовольняє. Адже ліва частина даного рівняння невід'ємне число; тоді і права частина має бути невід'ємним числом, а це можливо при умові, що $x \geqslant 13$.

Відповідь. $x=16$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$.

Розв'язання.

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}; \qquad 2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5;$$
$$x-46=-14\sqrt{x+5}; \qquad (x-46)^2=196(x+5);$$
$$x^2-288x+1136=0; \quad x_1=4, \quad x_2=284.$$

Значення $x=4$ задовольняє, а значення $x=284$ не задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x=4$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$.

Розв'язання. Область допустимих значень $x \geqslant 0$, $x \neq 16$ і $x \neq 49$.

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-7)=(\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-4);$$
$$x-2\sqrt{x}-7\sqrt{x}+14=x-6\sqrt{x}-4\sqrt{x}+24;$$
$$-9\sqrt{x}+14=-10\sqrt{x}+24; \quad \sqrt{x}=10; \quad x=100.$$

Перевірка. $\dfrac{\sqrt{100}-2}{\sqrt{100}-4}=\dfrac{\sqrt{100}-6}{\sqrt{100}-7}$; $\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Відповідь. $x=100$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}=(5x+4)^{\frac{1}{2}}.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата.

$$[(3x+1)^{\frac{1}{2}}+(4x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=[(5x+4)^{\frac{1}{2}}]^2;$$
$$3x+1+2(3x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x-3)^{\frac{1}{2}}+4x-3=5x+4;$$
$$[(3x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x-3)^{\frac{1}{2}}]^2=(3-x)^2;$$
$$(3x+1)\cdot(4x-3)=9-6x+x^2.$$

Після перетворень маємо: $11x^2+x-12=0$. Тоді

$$x_1=1, \quad x_2=-\frac{12}{11}.$$

Значення $x = 1$ є коренем даного рівняння, а $x = -\frac{12}{11}$ не задовольняє рівняння.

Відповідь. $x = 1$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{1 + x^2}} = -2.$$

Розв'язання.

$$x - \sqrt{1 + x^2} + x + \sqrt{1 + x^2} = -2\,(x + \sqrt{1 + x^2})\,(x - \sqrt{1 + x^2});$$
$$2x = -2\,[x^2 - (1 + x^2)];$$
$$2x = 2, \quad x = 1.$$

Перевірка. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{1 - 2} = -2.$

Відповідь. $x = 1$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$x + \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Розв'язання.

$$x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 + x^2 = 5a^2; \quad x\sqrt{a^2 + x^2} = 4a^2 - x^2.$$

Після піднесення до квадрата обох частин рівняння і деяких перетворень дістанемо:

$$9a^2x^2 = 16a^4; \quad x^2 = \frac{16a^2}{9}; \quad x_1 = \frac{4a}{3}, \quad x_2 = -\frac{4a}{3}.$$

Перевірка показує, що при $a > 0$ x_1 задовольняє дане рівняння, а x_2 — не задовольняє. Якщо $a < 0$, то x_2 задовольняє дане рівняння, а x_1 — не задовольняє.

Відповідь. $x = \frac{4}{3}|a|$.

3. Розв'язування ірраціональних рівнянь способом заміни. Цей спосіб полягає в тому, що підкореневий вираз позначають через нове невідоме в деякому степені, так щоб корінь добувався.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2 - \sqrt{x^2 - 4} = 16$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $x^2 - 4 \geqslant 0$, тобто $x \leqslant -2$ і $x \geqslant 2$.

Припустимо, що $\sqrt{x^2 - 4} = y$, тоді $x^2 - 4 = y^2$; $x^2 = y^2 + 4$ і дане рівняння матиме такий вигляд: $y^2 - y - 12 = 0$, звідки $y_1 = 4$, $y_2 = -3$. y_2 відкидаємо, бо $y > 0$. Знайдемо значення x: $x^2 = y^2 + 4 = 16 + 4 = 20$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}$.

Обидва значення $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}$ належать до області допустимих значень і задовольняють рівняння, в чому легко переконатися за допомогою перевірки.

Відповідь. $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{97 - x} = u$, $\sqrt[4]{x} = v$.

Тоді

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = 25 - 2uv, \quad u^4 + v^4 = 625 - 100uv + 4u^2v^2 - 2u^2v^2,$$
$$97 = 625 - 100uv + 2u^2v^2, \quad (uv)^2 - 50\,(uv) + 264 = 0,$$
$$uv = 25 \pm 19, \quad (uv)_1 = 44, \quad (uv)_2 = 6,$$

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 44 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 5, \\ uv = 6. \end{cases}$$

Перша система в області дійсних чисел не має розв'язків. Другу систему розв'язуємо усно: $u_1 = 3$, $v_1 = 2$; $u_2 = 2$, $v_2 = 3$. Звідси $x_1 = 16$, $x_2 = 81$.

Обидва корені задовольняють дане рівняння.

Відповідь. $x_1 = 16$, $x_2 = 81$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x + 4} + \sqrt{20 + x} = 8$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень: $x + 4 \geqslant 0$,

$$x \geqslant -4; \quad 20 + x \geqslant 0, \; x \geqslant -20. \quad \text{Отже, } x \geqslant -4.$$

Припустимо тепер, що $\sqrt{x + 4} - \sqrt{20 + x} = y$.

Перемножимо цю рівність і дане рівняння, дістанемо

$$(x + 4) - (20 + x) = 8y, \quad \text{звідки } y = -2.$$

Тоді

$$\begin{cases} \sqrt{x + 4} + \sqrt{20 + x} = 8, \\ \sqrt{x + 4} - \sqrt{20 + x} = -2. \end{cases}$$

9*

Додаючи ці рівняння, дістанемо $2\sqrt{x+4} = 6$, звідки $x + 4 = 9$, $x = 5$. Це значення належить до області допустимих значень і задовольняє рівняння.

Відповідь. $x = 5$.

4. Застосування формул скороченого множення.

Приклад. Розв'язати рівняння $(8x+4)^{\frac{1}{3}} - (8x-4)^{\frac{1}{3}} = 2$.

Розв'язання.

$$[(8x+4)^{\frac{1}{3}} - (8x-4)^{\frac{1}{3}}]^3 = 8;$$

$$8x + 4 - (8x-4) - 3(8x+4)^{\frac{1}{3}}(8x-4)^{\frac{1}{3}}[(8x+4)^{\frac{1}{3}} - (8x-4)^{\frac{1}{3}}] = 8^*.$$

Враховуючи, що за умовою вираз у квадратних дужках має дорівнювати 2, дістанемо:

$$8x + 4 - 8x + 4 - 6(64x^2 - 16)^{\frac{1}{3}} = 8,$$

звідки

$$64x^2 - 16 = 0,$$

$$x^2 = \frac{1}{4},$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Перевірка.

$$(4+4)^{\frac{1}{3}} - (4-4)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

$$(-4+4)^{\frac{1}{3}} - (-4-4)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

Відповідь. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

§ 25. Системи рівнянь другого степеня з двома невідомими

1. Рівняння другого степеня з двома невідомими. Загальний вигляд рівняння другого степеня з двома невідомими такий:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

* Оскільки $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

Тут a, b, c, d, e, f — будь-які числа, але a, b, c не можуть одночасно дорівнювати нулеві.

Приклади.

$$x^2 + 3xy + 0{,}5y^2 - 5y = 0,$$
$$xy + 7 = 0.$$

Проте рівняння

$$x^2 + 5x^2y + 3y - 2 = 0$$

не буде рівнянням другого степеня, бо його член $5x^2y$ не другого, а третього степеня (степенем одночлена називається сума показників усіх його букв).

Рівняння другого степеня з двома невідомими може мати безліч розв'язків, може мати лише декілька або зовсім не мати розв'язків.

Приклади. Рівняння:

$x^2 + 4y^2 + 7 = 0$ не має розв'язків (дійсних);

$x^2 + 9y^2 = 0$ має єдиний розв'язок: $x = 0$, $y = 0$;

$x^2 + 2xy = 0$ має безліч розв'язків: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 2$; $y_3 = -1$ і т. д.

2. Системи двох рівнянь, з яких одне першого степеня, а інші — другого. У загальному вигляді ця система рівнянь може бути записана так:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0; \\ d_2x + e_2y + f_2 = 0. \end{cases}$$

Найзручніше таку систему розв'язувати способом підстановки. Для цього досить з другого (лінійного) рівняння виразити одне з невідомих через інше і знайдений вираз підставити в перше рівняння. В результаті дістанемо квадратне рівняння, розв'язавши яке, знайдемо значення одного з невідомих. Потім, підставивши ці значення невідомого в будь-яке з даних рівнянь (краще у лінійне), дістанемо відповідні значення для другого невідомого.

Приклад 1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x^2 + 15xy + 4y^2 + 43x + 24y + 7 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння знаходимо $x = 2y - 5$ і підставляємо у перше:

$$2(2y-5)^2 + 15(2y-5)y + 4y^2 + 43(2y-5) + 24y + 7 = 0.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних членів дістанемо

$$42y^2 - 5y - 158 = 0, \quad \text{звідки } y_1 = 2, \ y_2 = -\frac{79}{42}$$

З рівності $x = 2y - 5$ знаходимо: $x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{184}{21} = -8\frac{16}{21}$.

Проте деякі системи такого вигляду зручніше розв'язувати штучними способами.

3. Розв'язання системи виду:

$$\begin{cases} x \pm y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Приклад 1.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Значення x і y можна розглядати як корені квадратного рівняння

$$z^2 - 5z + 4 = 0.$$

Маємо: $z_1 = 1$, $z_2 = 4$. Обидва рівняння системи симетричні щодо x і y, тому дістаємо дві пари розв'язків: якщо один розв'язок $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, то другий буде, навпаки, $x_2 = 4$, $y_2 = 1$.

Приклад 2.

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$$

Розв'язання. Цю систему записуємо у вигляді

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18. \end{cases}$$

Тоді x і $-y$ — корені квадратного рівняння:

$$z^2 - 7z - 18 = 0.$$

Дістаємо

$$z_1 = 9, \ z_2 = -2.$$

Тоді

$$x_1 = 9, \ -y_1 = -2 \text{ або } x_1 = 9, \ y_1 = 2 \text{ і } x_2 = -2, \ -y_2 = 9 \text{ або } x_2 = -2, \ y_2 = -9.$$

4. Розв'язання системи виду:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$$

Піднісши перше рівняння до квадрата і віднявши від нього друге, дістанемо:

$$2xy = a^2 - b, \quad \text{звідки } xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Тепер питання зводиться до розв'язування системи:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \dfrac{a^2 - b}{2}, \end{cases}$$

яку ми вже розглядали.

5. Розв'язання системи виду:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x \pm y = b. \end{cases}$$

Ця система розв'язується почленним діленням першого рівняння на друге. В результаті дана система замінюється рівносильною їй системою:

$$\begin{cases} x \mp y = \dfrac{a}{b}, \\ x \pm y = b, \end{cases}$$

тобто зводиться до розв'язування лінійної системи з двома невідомими.

6. Система двох рівнянь, з яких кожне другого степеня. Система двох рівнянь другого степеня з двома невідомими має такий вигляд:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0. \end{cases}$$

Така система в загальному випадку не може бути розв'язана елементарно, бо вона зводиться до повного рівняння четвертого степеня.

Розглянемо деякі окремі види таких систем, які можна розв'язати елементарно.

Приклад 1.

$$\begin{cases} xy + x + y = 29, \\ xy - 2(x + y) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left\{\begin{array}{l} xy + x + y = 29 \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} 2xy + 2x + 2y = 58 \\ \underline{xy - 2x - 2y = 2} \\ 3xy = 60 \text{ або } xy = 20. \end{array}$$

Підставивши в перше (або в друге) рівняння $xy = 20$, дістанемо: $x + y = 9$.

Тоді з системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} xy = 20 \\ x + y = 9 \end{array}\right.$$

знаходимо: $x_1 = 5$, $y_1 = 4$ і $x_2 = 4$, $y_2 = 5$.

Відповідь. Дана система має два розв'язки.

$$x_1 = 4,\ y_1 = 5;\ x_2 = 5,\ y_2 = 4.$$

Приклад 2.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{array}\right.$$

Розв'язання.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ x^2 + xy - y^2 = 5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14 \\ \underline{2x^2 + 2xy - 2y^2 = 10} \\ 4x^2 - xy \qquad = 24. \end{array}$$

Звідси

$$y = \frac{4x^2 - 24}{x}.$$

Підставляючи значення y в друге рівняння системи, дістаємо

$$11x^4 - 163x^2 + 576 = 0.$$

Звідси $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = \frac{64}{11}$. Тоді знаходимо чотири значення x: 3, -3, $\frac{8}{\sqrt{11}}$ і $-\frac{8}{\sqrt{11}}$; підставивши їх у рівняння $4x^2 - xy = 24$, дістанемо відповідні значення y.

Іноді систему можна розв'язати способом розкладання лівої частини одного з рівнянь на множники, якщо його права частина дорівнює нулеві.

Приклад 3.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0, \\ xy + 2 - 2y - x = 0. \end{array}\right.$$

Розв'язання.

$$xy + 2 - 2y - x = (xy - x) + (2 - 2y) = x(y - 1) - 2(y - 1) = (y - 1)(x - 2).$$

Тоді

$$(x - 2)(y - 1) = 0 \text{ або } x - 2 = 0 \text{ або } y - 1 = 0.$$

Отже, система зводиться до розв'язування двох систем рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} y - 1 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \end{array}\right. \text{ і } \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0. \end{array}\right.$$

Приклад 4.

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{array}\right.$$

Цю систему можна розв'язати кількома способами.

Перший спосіб (спосіб підстановки). З другого рівняння визначаємо одне невідоме через інше; наприклад, $x = \frac{b}{y}$. Підставивши це значення в перше рівняння, дістанемо біквадратне рівняння:

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0.$$

Розв'язавши його, знайдемо значення y. Підставляючи їх у $x = \frac{b}{y}$, дістанемо відповідні значення x.

Другий спосіб. Помножимо друге рівняння на 2 і додамо до першого:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b \text{ або } (x + y)^2 = a + 2b;$$

звідки

$$x + y = \pm\sqrt{a + 2b}.$$

Маємо систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = \pm\sqrt{a + 2b}, \\ xy = b. \end{array}\right.$$

Розв'язання такої системи розглядалося вище.

Третій спосіб. Якщо помножити обидві частини другого рівняння на 2 і відняти його від першого, дістанемо

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b,$$

або

$$x - y = \pm\sqrt{a - 2b} \quad \text{(при умові, що } a \geqslant 2b).$$

Якщо помножити друге рівняння на 2 і додати до першого, дістанемо

$$x + y = \pm\sqrt{a + 2b} \quad \text{(при умові, що } a > -2b).$$

Таким чином, маємо чотири системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, одержимо всі розв'язки даної системи.

Четвертий спосіб. Піднісши друге рівняння до квадрата, дістанемо таку систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^2y^2 = b^2. \end{cases}$$

Звідси видно, що x^2 і y^2 — корені квадратного рівняння:

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

Розв'язавши його, дістанемо:

$$x^2 = z_1, \; y^2 = z_2;$$

і, навпаки,

$$x^2 = z_2, \; y^2 = z_1 \text{ і т. д.}$$

Нижче розглянемо два конкретні приклади.

Приклад 5.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ x^2y^2 = 400. \end{cases}$$

Складаємо рівняння

$$t^2 - 41t + 400 = 0.$$

Звідки $t_1 = 25$, $t_2 = 16$. Отже, $x^2 = 25$, $y^2 = 16$, або $y^2 = 25$, $x^2 = 16$, звідки

$$x_{1,2} = \pm 5, \quad y_{1,2} = \pm 4;$$
$$x_{3,4} = \pm 4, \quad y_{3,4} = \pm 5.$$

Враховуючи, що $xy > 0$, дістаємо лише чотири розв'язки даної системи.

Відповідь. $x_1 = 5, \; y_1 = 4;$
$x_2 = -5, \; y_2 = -4;$
$x_3 = 4, \; y_3 = 5;$
$x_4 = -4, \; y_4 = -5.$

Приклад 6.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2, \\ xy = 2ab \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 4b^2, \\ x^2y^2 = 4a^2b^2. \end{cases}$$

Складаємо квадратне рівняння

$$t^2 - (a^2 + 4b^2)\,t + 4a^2b^2 = 0.$$

Звідси $t_1 = a^2$, $t_2 = 4b^2$, $x_{1,2} = \pm a$, $y_{1,2} = \pm 2b$, $x_{3,4} = \pm 2b$, $y_{3,4} = \pm a$.

Відповідь.

$x_1 = a, \; y_1 = 2b;$
$x_2 = -a, \; y_2 = -2b;$
$x_3 = 2b, \; y_3 = a;$
$x_4 = -2b, \; y_4 = -a.$

У багатьох випадках спосіб введення нових невідомих значно спрощує розв'язування системи рівнянь.

Приклад 7. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\frac{x}{y} = z$, тоді $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$. Маємо:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{34}{15}, \quad 15z^2 - 34z + 15 = 0; \quad z_1 = \frac{5}{3}, \quad z_2 = \frac{3}{5}.$$

Отже, дістаємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{5}, \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3}, \\ x^2 + y^2 = 34, \end{cases}$$

звідки знаходимо чотири розв'язки:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 5; \quad x_3 = 5, \quad y_3 = 3;$$
$$x_2 = -3, \; y_2 = -5; \; x_4 = -5, \; y_4 = -3.$$

Приклад 8. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + xy + y = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння на 2 і додамо до першого:

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2(x + y) = 24.$$

Припустимо, що $x + y = z$, тоді $z^2 + 2z - 24 = 0$, звідки $z_1 = -6$, $z_2 = 4$. Отже, дістаємо дві системи:

$$\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 13 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases}$$

які мають два дійсних розв'язки:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 3 \quad \text{і} \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 1.$$

Приклад 9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ x^2 + y^2 = 104. \end{cases}$$

Розв'язання. Ділимо друге рівняння на x^2y^2 (легко показати, що $x \neq 0$, $y \neq 0$), тоді

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{104}{x^2y^2}. \end{cases}$$

Додамо до обох частин другого рівняння по $\frac{2}{xy}$, дістанемо

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{104}{x^2y^2} + \frac{2}{xy}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{9}{25} - \frac{104}{x^2y^2} = \frac{2}{xy}. \end{cases}$$

Припускаючи, що $\frac{1}{xy} = u$, маємо: $104u^2 + 2u - \frac{9}{25} = 0$, звідки $u_1 = \frac{1}{20}$, $u_2 = -\frac{9}{130}$. Отже, дана система зводиться до двох таких систем:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{xy} = \frac{1}{20}, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{1}{xy} = -\frac{9}{130}, \end{cases}$$

які неважко розв'язати.

Приклад 10.

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy = -15. \end{cases}$$

Розв'язання. Зрівняємо вільні члени

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ 7y^2 - 14xy = -105 \end{array}$$

і додамо одержані рівняння

$$5x^2 - 19xy + 12y^2 = 0.$$

Оскільки $y \neq 0$ (це випливає з другого рівняння), поділимо обидві частини одержаного рівняння на y^2:

$$5\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 19\left(\frac{x}{y}\right) + 12 = 0.$$

Припускаючи, що $\frac{x}{y} = u$, дістаємо рівняння

$$5u^2 - 19u + 12 = 0,$$

звідки $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{4}{5}$. Отже, $x = 3y$ і $x = \frac{4}{5}y$.

Підставивши значення $x = 3y$ в одне з даних рівнянь, наприклад у друге, дістанемо $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$, звідки $x = \pm 3\sqrt{3}$. Якщо взяти

$x = \frac{4}{5}y$, то дістанемо $x = \pm 4$, $y = \pm 5$.

Відповідь. $x_1 = 3\sqrt{3}$, $y_1 = \sqrt{3}$;
$x_2 = -3\sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt{3}$;
$x_3 = 4$, $y_3 = 5$;
$x_4 = -4$, $y_4 = -5$.

Примітка. Розглянутим тут способом можна розв'язувати також багато з наведених раніше систем (див. приклади 2, 5, 8).

§ 26. Задачі на складання систем рівнянь

Задача 1. Відстань між двома містами, що дорівнює 480 *км*, пасажирський поїзд проходить на 4 *год* швидше за товарний. Якщо швидкість пасажирського поїзда збільшити на 8 *км/год*, а швидкість товарного — на 2 *км/год*, то пасажирський поїзд подолає всю відстань на 5 *год* швидше, ніж товарний. Знайти швидкість кожного поїзда.

Розв'язання. Позначимо швидкість товарного поїзда через x (*км/год*), а швидкість пасажирського поїзда через y (*км/год*). Тоді в першому випадку товарний поїзд пройде 480 *км* за $\frac{480}{x}$ (*год*), а пасажирський — за $\frac{480}{y}$ (*год*).

Через те, що час руху пасажирського поїзда менший, ніж час руху товарного, на 4 *год*, то дістанемо рівняння:

$$\frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4.$$

У другому випадку швидкість товарного поїзда буде $x + 2$ (*км/год*), а швидкість пасажирського $y + 8$ (*км/год*). Значить, товарний поїзд пройде 480 *км* за $\frac{480}{x+2}$ (*год*), а пасажирський — за $\frac{480}{y+8}$ (*год*). Тоді, згідно з умовою задачі, складемо рівняння

$$\frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5.$$

Таким чином, дістали систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{480}{y} = \frac{480}{x} - 4, \\ \frac{480}{y+8} = \frac{480}{x+2} - 5 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{120}{y} = \frac{120}{x} - 1, \\ \frac{96}{y+8} = \frac{96}{x+2} - 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо:

$$x = 30, \ y = 40.$$

Відповідь. 30 *км/год* та 40 *км/год*.

Задача 2. Студенти взяли на човновій станції напрокат човна. Спочатку вони пропливли на 20 *км* униз, за течією річки, потім повернулися на човнову станцію; вся ця прогулянка тривала 7 *год*. По дорозі назад, на відстані 12 *км* від човнової станції, студенти зустріли пліт, що проплив повз човнової станції саме в той момент, коли вони відправлялися на прогулянку. Визначити, з якою швидкістю рухався човен за течією річки і яка швидкість течії.

Розв'язання. Якщо позначити швидкість човна в стоячій воді через x (*км/год*), швидкість течії, а отже, й швидкість плота через y (*км/год*), то швидкість човна за течією буде $x + y$, проти течії

$x - y$; час руху (в годинах) човна за течією $\frac{20}{x+y}$, проти течії $\frac{20}{x-y}$, до зустрічі з плотом $\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}$ і, нарешті, час руху плота $\frac{12}{y}$.

Через те що, за умовою, прогулянка тривала 7 *год*, дістанемо рівняння

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7.$$

Оскільки час руху човна і плота до їхньої зустрічі був одним і тим самим, дістанемо рівняння

$$\frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases}\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7,\\ \frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y},\end{cases}$$

знаходимо $x = 7$, $y = 3$. Отже, швидкість човна за течією дорівнює 10 *км/год*, швидкість течії — 3 *км/год*.

Відповідь. 10 *км/год* та 3 *км/год*.

Задача 3. На двох прямокутних ділянках посаджено рядами 350 плодових дерев. На кожній ділянці число рядів на 1 більше від числа дерев у ряді. По скільки дерев посаджено в кожному ряді на тій та другій ділянці, якщо на першій з них на 130 дерев більше, ніж на другій?

Розв'язання. Позначимо число дерев у ряді на першій ділянці через x, на другій через y. Тоді число рядів на першій ділянці буде $x + 1$, на другій $y + 1$, а дерев відповідно $x(x + 1)$ та $y(y + 1)$. Згідно з умовою, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}x(x+1)-y(y+1)=130,\\ x(x+1)+y(y-1)=350.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо: $x_1 = 15$, $x_2 = 16$, $y_1 = 10$, $y_2 = -11$. Значить, число дерев у ряді на першій ділянці дорівнює 15, на другій 10.

Відповідь. 15; 10.

Задача 4. Шлях між пунктами A та B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску з швидкістю на 6 *км/год* більшою, ніж на підйомі, витрачає на дорогу від A до B 2 *г* 40 *хв*, а на дорогу назад від B до A на 20 *хв* менше. Знайти швидкість велосипедиста на підйомі і на спуску та довжину підйому в напрямі від A до B, якщо довжина всієї дороги дорівнює 36 *км*.

Розв'язання. Позначимо довжину підйому в *км* через x, а швидкість велосипедиста на підйомі через y (*км/год*).

Далі запишемо дані у вигляді таблиці:

Етапи	S	v	t
Підйом	x	y	$\frac{x}{y}$
Спуск	$36 - x$	$y + 6$	$\frac{36-x}{y+6}$
$\frac{x}{y}+\frac{36-x}{y+6}=\frac{8}{3}$			

2 *год* 40 *хв* $= 2\frac{2}{3}$ *год*

Етапи	S	v	t
Підйом	$36 - x$	y	$\frac{36-x}{y}$
Спуск	x	$y + 6$	$\frac{x}{y+6}$
$\frac{36-x}{y}+\frac{x}{y+6}=\frac{7}{3}$			

2 *год* 40 *хв* — 20 *хв* = 2 *год* 20 *хв* $= 2\frac{1}{3}$ *год*

Розв'язавши одержану систему рівнянь, знаходимо $y_1 = 12$, $y_2 = -3{,}6$; $x_1 = 24$. Таким чином, довжина підйому від A до B — 24 *км*, швидкість на підйомі — 12 *км/год*, швидкість на спуску — 18 *км/год*.

Відповідь. 12 *км/год*, 18 *км/год* і 24 *км*.

Задача 5. Дерев'яна балка важить 90 *кг*, а залізна балка, на 2 *м* довша за дерев'яну, важить 160 *кг*, причому 1 *пог. м* залізної балки на 5 *кг* важчий за 1 *пог. м* дерев'яної. Знайти вагу 1 *пог. м* і довжину кожної балки.

Розв'язання. Наведемо скорочений запис.

Довжина дерев'яної балки — x (*м*)

» залізної » — $x + 2$ (*м*)

Вага дерев'яної балки — 90 *кг*

Вага 1 *пог. м* дерев'яної балки — y (*кг*)

» 1 *пог. м* залізної » — $y + 5$ (*кг*)

Вага залізної балки — 160 *кг*

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 90 \\ (x + 2)(y + 5) = 160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо $x = 6$, $y = 15$.

Відповідь. Вага 1 *пог. м* дерев'яної балки 15 *кг*, довжина дерев'яної балки 6 *м*, вага 1 *пог. м* залізної балки 20 *кг*, довжина залізної балки 8 *м*.

Задача 6. По двох сторонах прямого кута в напрямі до його вершини рівномірно рухаються два тіла. У певний момент тіло A відстояло на 60 *м* від вершини кута, а тіло B — на 80 *м* від неї. Через 3 *сек* відстань між A та B стала дорівнювати 70 *м*, а через наступні 2 *сек* відстань між тілами зменшилася ще на 20 *м*. Знайти швидкість кожного тіла.

Розв'язання. Позначимо швидкість тіла A через x (*м/сек*), а швидкість тіла B через y (*м/сек*). Тоді відстані від A і B до вершини кута через 3 *сек* дорівнювали відповідно — $60 - 3x$ і $80 - 3y$; квадрат відстані між цими тілами через 3 *сек* за теоремою Піфагора становитиме $(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2$. Оскільки, за умовою ця відстань дорівнює 70 *м*, то маємо рівняння:

$$(60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2.$$

Ще через 2 *сек* відстані від A і B до вершини кута дорівнюватимуть відповідно $60 - 5x$ і $80 - 5y$, а відстань між тілами буде $70 - 20 = 50$ (*м*). Отже,

$$(60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} (60 - 3x)^2 + (80 - 3y)^2 = 70^2, \\ (60 - 5x)^2 + (80 - 5y)^2 = 50^2, \end{cases}$$

дістанемо $y_{1,2} = 8$; $x_{1,2} = 6$. Отже, швидкість тіла A дорівнює 6 *м/сек*; швидкість тіла B — 8 *м/сек*.

Відповідь. 6 *м/сек*; 8 *м/сек*.

Задача 7. По круговій доріжці довжиною 2 *км* рухаються в одному напрямі два конькобіжці, які сходяться через кожні 20 *хв*. Знайти,

з якою швидкістю рухається кожний конькобіжець, якщо перший пробігає коло на 1 *хв* швидше від другого.

Розв'язання. Позначимо швидкість першого конькобіжця через x (*км/хв*), швидкість другого — через y (*км/хв*). Тоді перший пройде всю доріжку за $\frac{2}{x}$ *хв*, другий за $\frac{2}{y}$ *хв*; оскільки перший з них пробігає доріжку на 1 *хв* швидше від другого, дістаємо рівняння

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1.$$

Кожної хвилини відстань між конькобіжцями збільшується на $x - y$ (*км*). За час від однієї зустрічі до наступної (тобто за 20 *хв*) відстань повинна збільшитися на 2 *км*, тому $20(x - y) = 2$. Одержана система рівнянь має два розв'язки:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = \frac{2}{5};$$

$$x_2 = -\frac{2}{5}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Значить, швидкість першого конькобіжця $\frac{1}{2}$ *км/хв* = 30 *км/год*, а швидкість другого — $\frac{2}{5}$ *км/хв* = 24 *км/год*.

Відповідь. 30 *км/год*; 24 *км/год*.

Задача 8. Робітник виготовив у призначений строк певну кількість однакових деталей. Якби він щодня виготовляв їх на 10 штук більше, то виконав би роботу на $4\frac{1}{2}$ дня раніше строку, а якби він виготовляв на 5 деталей менше, то спізнився б на 3 дні проти призначеного строку. Скільки деталей і в який строк він зробив?

Розв'язання. Нехай робітник зробив x деталей за y днів. Тоді щодня він виготовляв $\frac{x}{y}$ деталей. За умовою, якби він щодня виготовляв $\frac{x}{y} + 10$ деталей, то виконав би роботу за $y - 4\frac{1}{2}$ дня. Значить,

$$\left(\frac{x}{y} + 10\right)\left(y - 4\frac{1}{2}\right) = x.$$

Друга умова дає рівняння

$$\left(\frac{x}{y}-5\right)(y+3)=x.$$

Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10y-4\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{y}=45, \\ -5y+3\frac{x}{y}=15. \end{cases}$$

Спочатку знаходимо $\frac{x}{y}=50$. Тоді $y=27$, а через те що $x=50y$, то $x=1350$. Значить, робітник зробив 1350 деталей за 27 днів.

Відповідь. 1350 деталей; 27 днів.

Задача 9. При сумісній роботі два трактори різної потужності зорали колгоспне поле за 8 днів. Якби половину поля зорати спочатку одним трактором, то при дальшій роботі двох тракторів уся робота була б закінчена за 10 днів. За скільки днів можна було б зорати все поле кожним трактором окремо?

Розв'язання. Нехай першим трактором можна зорати все поле за x днів, другим — за y днів. Перша умова дає

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}.$$

Перший трактор може зорати половину поля за $\frac{1}{2}x$ днів. За умовою, друга половина може бути зорана двома тракторами за $10-\frac{1}{2}x$ днів. Звідси дістаємо друге рівняння

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\frac{1}{2}}{10-\frac{1}{2}x}.$$

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо $x=12$, $y=24$. Отже, першим трактором можна зорати поле за 12 днів, другим — за 24 дні.

Відповідь. 12 днів, 24 дні.

§ 27. Числові нерівності

1. Поняття про нерівність. Два числа або вирази, сполучені між собою знаком «більше» ($>$) або знаком «менше» ($<$), становлять *нерівність*.

Приклади нерівностей:

$$3<8;\quad 5>-2;\quad \frac{x-3}{2}>3x-1;\quad \frac{a+2}{a+3}<3a-2;\quad m+n>7.$$

Вираз, що стоїть ліворуч від знака нерівності, називається лівою частиною, а вираз, що стоїть праворуч від знака нерівності,— правою частиною нерівності.

Знаки $>$ і $<$ протилежні один одному. Якщо дві нерівності мають протилежні знаки, вони називаються нерівностями протилежного змісту. Так, $-4>-5$ і $2<5$ є нерівностями протилежного змісту.

Іноді між двома числами або виразами ставлять знаки $\geqslant$ (не менше) $\leqslant$ (не більше,) наприклад

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Такі записи називають *нестрогими* нерівностями.

Примітки. 1. Знаки $>$ (більше) і $<$ (менше) запропонував англійський алгебраїст Т. Гарріот (1560—1621) у своєму творі з алгебри, опублікованому посмертно в 1631 р.

2. Нерівностями називають також два числа або вирази, сполучені знаком $\neq$ (не дорівнює). Проте далі мова буде йти не про такі нерівності.

Нерівності бувають *числові* і *буквені*. Числовими називають такі нерівності, обидві частини яких є числа, записані тільки цифрами. Якщо принаймні одна частина нерівності є буквеним виразом, то така нерівність називається буквеною.

2. Властивості числових нерівностей. 1) Якщо перше число більше від другого, а друге більше від третього, то перше також більше від третього. За допомогою букв цю властивість (її називають *транзитивною* властивістю) можна записати так:

$$\text{якщо } a>b \text{ і } b>c, \text{ то } a>c.$$

2) Нерівність не порушиться, якщо до кожної частини її додати одне й те саме число, тобто

$$\text{якщо } a>b, \text{ то } a+c>b+c.$$

П р и к л а д и. а) До обох частин нерівності $9>5$ додамо по 7, дістанемо $16>12$.

б) Від обох частин нерівності $-12<1$ віднімемо по 5, тобто додамо по -5, дістанемо $-7<-4$.

3) Будь-який член нерівності можна перенести з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, тобто з $a+b>c$ випливає, що

$$a>c-b, \quad a+b-c>0.$$

4) Якщо обидві частини нерівності мають однакові члени, їх можна відкинути, тобто з нерівності $a+b>b+c$ випливає нерівність $a>b$.

5) Дві нерівності однакового змісту можна почленно додавати; при цьому дістанемо нерівність такого самого змісту.

П р и к л а д и.

$$+\begin{array}{r}3<9\\-2<1\\\hline 1<10\end{array} \qquad +\begin{array}{r}a>b\\c>d\\\hline a+c>b+d.\end{array}$$

6) Від однієї нерівності можна почленно відняти іншу нерівність протилежного змісту, залишаючи знак тієї нерівності, від якої віднімали іншу.

П р и к л а д и.

$$-\begin{array}{r}-10<0\\-8>-13\\\hline -2<13\end{array} \qquad -\begin{array}{r}a>b\\c<d\\\hline a-c>b-d.\end{array}$$

7) Нерівність залишиться вірною, якщо обидві частини її помножити на однакове додатне число. Нерівність переходить у рівність $0=0$, якщо обидві частини її помножити на нуль. Нерівність змінить зміст на протилежний, якщо обидві частини її помножити на однакове від'ємне число. Ця властивість коротко записується так.

Якщо $a>b$, то при $c>0$ $ac>bc$;
при $c=0$ $ac=bc$;
при $c<0$ $ac<bc$.

П р и к л а д и.

Дано нерівність	Множник	Нова нерівність
$7>4$	2	$14>8$
$-9<-1$	4	$-36<-4$
$13>9$	-2	$-26<-18$
$3>-10$	-5	$-15<50$
$-3{,}2>-7{,}5$	0	$0=0$

П р и м і т к а. Через те що ділення на число, відмінне від нуля, можна розглядати як множення на обернене йому число, то ця властивість поширюється і на ділення обох частин нерівності на додатне і від'ємне число:

якщо $a>b$, то $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$ при $c>0$

і $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$ при $c<0$.

8) Дві нерівності однакового змісту можна перемножити, якщо обидві частини кожної з них — числа додатні; в результаті одержимо нерівність такого самого змісту, тобто

якщо a, b, c, d — додатні і $a>b$, $c>d$,
то $ac>bd$.

9) Нерівність, обидві частини якої — числа додатні, можна піднести до одного і того ж степеня; в результаті одержимо нерівність такого самого змісту як і дана, тобто

якщо a, b — додатні, n — натуральне і $a>b$, то $a^n>b^n$.

10) Якщо a, b — додатні, n — натуральне і $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

П р и м і т к а. Всі ці властивості залишаються в силі і для нестрогих числових нерівностей: скрізь замість знака $>$ можна поставити $\geqslant$.

§ 28. Нерівності першого степеня

1. Нерівності з невідомими. Нерівність, яка містить букви, що позначають невідомі числа, називається *нерівністю з невідомими*. Наприклад, у нерівності $2x+3>12$ буквою x позначено невідоме число. Це нерівність з одним невідомим x. Нерівність $2x+3y>5$ — з двома невідомими x та y.

Якщо в нерівність з одним невідомим замість невідомого поставимо яке-небудь число і в результаті одержимо вірну числову нерівність, то кажуть, що це число задовольняє дану нерівність. Кожне число, що задовольняє нерівність, називають *розв'язком* цієї нерівності. Для розв'язування нерівностей, так само як і рівнянь, їх замінюють простішими і рівносильними даним.

Дві нерівності називаються *рівносильними* (або *еквівалентними*), якщо кожна з них має ті самі розв'язки, що й друга.

Перетворення нерівностей у рівносильні їм грунтуються на таких властивостях.

а) Якщо до обох частин нерівності додати однакове число або многочлен відносно невідомого, то нова нерівність буде рівносильна даній.

б) Якщо обидві частини нерівності помножити на однакове додатне число, то нова нерівність буде рівносильна даній.

в) Якщо обидві частини нерівності помножити на однакове від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то нова нерівність буде рівносильна даній.

г) Члени нерівності можна переносити з однієї частини в другу, змінюючи їхні знаки на протилежні.

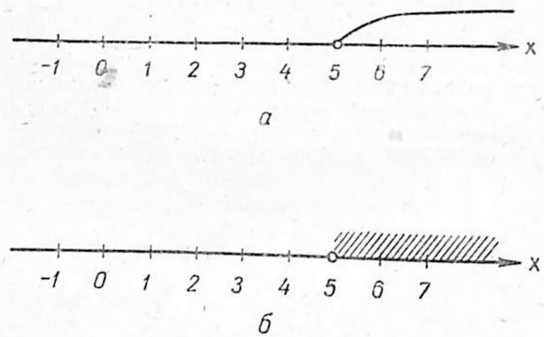


Рис. 25.

д) Якщо в обох частинах нерівності є однакові члени, їх можна відкинути.

Одержані в результаті таких перетворень нерівності будуть рівносильні даним.

2. Нерівності першого степеня з одним невідомим. Нерівністю першого степеня з одним невідомим називається кожна нерівність, в якій одна частина є многочлен першого степеня відносно одного невідомого, а друга — теж многочлен першого степеня відносно того самого невідомого або яке-небудь число.

Загальний вигляд таких нерівностей:

$$ax + b > cx + d; \quad ax + b < cx + d.$$

Деякі з коефіцієнтів a, b, c, d можуть бути нулями, а та чи інша частина нерівності може містити тільки один член або навіть може дорівнювати нулеві, наприклад $2x < 1{,}5x - 4$; $2x - 9 > 0$. Лише a і c водночас не можуть бути нулями, тому що в цьому разі ми мали б просто числову нерівність.

Будь-яку нерівність першого степеня можна звести до вигляду

$$ax > b \text{ або } ax < b.$$

Нехай маємо нерівність $ax > b$. Поділивши обидві її частини на a, дістанемо:

$$x > \frac{b}{a}, \text{ якщо } a > 0,$$

$$x < \frac{b}{a}, \text{ якщо } a < 0.$$

Так записують множину всіх розв'язків даної нерівності.

Наведемо приклади розв'язування нерівностей першого степеня з одним невідомим.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність

$$6x + 20 > 3x + 35.$$

Розв'язання.

$$6x - 3x > 35 - 20,$$
$$3x > 15,$$
$$x > 5.$$

Відповідь. $x > 5$. Цю відповідь можна зобразити на числовій осі. Множину розв'язків (усі дійсні числа, більші від 5) можна позначити дугою (рис. 25, *а*) або штриховкою (рис. 25, *б*).

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{x+3}{3} - 8 > \frac{2x-1}{3} + 1.$$

Розв'язання.

$$x + 3 - 24 > 2x - 1 + 3,$$
$$x - 24 > 2x - 1,$$
$$x - 2x > -1 + 24,$$
$$-x > 23,$$
$$x < -23.$$

Відповідь. $x < -23$.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність

$$\frac{z-1}{3} - 2(1 - 4z) > \frac{1}{4}z - \frac{7 - 52z}{6}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\overset{4}{\overbrace{z-1}}}{3} - 2(1-\overset{12}{\overbrace{4z}}) > \overset{3}{\overbrace{\frac{1}{4}}}z - \frac{\overset{2}{\overbrace{7-52z}}}{6},$$

$$4(z-1) - 24(1-4z) > 3z - 2(7-52z),$$
$$4z - 4 - 24 + 96z > 3z - 14 + 104z,$$
$$4z + 96z - 3z - 104z > -14 + 4 + 24,$$
$$-7z > 14,$$
$$z < -2.$$

Відповідь. $z < -2$.

3. Система нерівностей першого степеня з одним невідомим. Щоб розв'язати систему двох або кількох нерівностей з одним невідомим,

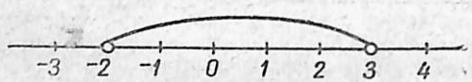


Рис. 26.

треба розв'язати кожну з даних нерівностей окремо і взяти спільні їхні розв'язки.

П р и к л а д. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 3x + 5 < 17 - x, \\ 4x > x - 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуемо кожну нерівність

$$\begin{array}{ll} 3x + 5 < 17 - x, & 4x > x - 6, \\ 3x + x < 17 - 5, & 4x - x > -6, \\ 4x < 12, & 3x > -6, \\ x < 3. & x > -2. \end{array}$$

Отже, дана система нерівностей рівносильна такій:

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > -2. \end{cases}$$

Як бачимо з рис. 26, обидві нерівності задовольняються числами, більшими від -2, але меншими від 3.

Відповідь. $-2 < x < 3$.

П р и к л а д. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 7x > 2x + 20, \\ x - 3 < 6 - 2x. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{array}{ll} 7x > 2x + 20, & x - 3 < 6 - 2x, \\ 7x - 2x > 20, & x + 2x < 6 + 3, \\ 5x > 20, & 3x < 9, \\ x > 4. & x < 3. \end{array}$$

Першу нерівність задовольняють числа, більші від 4, а другу — менші від 3. Але немає такого числа, яке було б водночас більшим від 4 і меншим від 3 (рис. 27).

Відповідь. Дана система нерівностей розв'язків не має.

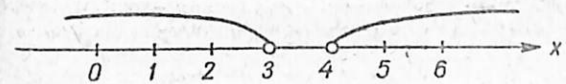


Рис. 27.

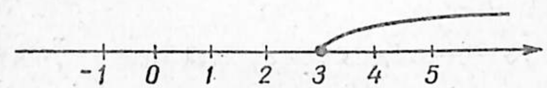


Рис. 28.

П р и к л а д. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 8x + 12 > 2x, \\ 2(x + 2) + 3 > 7, \\ 0{,}5(x + 1) \geqslant 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{array}{lll} 8x + 12 > 2x, & 2(x + 2) + 3 > 7, & 0{,}5(x + 1) \geqslant 2, \\ 8x - 2x > -12, & 2x + 4 + 3 > 7, & 0{,}5x + 0{,}5 \geqslant 2, \\ 6x > -12, & 4x > 0, & 0{,}5x \geqslant 1{,}5, \\ x > -2. & x > 0. & x \geqslant 3. \end{array}$$

Усі дані нерівності задовольняються числами $x \geqslant 3$ (рис. 28).

Відповідь. $x \geqslant 3$.

4. Нерівності, в яких деякі члени входять під знак абсолютної величини. Нерівність $|x| < a$ рівносильна такій подвійній нерівності $-a < x < a$ або такій системі

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

П р и к л а д. Розв'язати нерівність

$$|3x+2|<5.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна такій системі

$$\begin{cases} 3x+2<5, \\ 3x+2>-5. \end{cases}$$

Розв'яжемо її.

$$\begin{array}{rr} 3x+2<5, & 3x+2>-5, \\ 3x<3, & 3x>-7, \\ x<1. & x>-\dfrac{7}{3}. \end{array}$$

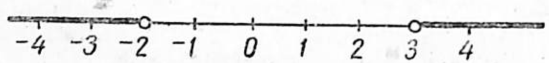


Рис. 29.

Відповідь. $-\frac{7}{3}<x<1.$

Нерівність $|x|>a$ задовольняють усі розв'язки нерівності $x>a$ і всі розв'язки нерівності $x<-a$.

П р и к л а д. Розв'язати нерівність

$$|2x-1|>5.$$

Розв'язання.

$$\begin{array}{rr} 2x-1>5, & 2x-1<-5, \\ 2x>6, & 2x<-4, \\ x>3. & x<-2. \end{array}$$

Відповідь. Дану нерівність задовольняють усі числа $x>3$ і всі числа $x<-2$ (рис. 29).

П р и м і т к а. Дана нерівність розпалася на дві ізольовані нерівності, але не на їх систему. Система цих двох нерівностей не має розв'язків, а нерівність розглядуваного виду завжди має розв'язки.

§ 29. Нерівності другого степеня і вищих степенів

1. Нерівності другого степеня. Нерівність другого степеня з одним невідомим у загальному випадку записується так:

$$a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2.$$

Її завжди можна записати у вигляді

$$ax^2+bx+c>0$$

або

$$ax^2+bx+c<0.$$

Коефіцієнт a можна вважати додатним (якби він був від'ємним, можна було б обидві частини нерівності помножити на -1, змінивши знак нерівності на протилежний). Щоб розв'язати нерівність

$$ax^2+bx+c>0,$$

треба спочатку обчислити її дискримінант b^2-4ac. Якщо він виявиться додатним, тобто якщо тричлен у лівій частині нерівності матиме різні дійсні корені, то дану нерівність задовольняють усі числа, більші від більшого кореня і менші від меншого кореня. Якщо дискримінант буде від'ємним, то дану нерівність задовольнятимуть усі дійсні числа. Якщо, нарешті, дискримінант буде дорівнювати нулеві, то дану нерівність задовольнятимуть усі дійсні числа, крім $-\frac{b}{2a}$.

Нерівність $ax^2+bx+c<0$ при додатному дискримінанті задовольняють усі ті значення невідомого, які є більшими від меншого кореня тричлена в лівій частині, але меншими від більшого кореня. Якщо ж дискримінант дорівнює нулеві або від'ємний, то дана нерівність не має розв'язків.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність

$$2x^2+3x-2>0.$$

Розв'язання. Тут $b^2-4ac=9+16=25>0$.

Знайдемо корені тричлена. Для цього розв'яжемо рівняння

$$2x^2+3x-2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4};\ x_1=-2;\ x_2=0{,}5.$$

Відповідь. $x<-2$ і $x>0{,}5$.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність

$$-3x^2+5x-4>0.$$

Розв'язання. Через те що коефіцієнт при x^2 від'ємний, помножимо обидві частини нерівності на -1:

$$3x^2-5x+4<0;$$
$$b^2-4ac=25-48=-23<0.$$

Відповідь. Дана нерівність не має розв'язків.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Розв'язання.

$$b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}; \ x_1 = 2, \ x_2 = 3.$$

Відповідь. $2 < x < 3$.

П р и к л а д 4. Розв'язати нерівність

$$2x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Розв'язання.

$$b^2 - 4ac = 25 - 48 = -23 < 0.$$

Відповідь. Дану нерівність задовольняє кожне дійсне число.

П р и к л а д 5. Розв'язати нерівність

$$x^2 - 6x + 9 > 0.$$

Розв'язання.

$$b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Відповідь. Дану нерівність задовольняють усі дійсні числа, крім 3.

2. Нерівності вищих степенів. Нехай дано нерівність, лівою частиною якої є многочлен, що містить одну букву — невідоме, а правою частиною є нуль. У загальному випадку такі нерівності розв'язувати важко. Проте, якщо відомий розклад многочлена на множники, такі нерівності можна розв'язувати елементарними способами.

П р и к л а д. Розв'язати нерівність

$$x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0.$$

Розв'язання. Розклавши на множники ліву частину, перепишемо нерівність у вигляді

$$(x - 1)(x - 3)(x^2 + x + 1) < 0.$$

Тричлен $x^2 + x + 1$ має від'ємний дискримінант і його значення при всіх дійсних значеннях x додатні, отже, не впливають на знак. Тому дана нерівність рівносильна такій:

$$(x - 1)(x - 3) < 0,$$

або

$$x^2 - 4x + 3 < 0,$$

звідки знаходимо $1 < x < 3$.

П р и к л а д. Розв'язати нерівність

$$(x + 6)(x - 1)(x + 1)x < 0.$$

Розв'язання. Многочлен у лівій частині цієї нерівності має такі корені: —6, —1, 0 і 1. Його корені поділяють числову вісь на п'ять інтервалів. У цих інтервалах кожний із співмножників є знакосталим. Знак многочлена в кожному інтервалі визначається по числу від'ємних співмножників.

Множник	Інтервал				
	$(-\infty; -6)$	$(-6; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$x + 6$	−	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	−	+
$x + 1$	−	−	+	+	+
x	−	−	−	+	+
$P(x)$	+	−	+	−	+

Як видно з таблиці, вираз, що стоїть у лівій частині нерівності, від'ємний при $-6 < x < -1$ і $0 < x < 1$.

Відповідь. $-6 < x < -1$ і $0 < x < 1$.

П р и м і т к а. Простіше такі нерівності можна розв'язувати за допомогою геометричної ілюстрації. Через те що многочлен $(x + 6)(x - 1)(x + 1)x$ не має кратних коренів, то крива — його графік — ніде не дотикається до осі OX, а лише перетинає її в точках, відповідних кореням многочлена. Тому досить визначити знак даного многочлена в якому-небудь з інтервалів, на які поділяють числову вісь корені многочлена, щоб дізнатися, в яких інтервалах графік даного многочлена розташований нижче осі OX, а в яких — вище, тобто при яких значеннях x даний многочлен від'ємний, а при яких — додатний.

3. Дробові нерівності. Через те що частка $\frac{A}{B}$ і добуток AB — числа одного й того самого знака, то нерівність $\frac{A}{B} > 0$, де A і B — які-небудь многочлени, рівносильна нерівності $A \cdot B > 0$. Тому дробову нерівність завжди можна замінити рівносильною їй нерівністю без дробових членів.

П р и к л а д. Розв'язати нерівність

$$\frac{x - 2}{(x - 5)(x + 3)} < 0.$$

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна такій:

$$(x+3)(x-2)(x-5)<0.$$

Корені многочлена $(x+3)(x-2)(x-5)$ дорівнюють: -3, 2 і 5. Складаємо таблицю

Множник	Інтервал			
	$(-\infty; -3)$	$(-3; 2)$	$(2; 5)$	$(5; \infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Як бачимо, даний многочлен приймає від'ємні значення при $-\infty<x<-3$ і $2<x<5$ (рис. 30).

Відповідь. $x<-3$ і $2<x<5$.

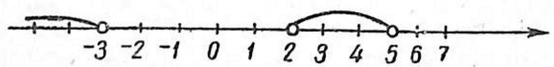


Рис. 30.

4. Ірраціональні нерівності. Розв'язуючи ірраціональні нерівності, насамперед треба встановити область допустимих значень невідомого. При цьому розглядаються тільки арифметичні корені. Загальний метод розв'язування цих нерівностей полягає в поступовому відокремленні радикалів і в піднесенні обох частин до степеня, що дорівнює показникові кореня. Так можна позбутися ірраціональності. Треба пам'ятати, що при піднесенні нерівності до степеня область допустимих значень невідомого може розширитись; отже, можуть появитись сторонні розв'язки.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень для x:

$$(x+2)(x-5)\geqslant 0 \text{ і } 8-x\geqslant 0,$$

звідки область допустимих значень буде

$$-\infty<x\leqslant -2; \quad 5\leqslant x\leqslant 8.$$

У даній області обидві частини нерівності невід'ємні; піднісши їх до квадрата, дістанемо нерівність

$$(x+2)(x-5)<(8-x)^2,$$

або

$$x^2-3x-10<64-16x+x^2,$$

звідки

$$13x<74, \quad x<5\frac{9}{13}.$$

Розв'язком вихідної нерівності буде перетин областей $-\infty<x\leqslant -2$; $5\leqslant x\leqslant 8$ і $x<5\frac{9}{13}$.

Відповідь. $x\leqslant -2$; $5\leqslant x<5\frac{9}{13}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2}>3.$$

Розв'язання. Визначаємо область існування кожного радикала:

$$9-x^2\geqslant 0, \quad x^2\leqslant 9, \quad -3\leqslant x\leqslant +3;$$
$$6x-x^2\geqslant 0, \quad x(6-x)\geqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant 6.$$

Отже, область існування обох радикалів буде

$$0\leqslant x\leqslant 3.$$

Далі відокремлюємо радикали і підносимо обидві частини до квадрата:

$$\sqrt{6x-x^2}>3-\sqrt{9-x^2}; \quad 6x-x^2>9-6\sqrt{9-x^2}+9-x^2.$$

Звідси

$$6\sqrt{9-x^2}>18-6x; \quad \sqrt{9-x^2}>3-x;$$
$$9-x^2>(3-x)^2; \quad 9-x^2>9-6x+x^2,$$

або

$$6x-2x^2>0, \quad x(3-x)>0,$$

звідки: 1) $x>0$ і $3-x>0$, отже, $0<x<3$;
2) $x<0$ і $3-x<0$ — не має розв'язку.

Відповідь. $0<x<3$.

§ 30. Тотожні нерівності

1. Означення. Будь-яка правильна числова нерівність, а також будь-яка буквена нерівність, яка справджується при всіх допустимих значеннях букв, що входять до неї, називається *тотожною нерівністю*.

Приклади тотожних нерівностей:

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}>\sqrt{10},$$
$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2},$$
$$x^2+x+1>0.$$

2. Деякі найважливіші нерівності.

1) $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$

тобто модуль суми будь-яких чисел не більший від суми їхніх модулів.

2) Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа додатні, то

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

тобто *середнє геометричне* кількох додатних чисел не більше від їх *середнього арифметичного*.

Рівність має місце лише в тому випадку, коли всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рівні.

3) Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа додатні, то

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

тобто середнє арифметичне кількох додатних чисел не більше від їх *середнього квадратичного*.

Рівність має місце лише в тому випадку, коли всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рівні.

4) Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа додатні, то

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

тобто *середнє гармонічне* кількох додатних чисел не більше від їх середнього геометричного.

Рівність має місце лише в тому випадку, коли всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рівні.

5) $$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\times$$
$$\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2},$$

якими б не були числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Знак рівності тут має місце лише в тому випадку, коли

$$a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n.$$

6) Якщо $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ і $0<b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

Якщо ж $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, але $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$, то

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

В обох випадках рівність здійснюється лише тоді, коли

$$a_1=a_2=\cdots=a_n \text{ і } b_1=b_2=\cdots=b_n.$$

7) При будь-яких дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

Рівність здійснюється тільки при

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0.$$

8) При будь-яких дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|.$$

Рівність здійснюється лише тоді, коли кожне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ дорівнює нулеві.

9) При всіх дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Рівність здійснюється лише в тому випадку, коли

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

10) При будь-яких дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\times$$
$$\times(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

Рівність здійснюється лише при умові, що

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n.$$

11) При додатному a і будь-якому раціональному $r > 1$

$$(1+a)^r > 1+ra.$$

ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

§ 31. Функціональна залежність величин

1. Сталі й змінні величини. Спостерігаючи який-небудь процес, можна помітити, що одні величини, які зустрічаються в ньому, змінюють своє значення, інші — не змінюють. Величини, які в даному процесі весь час зберігають одне й те саме значення, називають *сталими*. Величини, значення яких в даному процесі змінюються, називають *змінними*.

П р и к л а д. Під час зльоту літака відстань його від поверхні землі збільшується, кількість бензину в баках зменшується, а кількість пасажирів, довжина літака залишаються сталими.

Одна й та сама величина в одному процесі може бути сталою, а в іншому — змінною. Проте є й такі величини, які залишаються сталими весь час, наприклад відношення довжини кола до його радіуса, сума кутів трикутника, температура кипіння води тощо.

Такі величини називають *константами*.

Звичайно сталі величини позначають першими буквами латинського алфавіту: a, b, c, d, а змінні — останніми: x, y, z.

Змінна величина не завжди може набувати довільних значень. Більшість величин змінюється в певних допустимих для них межах.

Усі ті значення, яких величина може набувати в конкретних умовах розгляданого процесу, називаються *допустимими значеннями* для даної змінної величини.

2. Функціональна залежність. Часто буває так, що одна змінна величина залежить від іншої: кожна зміна значень однієї величини викликає відповідні зміни значень іншої. Якщо дві змінні величини пов'язані між собою так, що кожному значенню однієї з них відповідає певне значення другої, то кажуть, що між цими змінними існує *функціональна залежність*.

Приклади функціональної залежності.

Радіус кола та його довжина, вага покупки та її вартість, вага тіла та його віддаль від центра Землі та ін.

Прямо пропорціональна і обернено пропорціональна залежності величин (див. стор. 125) є окремими видами функціональної залежності.

3. Аргумент і функція. Якщо дві змінні величини перебувають у функціональній залежності, то та з них, яка може набувати довільних допустимих значень, називається *незалежною змінною*, або *аргументом*. Друга величина, значення якої залежать від значень аргумента, називається *залежною змінною*, або *функцією*.

П р и к л а д. Відомо, що чим вища температура, тим більшою стає довжина сталевої рейки, тобто довжина рейки залежить від температури. В даному випадку температура — аргумент, а довжина рейки — функція.

Ще приклади.

Площа квадрата є функція довжини його сторони, шлях, пройдений поїздом,— функція часу, врожайність — функція кількості внесених добрив, значення тричлена x^2+5x+6 — функція значень x.

Якщо величина y є функція величини x, пишуть: $y = f(x)$ і читають: «ігрек дорівнює еф від ікс». Для позначення функціональної залежності вживають й інші букви. Наприклад, якщо v є функція t, можна записати і так: $v = \varphi(t)$ («ве дорівнює фі від те»).

4. Способи задання функції. Функцію можна задати формулою, що показує, як за даним значенням аргумента можна обчислити відповідне значення функції. Такий спосіб задання функції називають *аналітичним*.

П р и к л а д. Залежність об'єму куба v від довжини його ребра a можна виразити формулою $v = a^3$. Ця формула показує, як для кожного значення a можна обчислити відповідне значення v. Наприклад, якщо $a = 4$, то $v = 64$, і т. д.

Залежно від того, якою формулою виражається та чи інша функція, розглядають різні види функцій. В елементарній математиці розглядаються: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення синусів, косинусів, тангенсів, котангенсів, секансів, косекансів, арксинусів, арккосинусів, арктангенсів, арккотангенсів, арксекансів та арккосекансів.

Ці дії називають *елементарними діями*. Дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з раціональним показником, добування кореня називають також *алгебраїчними діями*. Решту елементарних дій називають елементарними *трансцендентними*. Якщо функцію можна задати формулою, що містить лише алгебраїчні дії, її називають *алгебраїчною функцією*. Якщо функцію можна задати формулою, що містить елементарні дії, до складу яких входять і елементарні

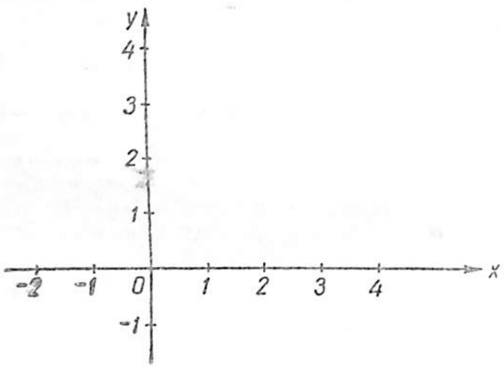


Рис. 31.

трансцендентні дії, то її називають *елементарною трансцендентною функцією*.

Функцію можна задати також *табличним* способом, тобто вказати значення аргумента і для кожного з них дати відповідні значення функції. Наприклад, таблиці квадратів, кубів, квадратних коренів тощо є не що інше як табличні задання функцій.

Дуже поширений також *графічний* спосіб задання функцій*. Звичайно для цього використовують прямокутну систему координат.

5. Координати. Сукупність двох взаємно перпендикулярних числових осей із спільним початком O називають *прямокутною системою координат* (рис. 31). Одну з цих осей, звичайно горизонтальну, називають *віссю абсцис*, або віссю x-ів або віссю OX, другу, вертикальну, називають *віссю ординат*, або віссю y-ів, або віссю OY. Площину, в якій задано систему координат, називають *координатною площиною*, а точку O перетину осей — *початком координат*.

* Існують й інші способи задання функцій: описовий, за допомогою функціональної шкали і т. п.

На координатній площині положення будь-якої точки можна визначити за допомогою двох чисел. Нехай, наприклад, треба визначити положення точки M (рис. 32). Для цього опускаємо з неї перпендикуляри на осі OX і OY. Якщо основам цих перпендикулярів відповідають числа 3 та 2, то ця пара чисел і визначає положення точки M.

Числа, що визначають положення точки на координатній площині, називаються *координатами*. Координату, яку беруть по осі абсцис,

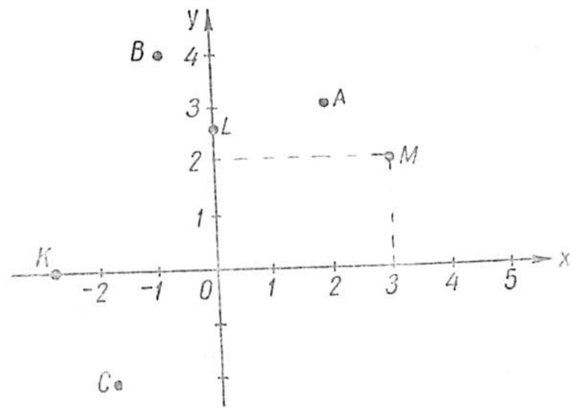


Рис. 32.

називають *абсцисою*; координату, яку беруть по осі ординат,— *ординатою*. Якщо точка N має абсцису a та ординату b, пишуть: $N(a, b)$ (першою завжди пишуть абсцису).

Позначені на рис. 32 точки мають такі координати:

$$A\,(2,\,3);\; B\,(-1,\,4);\; C\,(-2,\,-2);\; K\left(-3{,}0\right);\; L\left(0{,}2\,\frac{1}{2}\right).$$

6. Графічне зображення функції. Нехай маємо яку-небудь функцію $y = f(x)$. Позначимо кожне значення її аргумента на осі абсцис, а відповідне йому значення функції — довжиною перпендикуляра, опущеного на вісь абсцис з цієї точки. Тоді при всіляких змінах аргумента кінці перпендикулярів утворюють певну множину точок, яка називається *графіком* даної функції. Найчастіше графіком функції є деяка лінія. Проте він може складатися з окремих точок, відрізків, дуг і т. д.

Якщо функція задана графіком, то можна легко визначити для кожного (допустимого) значення аргумента відповідне значення функції. Для цього досить поставити у відповідній точці осі абсцис перпендикуляр до неї і продовжити його до перетину з графіком. Ордината точки перетину і дає відповідне значення функції.

Найпростіший спосіб побудови графіка функції — «за точками». Розглянемо його на прикладі. Нехай треба побудувати графік функції $y = x^2 - 2$. Для цього обчислюємо значення функції для кількох значень аргумента, наприклад для $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Результати зручно записувати у вигляді таблиці:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	2	-1	-2	-1	2	7

Кожну пару одержаних значень x та y вважаємо координатами і будуємо за ними на координатній площині точки. Потім через ці точки (від руки або за допомогою лекала) проводимо плавну лінію. Це й буде графік даної функції $y = x^2 - 2$ (рис. 33)*.

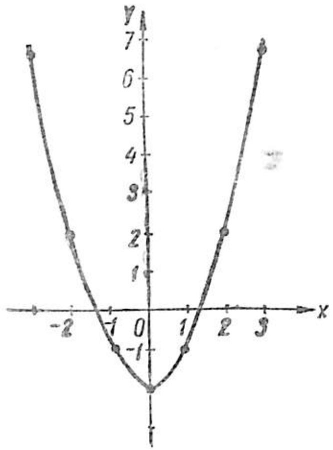


Рис. 33.

Для побудови графіків зручно користуватися міліметровим папером.

7. Зростаючі та спадні функції. Функція називається *зростаючою*, якщо для двох довільних значень аргумента більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції. Інакше: якщо при $x_1 < x_2$, де x_1 та x_2 — довільні значення аргумента, $f(x_1) < f(x_2)$, то функція $f(x)$ називається *зростаючою*. Якщо при $x_1 < x_2$, де x_1 та x_2 — довільні значення аргумента $f(x_1) > f(x_2)$, то функція $f(x)$ називається *спадною*. Функції зростаючі і функції спадні називаються ще *монотонними функціями*.

Якщо вказану властивість функція має лише на деяких проміжках області її означення, то її називають відповідно зростаючою або спадною на цих проміжках.

П р и к л а д и. Функція $y = x^3 + 5$ зростаюча; функція $y = x^2$ зростаюча при $x > 0$ і спадна при $x < 0$.

8. Обмежені й необмежені функції. Функція називається *обмеженою*, якщо абсолютне значення її при будь-яких значеннях аргумента не перевищує якого-небудь додатного числа A. Інакше: функція $y = f(x)$ називається обмеженою, якщо існує таке додатне A, що при всіх x

$$|f(x)| \leqslant A.$$

Графік обмеженої функції лежить цілком у смузі між прямими, паралельними осі OX, проведеними на віддалях A від неї.

П р и к л а д. Функція $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ обмежена, тому що $0 < y \leqslant 1$ при всіх x.

Якщо не існує такого додатного числа A, що при всіх значеннях x $|f(x)| \leqslant A$, то функція $f(x)$ називається *необмеженою*.

П р и к л а д. Функція $y = x^3$ необмежена.

9. Парні й непарні функції. Функція називається *парною*, якщо будь-яким протилежним значенням аргумента відповідають рівні значення функції. Інакше: якщо для будь-яких x $f(-x) = f(x)$, то функція $f(x)$ називається парною.

П р и к л а д. Функція $y = x^2$ — парна, бо при будь-яких x

$$(-x)^2 = x^2.$$

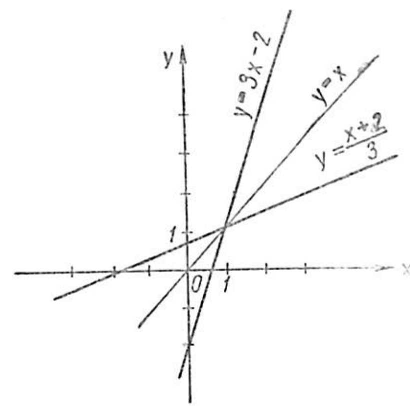


Рис. 34.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Якщо будь-яким протилежним значенням аргумента відповідають протилежні значення функції, то така функція називається *непарною*. Інакше: функція $f(x)$ називається непарною, якщо при будь-яких значеннях x

$$f(-x) = -f(x).$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

П р и к л а д. Функція $y = x^3$ — непарна, тому що $(-x)^3 = -x^3$.

Існують функції, які не належать ні до парних, ні до непарних. Такі, наприклад, функції

$$y = x^3 + x^2, \quad y = \frac{x-1}{x^2+1} \text{ та ін.}$$

* Проте в більшості випадків зручніше будувати графіки функцій, використовуючи їхні властивості.

10. Пряма й обернена функції. Нехай дано функцію $y = 3x - 2$. Якщо виразити x через y і в здобутій рівності замість x написати y, а замість y написати x, матимемо $y = \frac{x+2}{3}$. Це і є функція, *обернена* даній.

Дану функцію можна також назвати оберненою по відношенню до одержаної. Ці функції взаємно обернені одна одній.

Графіки двох взаємно обернених функцій — симетричні один одному відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, тобто відносно прямої $y = x$ (рис. 34).

§ 32. Найпростіші функції та їх графіки

1. Пряма пропорціональність. Залежність між величинами x і y, яку можна виразити формулою

$$y = ax,$$

де a — певне дане число, називається *прямо пропорціональною залежністю.*

П р и м і т к а. В арифметиці розглядають лише такі приклади прямо пропорціональної залежності, в яких a (коефіцієнт пропорціональності), x та y — числа додатні. В алгебрі розглядають і такі залежності, в яких ці числа можуть бути і від'ємними і рівними нулеві. Тому те означення прямо пропорціональної залежності, яке дано на стор. 125 для алгебри не підходить.

Графік прямо пропорціональної залежності є пряма, що проходить через початок координат. Графік залежності $y = ax$ проходить у першому й третьому координатних кутах, якщо $a > 0$ (рис. 35), або в другому й четвертому координатних кутах, якщо $a < 0$ (рис. 36).

2. Лінійна функція. Лінійною функцією називають функцію, яку можна виразити формулою

$$y = ax + b,$$

де x — аргумент, a і b — задані числа.

Лінійна функція зростає при $a > 0$ і спадає при $a < 0$. Графік лінійної функції є пряма лінія, що проходить через точку M $(0, b)$ паралельно графіку функції $y = ax$ (рис. 37). Якщо $a = 0$, графік лінійної функції є пряма, паралельна осі абсцис, що проходить через точку b на осі ординат (рис. 38).

Прямо пропорціональна залежність є окремим випадком лінійної функції (при $b = 0$).

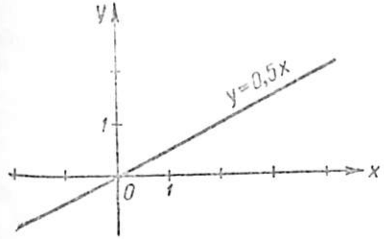


Рис. 35.

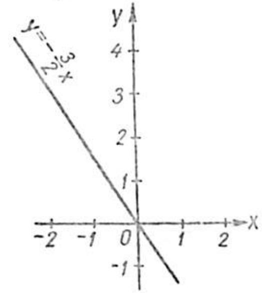


Рис. 36.

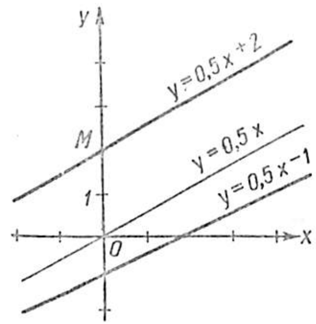


Рис. 37.

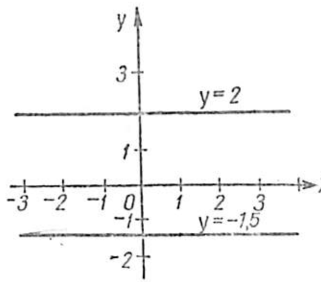


Рис. 38.

3. Обернено пропорціональна залежність. Залежність між величинами x і y, яку можна виразити формулою

$$y = \frac{a}{x},$$

де a — певне задане число, називають *обернено пропорціональною залежністю.* Тут a, x, y можуть бути не тільки додатними числами (як в арифметиці), але й від'ємними. Тому наведене тут означення більш загальне, ніж те, що давалося в арифметиці (див. стор. 126).

Графік обернено пропорціональної залежності є крива лінія, що складається з двох окремих віток, розташованих у першому і третьому

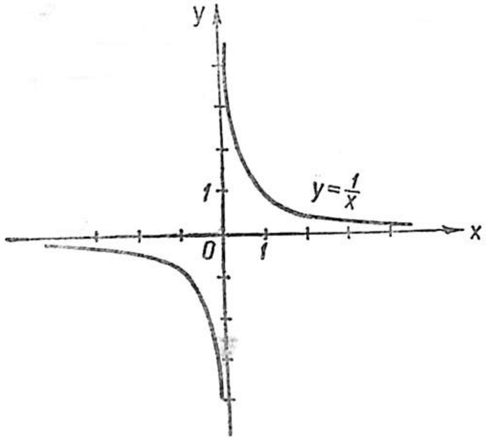


Рис. 39.

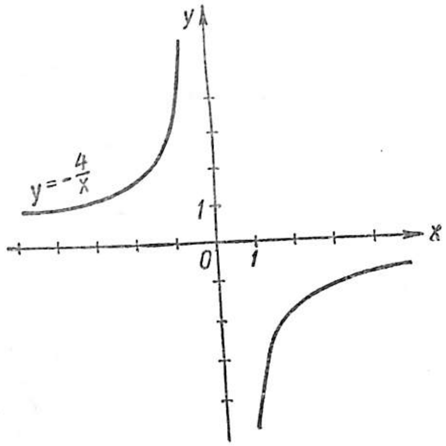


Рис. 40.

координатних кутах при $a > 0$ (рис. 39), або в другому і четвертому — при $a < 0$ (рис. 40). Ця лінія називається рівнобічною *гіперболою*. Вона симетрична відносно початку координат, тому що функція $y = \frac{a}{x}$ — непарна. Ця функція необмежена. При $x > 0$ та $x < 0$ ця функція спадна, якщо $a > 0$, і зростаюча, якщо $a < 0$; при $x = 0$ функція ця не визначена, бо $x = 0$ не належить до області допустимих значень аргумента.

4. Квадратична функція. *Квадратичною* (або квадратною) називають функцію, яку можна виразити формулою

$$y = ax^2 + bx + c,$$

де x — аргумент; $a \neq 0$; b, c — сталі величини.

Найпростішою квадратичною функцією є функція виду $y = x^2$. Це — необмежена парна функція, означена для всіх дійсних значень аргумента x. При $x > 0$ вона зростаюча, а при $x < 0$ — спадна. Її графік (рис. 41) — крива лінія, що називається *параболою*. Вона проходить через початок координат симетрично осі ординат, вітки її напрямлені вгору.

Квадратична функція виду $y = ax^2$ також парна, необмежена, визначена для всіх дійсних x. Її графіком також є парабола, що проходить через початок координат симетрично осі ординат. Але при додатних a вітки її напрямлені вгору, а при від'ємних a — вниз. Чим менша абсолютна величина a, тим далі відходять вітки параболи від осі ординат (рис. 42).

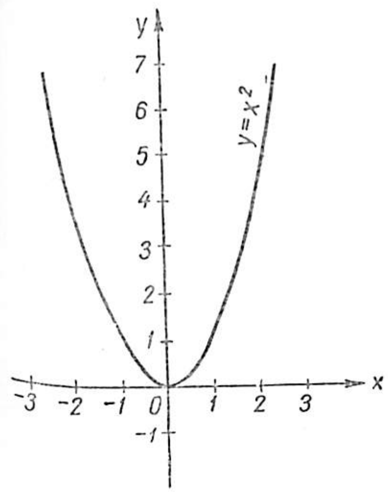


Рис. 41.

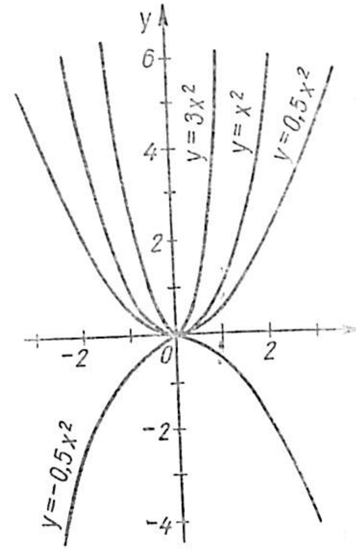


Рис. 42.

Графік квадратної функції $y = ax^2 + bx + c$ є така ж парабола, як і графік функції $y = ax^2$, її вітки також напрямлені вгору при $a > 0$ і вниз при $a < 0$, її вісь симетрії паралельна осі ординат. Тільки вершина цієї параболи (рис. 43) знаходиться не в початку координат, а в точці

$$\left(-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, тобто $b^2 - 4ac < 0$, то графік функції $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь абсцис (рис. 44). Якщо він дорівнює нулеві, графік функції дотикається до осі абсцис, причому точка дотику є корінь рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 45). Якщо дискримінант додатний, парабола перетинає вісь абсцис у двох точках, які є коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (рис. 46).

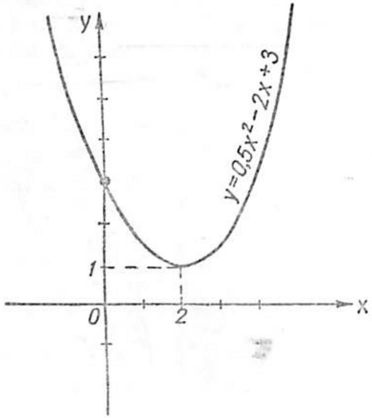


Рис. 43.

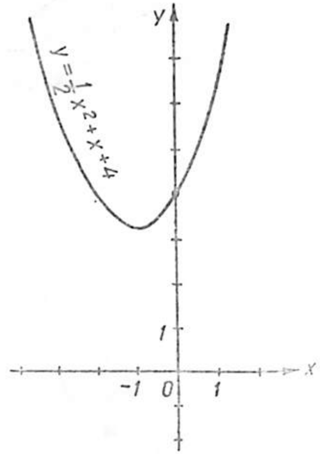


Рис. 44.

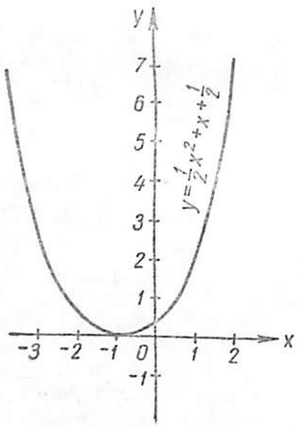


Рис. 45.

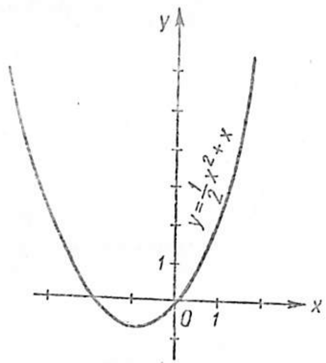


Рис. 46.

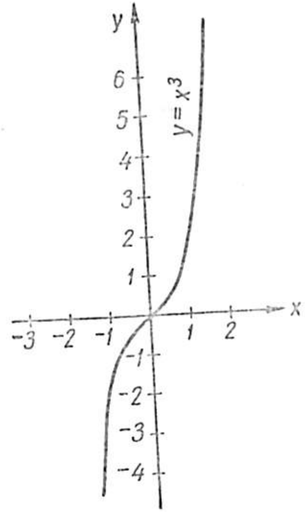


Рис. 47.

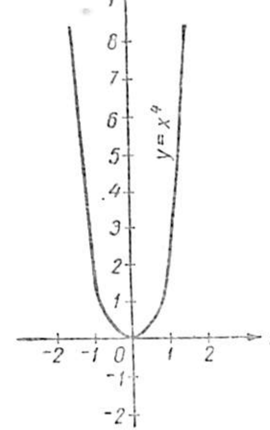


Рис. 48.

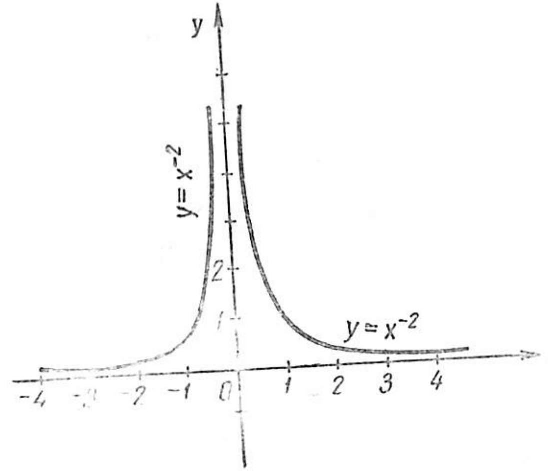


Рис. 49.

5. Степенева функція. *Степеневою* називають функцію, яку можна виразити формулою $y = x^n$, де x — аргумент, а n — показник степеня.
При n, що дорівнює 1, 2, —1, маємо відповідно функції

$$y = x, \; y = x^2 \text{ та } y = \frac{1}{x},$$

вже розглянуті раніше (стор. 298 і 299).

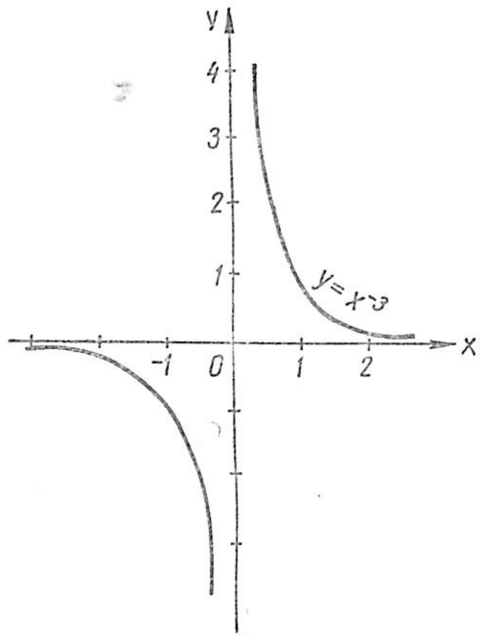


Рис. 50.

Якщо n — парне ціле число, то функція $y = x^n$ парна; при непарних n вона непарна. При додатних n ця функція визначена для всіх дійсних значень аргумента x, при від'ємних n вона визначена для всіх x, крім $x = 0$. На рисунках 47—50 подано графіки степеневої функції при показниках, що відповідно дорівнюють 3, 4, —2, —3.

Якщо $n = \frac{p}{q}$ — нескоротний дріб, то при парному знаменнику q функція $y = x^{\frac{p}{q}}$ визначена лише для додатних значень x. При непарному знаменнику q ця функція визначена для всіх значень x, якщо $\frac{p}{q} > 0$; якщо ж $\frac{p}{q} < 0$, то вона визначена для всіх x, крім $x = 0$.

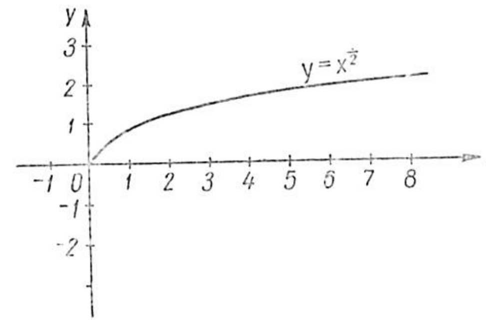


Рис. 51.

Якщо q непарне, то функція $y = x^{\frac{p}{q}}$ є парною при парному p і непарною при непарному p.
На рисунках 51—53 подано графіки степеневих функцій при показниках відповідно $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.
При будь-якому $n \neq 0$ степенева функція необмежена, графік кожної з цих функцій проходить через точку (1, 1).
Якщо n — число ірраціональне, то функція $y = x^n$ визначена тільки для додатних значень аргумента x (або для невід'ємних x, якщо $n > 0$).

6. Показникова функція. *Функція, яку можна виразити формулою $y = a^x$, де x — аргумент, а a — додатне число, називається показниковою функцією.*
Ця функція визначена для будь-яких дійсних x.
Примітка. Число a тут береться додатним тому, що при від'ємних a числа $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}}$ і багато інших не були б дійсними. Якщо

a додатне, а x дорівнює нескоротному дробові з парним знаменником, то a^x має два дійсних значення, наприклад $9^{\frac{1}{2}}$ має два значен-

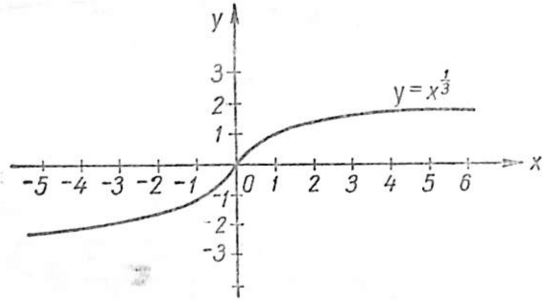


Рис. 52.

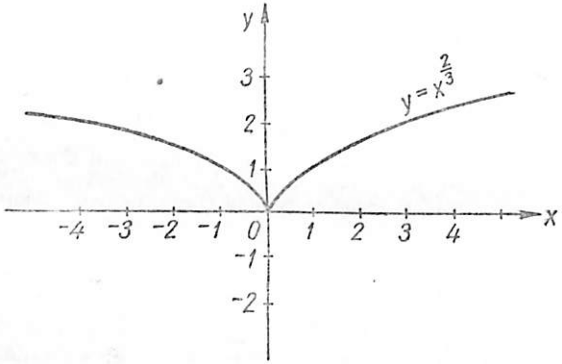


Рис. 53.

ня: 3 і —3. Проте значення функції $y = a^x$ беруться лише додатні: кожному дійсному значенню x відповідає тільки одне додатне значення показникової функції a^x.

Показникова функція при будь-якій основі a додатна. При $a > 1$ ця функція є зростаючою, а при $a < 1$ — спадною. Графік показникової функції — крива, що проходить через точку (0,1). Він необмежено наближається до осі абсцис, але не досягає її. Графіки функцій $y = a^x$ та $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симетричні відносно осі ординат.

На рис. 54 подано графіки трьох показникових функцій:

$$y = 2^x, \quad y = 0{,}5^x, \quad y = 5^x.$$

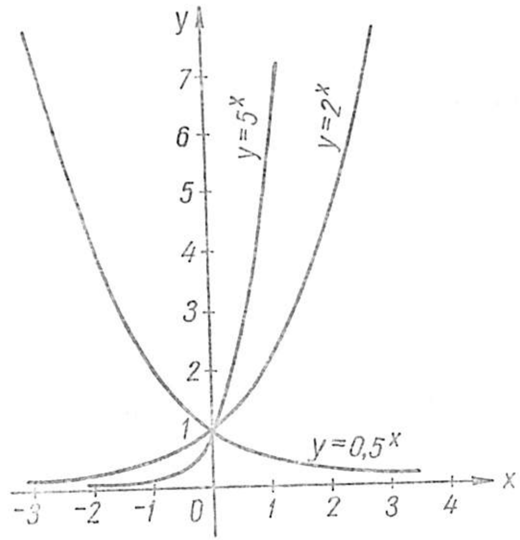


Рис. 54.

§ 33. Графічні способи розв'язування рівнянь і нерівностей

1. Системи рівнянь з двома невідомими. За допомогою графіків функцій можна порівняно легко знаходити (взагалі кажучи, наближені) дійсні розв'язки систем двох рівнянь з двома невідомими. Для цього кожне з рівнянь розглядаємо як функціональну залежність між його невідомими, будуємо графіки цих двох залежностей на одній координатній площині і знаходимо точку їхнього перетину. Абсциса й ордината точки перетину графіків дають розв'язок системи.

П р и к л а д 1. Розв'язати систему рівнянь (графічно)

$$\begin{cases} x - y = 0{,}5, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Кожне з цих рівнянь лінійне, отже, їхні графіки — прямі лінії. Будуємо на одній координатній площині графіки цих рівнянь (рис. 55). Вони перетинаються в одній точці з координатами 1,5 і 1.

Відповідь. Дана система має один розв'язок:

$$x = 1{,}5; \ y = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} xy = 2, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Дані рівняння можна перетворити так:

$$y = \frac{2}{x} \ \text{та} \ y = x + 1.$$

Графік першого рівняння є гіпербола, а другого — пряма (рис. 56). Вони перетинаються в двох точках (1; 2) і (—2; —1).

Відповідь. Система має два розв'язки:

$$x_1 = 1; \ y_1 = 2 \ \text{і} \ x_2 = -2; \ y_2 = -1.$$

2. Графічне розв'язання рівнянь з одним невідомим.

Приклад 1. Розв'язати графічним способом рівняння

$$x^3 - 2x - 4 = 0.$$

Розв'язання. Зобразимо дане рівняння у вигляді

$$x^3 = 2x + 4.$$

Позначимо кожну його частину буквою y і розв'яжемо розглянутим вище способом систему одержаних рівнянь з двома невідомими (рис. 57):

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 2x + 4. \end{cases}$$

Як бачимо, графіки перетинаються в одній точці з абсцисою 2.

Відповідь. Дане рівняння має один дійсний корінь $x = 2$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^4 - x + 2 = 0.$$

Розв'язання. $x^4 = x - 2.$

Розглянемо систему

$$\begin{cases} y = x^4, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

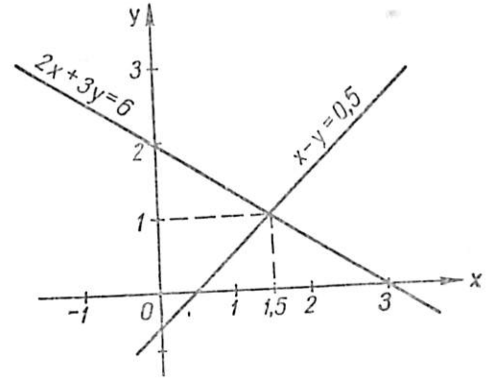


Рис. 55.

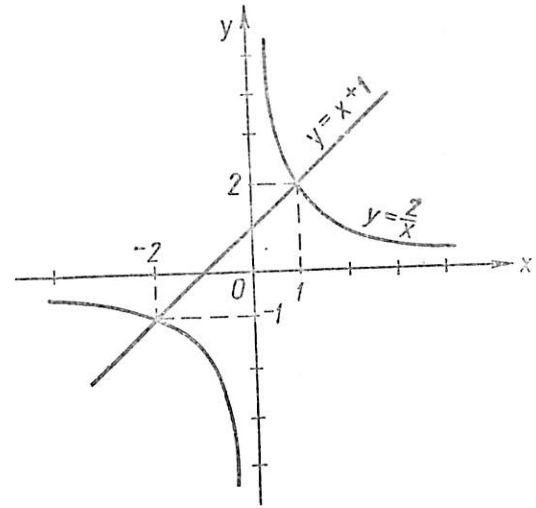


Рис. 56.

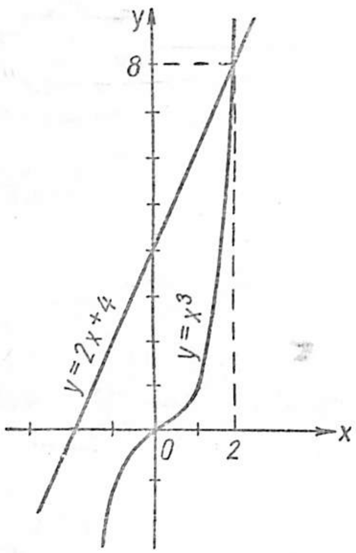


Рис. 57.

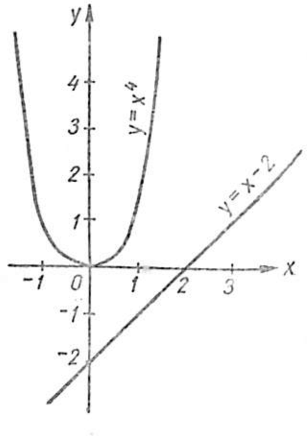


Рис. 58.

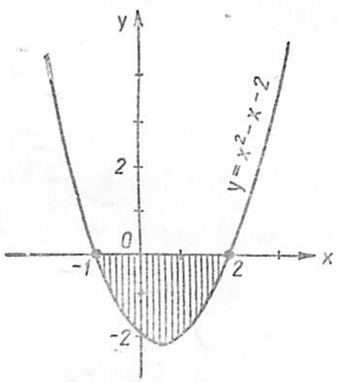


Рис. 59.

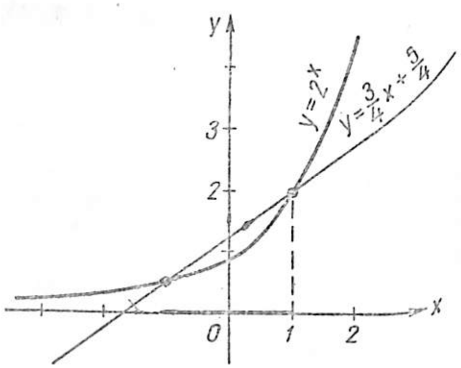


Рис. 60.

Побудувавши графіки кожного з рівнянь (рис. 58), бачимо, що вони не мають спільних точок.

Відповідь. Дане рівняння не має дійсних розв'язків.

3. Графічне розв'язування нерівностей з одним невідомим.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Розв'язання. Побудувавши графік функції $y = x^2 - x - 2$ (рис. 59), бачимо, що y від'ємний тільки при

$$-1 < x < 2.$$

Відповідь. $-1 < x < 2$.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність

$$2^{x+2} < 3x + 5.$$

Розв'язання. Поділивши обидві частини нерівності на 4, дістанемо $2^x < \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. Позначимо $y_1 = 2^x$, $y_2 = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ і побудуємо на одній координатній площині графіки цих двох функцій (рис. 60). Як бачимо, y_1 менше відповідного значення y_2 для z з проміжку $(-1;\ 1)$.

Відповідь. $-1 < x < 1$.

§ 34. Логарифми

1. Означення логарифма. Логарифмом числа N за даною основою a називається показник степеня x, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число N.

Позначення: $\log_a N = x$. Таким чином, за означенням, якщо $x = \log_a N$, то $a^x = N$. Звідси випливає тотожність (вірна тільки при додатних N): $a^{\log_a N} = N$. Основа a вважається додатною і такою, що не дорівнює одиниці.

П р и к л а д и. $\log_2 8 = 3$, тому що $2^3 = 8$; $\log_2 0{,}25 = -2$, тому що $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Знаком lg без позначення основи записують *десятковий* логарифм, тобто логарифм при основі 10, знаком log без позначення основи — логарифм за довільною основою (в межах однієї формули ця основа мислиться як одне й те саме додатне число)*.

* Для теоретичних досліджень найбільш придатною основою логарифмів є ірраціональне число $e = 2{,}71828183\ldots$. У вищій математиці буквою e позначають $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Логарифми з основою e називаються *натуральними логарифмами*. Їх прийнято позначати символом ln. Отже, $\ln x$ позначає те саме, що й $\log_e x$.

Логарифм — слово грецьке, воно складається з двох слів: λόγος — відношення, ἀριθμός — число. Слово «логарифм», таким чином, у буквальному перекладі означає число, що змінює відношення.

2. Логарифмічна функція. Функція, яку можна виразити формулою $y = \log_a x$, де x — аргумент, а a відмінне від одиниці додатне число, називається *логарифмічною функцією*.

Приклади логарифмічних функцій:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_\pi x,\ y = \log_{10} x.$$

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ обернена показниковій функції $y = a^x$. Тому їхні графіки симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 61).

На рис. 62 подано графіки таких логарифмічних функцій:

$$y = \log_2 x;\ y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ та } y = \log_5 x.$$

3. Властивості логарифмів. а) Будь-яке додатне число за будь-якою* основою має єдиний логарифм.

б) При будь-якій основі від'ємні числа не мають логарифмів.

в) При будь-якій основі логарифм одиниці дорівнює нулеві.

г) Логарифм самої основи дорівнює одиниці.

д) При основі, більшій від одиниці, більшому числу відповідає і більший логарифм, при цьому логарифми чисел, більших від одиниці, додатні, а логарифми чисел, менших від одиниці, від'ємні.

При основі, меншій від одиниці, більшому числу відповідає менший логарифм, при цьому логарифми чисел, менших від одиниці, додатні, а логарифми чисел, більших від одиниці, від'ємні.

е) Якщо основа логарифмів більша від одиниці, то при необмеженому зростанні числа необмежено зростає і його логарифм, а при зменшенні числа до нуля його логарифм, залишаючись від'ємним, необмежено зростає за абсолютною величиною.

є) Якщо основа логарифмів менша від одиниці, то при необмеженому зростанні числа його логарифм, залишаючись від'ємним, необмежено спадає, а при зменшенні числа до нуля його логарифм необмежено зростає.

Усі ці властивості неважко «побачити», розглядаючи графіки логарифмічних функцій при різних основах. Але їх можна довести і аналітично, не вдаючись до графіків.

---

* Тут і далі ми маємо на увазі будь-яку додатну відмінну від одиниці основу логарифмів (див. означення логарифма, стор. 311). Логарифми розглядаємо тільки дійсні.

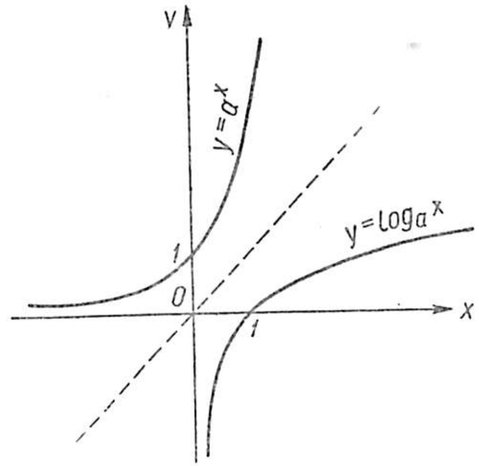


Рис. 61.

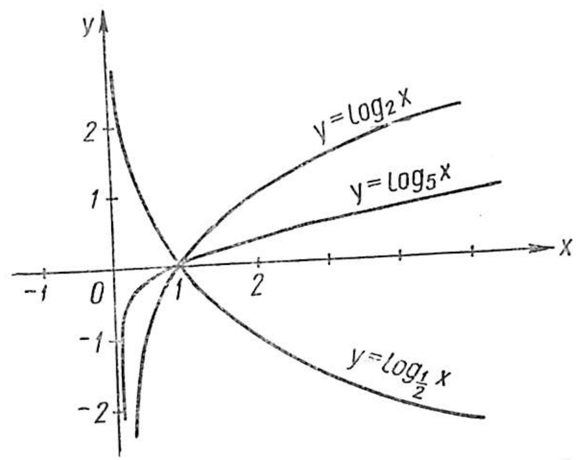


Рис. 62.

4. **Розв'язування прикладів з використанням властивостей логарифмів.**

Приклад 1. Виходячи з означення логарифма, знайти:

а) Яке число має логарифм 2 при основі 7?

б) Яким є логарифм 125 за основою 5?

в) При якій основі логарифм числа 16 дорівнює 4?

Розв'язання.

а) $2 = \log_7 x, \qquad x = 7^2 = 49;$

б) $x = \log_5 125, \qquad 5^x = 125, \; x = 3;$

в) $4 = \log_x 16, \qquad x^4 = 16, \; x = 2.$

Приклад 2. На підставі тотожності $a^{\log_a N} = N$ знайти: а) $36^{\log_6 2}$; б) $81^{0,5\log_9 7}$; в) $2^{\log_2 5 + 1}$.

Розв'язання.

$$а)\; 36^{\log_6 2} = 6^{2\log_6 2} = 6^{\log_6 2^2} = 2^2 = 4;$$

$$б)\; 81^{0,5\log_9 7} = [(9^2)^{\frac{1}{2}}]^{\log_9 7} = 9^{\log_9 7} = 7;$$

$$в)\; 2^{\log_2 5+1} = 2^{\log_2 5} \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10.$$

Приклад 3. Що більше: $\log_a 2$ чи $\log_a 3$?

Розв'язання. Якщо $a > 1$, то більшому числу відповідає і більший логарифм, тобто $\log_a 2 < \log_a 3$. Якщо $a < 1$, то більшому числу відповідає менший логарифм, тобто $\log_a 2 > \log_a 3$. Тут припускається, що

$$a > 0, \quad a \neq 1.$$

Приклад 4. Визначити x, якщо:

а) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x;$

б) $\log_x 0,125 = -2;$

в) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}.$

Розв'язання.

а) $(3\sqrt{3})^x = \frac{1}{27}, \quad (\sqrt{27})^x = 27^{-1}, \; (27)^{\frac{x}{2}} = 27^{-1}, \; \frac{x}{2} = -1, \quad x = -2;$

б) $x^{-2} = 0,125, \quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{8}, \quad x^2 = 8, \quad x = 2\sqrt{2};$

в) $x = (3\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}.$

Приклад 5. Визначити x з рівнянь:

а) $5\log_2 x - 6 = 2\log_2 x;$

б) $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0.$

Розв'язання.

а) $5\log_2 x - 6 = 2\log_2 x, \; 3\log_2 x = 6, \; \log_2 x = 2, \; x = 2^2 = 4;$

б) $\log_3 x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}, \; (\log_3 x)_1 = 2,$

$(\log_3 x)_2 = 1, \quad x_1 = 3^2 = 9$ та $x_2 = 3^1 = 3.$

5. **Перехід від однієї основи логарифмів до іншої.** Якщо треба перейти від логарифмів з основою a до логарифмів з основою b, використовують таку тотожність:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N.$$

Множник $\frac{1}{\log_a b}$ називають *модулем переходу.*

Розглянемо більш докладно, як переходити від десяткових логарифмів до натуральних, і навпаки.

Щоб за відомим десятковим логарифмом числа N знайти його натуральний логарифм, треба поділити десятковий логарифм числа N на десятковий логарифм числа e (останній дорівнює 0,4343...).

Величина $\lg e = 0,4343\ldots$ називається *модулем десяткових логарифмів* і позначається буквою M, так що

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N.$$

Наприклад, з таблиць десяткових логарифмів маємо (див. стор. 30):

$$\lg 2 = 0,3010. \text{ Звідси } \ln 2 = \frac{1}{M} \cdot 0,3010 = 0,6932.$$

Щоб за відомим натуральним логарифмом числа N знайти його десятковий логарифм, треба помножити натуральний логарифм на модуль десяткових логарифмів $M = \lg e$:

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \cdot \ln N = 0,4343\, N.$$

Наприклад, $\ln 3 = 1{,}0986$, а звідси

$$\lg 3 = M \cdot 1{,}0986 = 0{,}4771.$$

Дуже часто в логарифмічних перетвореннях користуються також формулами:

$$\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}; \quad \log_{b^n} a^n = \log_b a;$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b; \ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Приклад 1. Що більше: $\log_4 3$ чи $\log_{16} 9$?
Розв'язання. Використовуючи формулу $\log_{b^n} a^n = \log_b a$, дістаємо

$$\log_{16} 9 = \log_{4^2} 3^2 = \log_4 3.$$

Приклад 2. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} 8$ знаючи, що $\log_2 3 = a$.

Розв'язання.

$$\log_{\sqrt{3}} 8 = \log_3 64 = \frac{1}{\log_{64} 3} = \frac{1}{\log_{2^6} 3} = \frac{1}{\frac{1}{6}\log_2 3} = \frac{6}{\log_2 3} = \frac{6}{a}.$$

§ 35. Логарифмування і потенціювання

1. Логарифмування. Прологарифмувати алгебраїчний вираз — значить виразити логарифм його через логарифми окремих чисел, що входять до цього виразу. Це можна зробити, використовуючи теореми про логарифм добутку, частки, степеня і кореня.

Логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів співмножників:

$$\log (a, b) = \log a + \log b.$$

Логарифм частки (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Логарифм степеня дорівнює добуткові показника степеня на логарифм його основи:

$$\log a^m = m \log a.$$

Логарифм кореня дорівнює частці від ділення логарифма підкореневого числа на показник кореня:

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Примітка. Букви a і b тут позначають додатні числа. При логарифмуванні алгебраїчних виразів треба мати на увазі, що логарифм суми не дорівнює сумі логарифмів, тобто не можна замість $\log (a + b)$ писати $\log a + \log b$. Не можна також замість $\log (a - b)$ писати $\log a - \log b$.

Логарифмування алгебраїчних виразів проілюструємо на прикладах.

Приклади. Прологарифмувати такі вирази:

а) $x = 3bc; \quad \log x = \log 3 + \log b + \log c.$

б) $x = \dfrac{a}{bc}; \ \log x = \log a - \log (bc) = \log a - (\log b + \log c) = \log a - \log b - \log c.$

в) $x = a^3 b^2; \ \log x = \log a^3 + \log b^2 = 3\log a + 2\log b.$

г) $x = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{2b^2c}}; \quad \log x = \dfrac{1}{4}\log\dfrac{a^3}{2b^2c} = \dfrac{1}{4}(\log a^3 - \log 2b^2c) =$

$$= \frac{1}{4}[3\log a - (\log 2 + \log b^2 + \log c)] =$$

$$= \frac{1}{4}(3\log a - \log 2 - 2\log b - \log c).$$

д) $x = 15p^2\sqrt{2p^2(p-q)^3}; \ \log x = \log 15 + 2\log p +$

$$+ \frac{1}{4}[\log 2 + 2\log p + 3\log (p - q)] = \log 15 + 2\log p +$$

$$+ \frac{1}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\log p + \frac{3}{4}\log (p-q) = \log 15 + \frac{5}{2}\log p +$$

$$+ \frac{1}{4}\log 2 + \frac{3}{4}\log (p - q).$$

е) $x = \dfrac{6a\sqrt{2(a-b)c}}{5(a-b)^2}; \quad \log x = \log 6 + \log a +$

$$+ \frac{1}{2}[\log 2 + \log (a-b) + \log c] - \log 5 - 2\log (a-b) =$$

$$= \log 6 + \log a + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log (a - b) + \frac{1}{2}\log c - \log 5 -$$

$$- 2\log (a-b) = \log 6 + \log a + \frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\log (a - b) +$$

$$+ \frac{1}{2}\log c - \log 5.$$

є) $x = \dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$; $\log x = \dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{4}\log a + \dfrac{1}{8}\log a -$

$$-\frac{1}{3}\log a - \frac{1}{9}\log a = \frac{31}{72}\log a.$$

2. Потенціювання. Якщо за даним результатом логарифмування знаходять вираз, від якого цей результат одержано, то таку операцію називають *потенціюванням*.

Приклади. Пропотенціювати такі вирази:

$$\text{а) } \log x = 5\log c - \frac{1}{3}\log d;$$

$$\text{б) } \log x = \log b - \frac{1}{m}\log(b-c) + m\log(b+c);$$

$$\text{в) } \log x = -\log(a+b) + \frac{2}{5}\left[\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{3}(\log a - \log b)\right].$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \log x = \log c^5 - \log\sqrt[3]{d} = \log\frac{c^5}{\sqrt[3]{d}}, \quad x = \frac{c^5}{\sqrt[3]{d}};$$

$$\text{б) } \log x = \log b + \log(b-c)^{-\frac{1}{m}} + \log(b+c)^m =$$

$$= \log\left[b(b-c)^{-\frac{1}{m}}(b+c)^m\right], \quad x = \frac{b(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}};$$

$$\text{в) } \log x = \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}\log a + \frac{5}{6}\log b\right) - \log(a+b) = \frac{4}{15}\log a +$$

$$+\frac{1}{3}\log b - \log(a+b) = \log\frac{a^{\frac{4}{15}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{15}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}.$$

§ 36. Десяткові логарифми

1. Властивості десяткових логарифмів. а) *Логарифм цілого числа, зображеного одиницею з наступними нулями, є ціле додатне число, що має стільки одиниць, скільки нулів у даному числі.*

Приклади. $\lg 100 = 2$; $\lg 10\,000 = 4$.

б) *Логарифм десяткового дробу, зображеного одиницею з попередніми нулями, є ціле від'ємне число, що має стільки від'ємних одиниць, скільки нулів у зображенні дробу, враховуючи і нуль цілих.*

Приклади. $\lg 0{,}00001 = -5$; $\lg 0{,}001 = -3$.

в) *Логарифм раціонального числа, яке не буде степенем 10 з цілим показником (додатним, від'ємним або нульовим), є ірраціональне число.*

Логарифм ірраціонального числа може бути як раціональним, так і ірраціональним числом. Наприклад,

$$\lg\sqrt[7]{100} = \frac{1}{7}\lg 100 = \frac{2}{7} \text{ (раціональне число)},$$

$$\lg\sqrt{3} = \frac{1}{2}\lg 3 \text{ (ірраціональне число)}.$$

Ціла частина логарифма називається його *характеристикою*, а дробова — *мантисою*.

г) *Характеристика логарифма числа, більшого від одиниці, на одиницю менша від числа цифр його цілої частини.*

Приклади. $\lg 3{,}15 = 0, \ldots$; $\lg 375 = 2, \ldots$; $\lg 2000 = 3, \ldots$.

д) *Характеристика логарифма числа, меншого від одиниці, має стільки від'ємних одиниць, скільки нулів у цьому числі передує першій значущій цифрі, враховуючи і нуль цілих.* При цьому мантиса логарифма додатна.

Приклади. $\lg 0{,}35 = \bar{1}, \ldots$; $\lg 0{,}0054 = \bar{3}, \ldots$.

е) *Від множення числа на 10, 100, 1000, ..., взагалі на одиницю з наступними нулями, мантиса логарифма не змінюється, а характеристика збільшується на стільки одиниць, скільки нулів у множнику.*

Від ділення числа на одиницю з нулями мантиса логарифма не змінюється, а характеристика зменшується на стільки одиниць, скільки нулів у дільнику.

Тому перенесення коми в десятковому дробі на кілька знаків праворуч або ліворуч не змінює мантиси логарифма цього дробу, а лише характеристику.

Таким чином, логарифми чисел 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 відрізняються лише характеристиками, але не мантисами (при умові, що всі мантиси додатні). Мантиси логарифмів чисел, що мають одну й ту саму значущу частину, однакові.

2. Перетворювання від'ємного логарифма. Відомо, що десяткові логарифми чисел, менших від одиниці, від'ємні. Такі логарифми завжди можна перетворити так, щоб мантиса у них була додатною, а характеристика — від'ємною. Це виконують за таким правилом.

Щоб перетворити логарифм з від'ємною мантисою в логарифм з додатною мантисою, треба до характеристики додати мінус одиницю, а до мантиси додати плюс одиницю.

Наприклад, логарифм — 2,3781 можна перетворити так:

$$-2{,}3781 = -2 - 0{,}3781 = (-2 - 1) + (1 - 0{,}3781) = -3 + 0{,}6219 = \bar{3}{,}6219.$$

Коротко ці перетворення записують так:

$$-2{,}3781 = \overset{-1\,+\,1}{-2{,}3781} = \bar{3}{,}6219.$$

Приклади.

$$-1{,}3720 = \overset{-1\,+\,1}{-1{,}3720} = \bar{2}{,}6280$$

$$-0{,}7421 = \overset{-1\,+\,1}{-0{,}7421} = \bar{1}{,}2479$$

$$-2{,}0374 = \overset{-1\,+\,1}{-2{,}0374} = \bar{3}{,}9626$$

$$-1{,}4570 = \overset{-1\,+\,1}{-1{,}4570} = \bar{2}{,}5430$$

3. Таблиці десяткових логарифмів. Існують таблиці, в яких подано десяткові логарифми всіх чисел з точністю до трьох, чотирьох, п'яти і т. д. десяткових знаків. Відповідно до цього їх називають *тризначними*, *чотиризначними*, *п'ятизначними* і т. д. Найчастіше користуються чотиризначними таблицями десяткових логарифмів. Ці таблиці (див. стор. 30) містять мантиси логарифмів усіх цілих чисел від 1 до 9999 включно, обчислені з чотирма десятковими знаками.

Користуються цими таблицями так.

Приклад 1. Знайдемо десятковий логарифм тризначного числа 73,3. Його характеристика 1, тому що в числі 73 дві цифри. Щоб знайти мантису, відкидаємо кому й шукаємо мантису числа 733. У колонці, позначеній буквою N, знаходимо число 73. Пересуваючись по рядку, в якому знаходиться число 73, до перетину його з колонкою, позначеною цифрою 3, знаходимо 8651. Число 0,8651 і буде шуканою мантисою.

Отже, $\lg 73{,}3 = 1{,}8651$.

Приклад 2. Знайти логарифм числа 5. Його характеристика 0, тому що число містить одну цифру. Приписуючи до 5 два нулі, дістаємо тризначне число 500 і відшукуємо так само, як вище, його мантису 6990. Отже, $\lg 5 = 0{,}6990$.

Приклад 3. Знайти логарифм числа 5,1. Його характеристика 0, тому що в цілій частині є лише одна цифра. Відкидаємо кому й приписуємо нуль, дістаємо 510 і шукаємо мантису: 7076. Отже, $\lg 5{,}1 = 0{,}7076$.

Приклад 4. Знайти логарифм числа 672,3. Характеристика його дорівнює 2. Щоб знайти мантису, не звертаємо увагу на кому, відкидаємо крайню праву цифру 3 й шукаємо мантису логарифма числа 672. Вона дорівнює 0,8274. Потім у третій колонці поправок (крайні праві колонки з цифрами 1—9) в тому ж рядку, що й число 67, знаходимо поправку 2. Мантису даного числа одержимо як суму $0{,}8274 + 0{,}0002 = 0{,}8276$.

Записують це так:

$$\begin{array}{r} \lg 672{,}0 = 2{,}8274 \\ +3 \qquad +2 \\ \hline \lg 672{,}3 = 2{,}8276 \end{array}$$

Приклад 5. Знайти логарифм числа 0,0057842. Характеристика його дорівнює $\bar{3}$. Округлюємо дане число до чотирьох значущих цифр: замість 57842 беремо 5784. Логарифм округленого чотиризначного числа знаходимо так, як було пояснено вище. Дістаємо

$$\lg 0{,}0057842 = \bar{3}{,}7622.$$

4. Інтерполювання. Поправку на четверту цифру можна знайти, не користуючись колонками поправок; у деяких таблицях їх взагалі немає. В цьому випадку поправки знаходять шляхом нескладних обчислень, що грунтуються на такому положенні: якщо числа перевищують 100, а різниці між ними менші від 1, то приймають, що різниці між логарифмами пропорціональні різницям між відповідними числами. Тому поступають так.

Якщо число, логарифм якого треба знайти, дорівнює, наприклад, 6723, то спочатку знаходимо мантису числа 672 (вона дорівнює 0,8274), а потім мантису числа 673 (вона дорівнює 0,8280); після цього відшукуємо різницю мантис (вона дорівнює 6 десятитисячним). Тоді, на підставі зазначеного положення, дістаємо поправку за допомогою пропорції:

$x : 3 = 6 : 10,\ x = \frac{3 \cdot 6}{10} \approx 2$ (десятитисячним). Отже, $\lg 6723 = 3{,}8276$.

Цей спосіб відшукання проміжного значення логарифма за двома його значеннями, що стоять у таблиці поряд, називається *інтерполюванням*.

5. Відшукування числа за логарифмом. Для відшукування числа за даним логарифмом можна використовувати ті самі таблиці, що й для відшукування логарифмів даних чисел.

Приклад 1. Знайти число, логарифм якого дорівнює 3,4683. Звертаємося до таблиць 8 (див. стор. 34), і в одній з колонок під номерами 0—9 шукаємо число, перші дві цифри якого становлять 46, а дві останні 83, знаходимо це число в рядку 29, у колонці 4. Отже, число, логарифм якого має мантису 4683, буде 294. Через те що характеристика 3 додатна, то в цілій частині знайденого числа відокремлюємо $3 + 1 = 4$ цифри. Для цього в кінці числа 294 приписуємо нуль. Маємо: $3,4683 = \lg 2940$.

Приклад 2. Знайти число, логарифм якого дорівнює $\bar{3},3916$. Через те що в таблиці серед мантис немає числа 3916, то знаходимо найближче до нього число 3909, яке стоїть на перетині рядка 24 і колонки 6. Цій мантисі відповідає число 246; воно дає перші три значущі цифри шуканого числа. Четверту цифру знаходимо, обчислюючи поправку. Дана мантиса 3916 перевищує табличну 3909 на 7. Шукаємо цю цифру в тому ж рядку 24 серед «поправок». Вона стоїть у колонці 4. Цифра 4 буде четвертою значущою цифрою шуканого числа; отже, числом, що має мантису 3916, буде 2464. Через те що характеристика містить три від'ємні одиниці, то перед знайденим числом ставимо три нулі і крайній лівий нуль відокремлюємо комою. Маємо: $\lg 0,002464 = \bar{3},3916$.

Отже, шуканим числом буде 0,002464.

Примітка. Слід добре пам'ятати, що при відшукуванні числа за логарифмом поправку цього числа приписують до нього, а не додають до його останньої цифри.

Величину поправки треба відшукувати в тому ж рядку, де стоїть число, близьке до мантиси. Якщо в цьому рядку немає потрібної поправки мантиси, беремо найближчу поправку.

Проте відшукувати числа за відомими десятковими логарифмами зручніше у таблиці *антилогарифмів* (стор. 33).

Приклад 3. Знайти число, логарифм якого дорівнює 2,732. Відкидаємо характеристику і беремо перші дві цифри мантиси (73). В рядку 73 відшукуємо число, яке стоїть у колонці 2. Знаходимо 5395. Через те що характеристика логарифма дорівнює 2, то шуканим буде число 539,5.

Приклад 4. Знайти число, логарифм якого дорівнює 1,3846. Відкидаємо характеристику і беремо перші дві цифри мантиси (38). По рядку 38 пересуваємося до перетину із колонкою, позначеною цифрою 4 (третя цифра мантиси), знаходимо число 2421 і, пересуваючись далі по цьому ж рядку до перетину з колонкою поправок, позначеною цифрою 6 (четверта цифра мантиси), знаходимо число 3. Два знайдених числа додаємо: $2421 + 3 = 2424$. Через те що характеристика логарифма дорівнює 1, то шуканим числом є 24,24.

$$\text{Запис:}\quad \begin{array}{rr} 384 — & 2421 \\ 6 — & 3 \\ \hline 3846 & 2424. \end{array}$$

6. Дії над логарифмами з від'ємними характеристиками.

1) Додавання. При додаванні логарифмів з від'ємними характеристиками спочатку додають їхні мантиси, а потім характеристики.

Приклади. а) $+\begin{array}{r} \bar{3},1628 \\ \bar{1},2291 \\ \hline \bar{4},3919 \end{array}$ б) $+\begin{array}{r} \bar{1},8456 \\ \bar{2},5164 \\ \hline \bar{2},3620 \end{array}$

2) Віднімання. При відніманні логарифмів з від'ємними характеристиками віднімають спочатку мантису, а потім характеристику.

Приклади.

а) $-\begin{array}{r} 2,1582 \\ \bar{1},3791 \\ \hline 2,7791 \end{array}$ б) $-\begin{array}{r} 0,3724 \\ 3,5492 \\ \hline \bar{4},8232 \end{array}$ в) $-\begin{array}{r} \bar{3},3284 \\ 2,3437 \\ \hline \bar{6},9847 \end{array}$

3) Множення. Щоб помножити логарифм з від'ємною характеристикою на додатне число, треба окремо помножити на це число характеристику й окремо додатну мантису.

Приклади.

а) $\times\begin{array}{r} \bar{1},7428 \\ 2 \\ \hline \bar{1},4856 \end{array}$ б) $\times\begin{array}{r} \bar{3},6735 \\ 4 \\ \hline \overline{10},6940 \end{array}$

4) Ділення. При діленні розглядають два випадки.

Якщо характеристика кратна дільникові, то треба окремо ділити характеристику й окремо мантису.

Приклади.

а) $\bar{4},0568 : 2 = \bar{2},0284$;

б) $\bar{2},1314 : 2 = \bar{1},0657$.

Якщо характеристика не кратна дільникові, то до характеристики додають стільки одиниць, щоб утворене від'ємне число ділилося на дільник, а до додатної мантиси додають стільки ж додатних одиниць; після цього ділять від'ємну характеристику і додатну мантису окремо.

Приклад. $\bar{3},6428 : 2 = (-3 \overset{-1}{+} 0,6428) : 2 = (-4 + 1,6428) : 2 = -2 + 0,8214 = \bar{2},8214$.

7. Логарифмічні обчислення.

П р и к л а д 1. Обчислити

$$x = \frac{0,045 \cdot 7,513}{2,071 \cdot 0,864}.$$

Розв'язання.

$$\lg x = \lg 0,045 + \lg 7,513 - \lg 2,071 - \lg 0,864.$$

$$\lg 0,045 = \bar{2},6532$$

$$\lg 7,513 = 0,8758$$

$$-\lg 2,071 = \overset{-1+1}{-0,3162} = \bar{1},6838$$

$$-\lg 0,864 = \overset{-1+1}{-\bar{1},9365} = 0,0635$$

$$\lg x = \bar{1},2753$$

$$x = 0,1885.$$

П р и к л а д 2. Обчислити $x = \dfrac{8,367 \cdot \sqrt{0,6725}}{0,9658^2 \cdot \sqrt[3]{0,3575}}$.

Розв'язання.

$$\lg x = \lg 8,367 + \frac{1}{2}\lg 0,6725 - 2\lg 0,9658 - \frac{1}{3}\lg 0,3575$$

$$\lg 8,367 = 0,9226 = 0,9226$$

$$\frac{1}{2}\lg 0,6725 = \frac{1}{2} \cdot \overset{-1+1}{\bar{1},8277} = \bar{1},9139 = \bar{1},9139$$

$$-2\lg 0,9658 = -2 \cdot \bar{1},9849 = \overset{-1+1}{-\bar{1},9698} = 0,0302$$

$$-\frac{1}{3}\lg 0,3575 = -\frac{1}{3} \cdot \overset{-2+2}{\bar{1},5533} = -\bar{1},8511 = 0,1489$$

$$\lg x = 1,0156$$

$$x = 10,36.$$

П р и к л а д 3. Обчислити за допомогою логарифмічних таблиць

$$x = 3,525\sqrt{15,07^2 - \sqrt{\frac{258,4}{0,07288}}}.$$

Розв'язання. Безпосереднім логарифмуванням не можна обчислити x, бо під радикалом є різниця двох чисел

$$15,07^2 - \sqrt{\frac{258,4}{0,07288}}.$$

Тому спочатку визначимо цю різницю, для чого обчислимо окремо зменшуване і від'ємник.

Нехай $15,07^2 = y$;

$$\sqrt{\frac{258,4}{0,07288}} = z.$$

а) $\lg y = 2\lg 15,07 = 2 \cdot 1,1781 = 2,3562$; $y = 227,1$.

б) $\lg z = \frac{1}{2}(\lg 258,4 - \lg 0,07288) = \frac{1}{2}(2,4123 - \bar{2},8626) = \frac{1}{2} \times 3,5497 = 1,7749$; $z = 59,55$.

в) $y - z = 227,1 - 59,55 = 167,55$.

г) $x = 3,525\sqrt{167,55}$.

$$\lg x = \lg 3,525 + \frac{1}{2}\lg 167,55 = 0,5471 + \frac{1}{2} \cdot 2,2243 = 1,6593.$$

Відповідь. $x = 45,63$.

§ 37. Показникові і логарифмічні рівняння

1. Показникові рівняння. *Показниковими* називають такі рівняння, в яких невідоме входить у показник степеня.

Загального методу розв'язання показникових рівнянь немає. Проте можна виділити кілька груп таких рівнянь, які можуть бути розв'язані методами елементарної математики.

Розв'язування показникових рівнянь грунтується на таких теоремах.

1) Якщо основи двох степенів рівні і рівні степені, причому основи $a > 0$ і $a \neq 1$, то показники степенів також рівні, тобто якщо $a^m = a^n$, то $m = n$.

2) Якщо у рівних степенів рівні і відмінні від нуля показники, то рівні її основи степенів, тобто якщо $a^m = b^m$, $m \neq 0$, то $a = b$ (маються на увазі додатні a і b).

Розглянемо основні типи показникових рівнянь.

а) Н а й п р о с т і ш і п о к а з н и к о в і р і в н я н н я. *Найпростішим показниковим рівнянням* називають рівняння виду $a^x = b$, де a — відмінне від 1 додатне число. При $b \leqslant 0$ таке рівняння розв'язків не має, бо при дійсних значеннях x степень a^x не може бути від'ємним числом чи нулем. При $b > 0$ це рівняння має єдиний розв'язок.

Приклад. Розв'язати рівняння $25^x = \frac{1}{5}$.

Розв'язання. Перший спосіб:

$$(5^2)^x = 5^{-1}, \quad 5^{2x} = 5^{-1}, \quad 2x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Другий спосіб:

$$x \lg 25 = -\lg 5; \quad 2x \lg 5 = -\lg 5, \quad 2x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

б) Показникові рівняння виду

$$a^{\varphi(x)} = b,$$

де a — відмінне від 1 додатне число, а $\varphi(x)$ — елементарна алгебраїчна функція.

Введенням нового невідомого $u = \varphi(x)$ це рівняння зводиться до найпростішого показникового рівняння $a^u = b$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}.$$

Розв'язання. Перший спосіб:

$$2^{x^2-6x-2,5} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}; \quad 2^{x^2-6x-2,5} = 2^{\frac{9}{2}},$$

звідки

$$x^2 - 6x - 2,5 = 4,5; \text{ або } x^2 - 6x - 7 = 0.$$

Тоді

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -1.$$

Другий спосіб:

$$(x^2 - 6x - 2,5) \lg 2 = \lg 16\sqrt{2}; \quad (x^2 - 6x - 2,5) \lg 2 = 4,5 \lg 2.$$

Звідси

$$x^2 - 6x - 2,5 = 4,5; \text{ або } x^2 - 6x - 7 = 0$$

і т. д.

в) Показникові рівняння виду

$$a^{f(x)} = b^{\varphi(x)},$$

де a і b — відмінні від 1 додатні числа, а $f(x)$ і $\varphi(x)$ — елементарні алгебраїчні функції.

Це рівняння зводиться до рівносильного рівняння

$$f(x) \log_c a = \varphi(x) \log_c b.$$

Якщо a і b — степені якого-небудь числа c, тобто $a = c^p$, $b = c^q$, то рівняння можна записати так:

$$c^{pf(x)} = c^{q\varphi(x)}$$

і його розв'язування зводиться до розв'язування рівносильного йому рівняння

$$pf(x) = q\varphi(x).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння так:

$$2^{2 \cdot \frac{x-1}{2}} = 2^{3(x^2-1)}.$$

Звідси

$$\frac{2(x-1)}{2} = 3(x^2-1), \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння так:

$$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}.$$

Звідси

$$2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1), \quad 2^{2x-1} \cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 4,$$

$$\frac{2^{2x-1}}{4} = \frac{3^{x-\frac{1}{2}}}{3}, \quad 2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}}.$$

Прологарифмувавши, дістанемо

$$(2x-3) \lg 2 = \frac{2x-3}{2} \lg 3.$$

Тоді

$$(2x-3)\left(\lg 2 - \frac{1}{2} \lg 3\right) = 0,$$

значить,

$$2x - 3 = 0, \quad x = \frac{3}{2}.$$

г) Показникові рівняння виду

$$F[\varphi(x)] = 0,$$

де $\varphi(x)$ — деяка показникова функція, а F — елементарна алгебраїчна функція. Приймаючи $\varphi(x) = u$, дістаємо рівняння $F(u) = 0$. Якщо t_1, t_2, ..., t_s — дійсні розв'язки останнього, то розв'язування рівняння $F[\varphi(x)] = 0$ зводиться до розв'язування рівнянь

$$\varphi(x) = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$3^{x+3} - \frac{2}{3^{x+2}} - 1 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $3^{x+3} = 3^3 \cdot 3^x$ і $3^{x+2} = 3^2 \cdot 3^x$, то дане рівняння запишемо так:

$$3^3 \cdot 3^x - \frac{2}{3^x \cdot 3^2} - 1 = 0.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $3^2 \cdot 3^x$, дістанемо

$$3^5 \cdot 3^{2x} - 3^2 \cdot 3^x - 2 = 0.$$

Приймаючи $3^x = t$, одержуємо квадратне рівняння* $3^5 t^2 - 3^2 t - 2 = 0$. Звідси $t_1 = -\frac{2}{27}$, $t_2 = \frac{1}{9}$.

Рівняння $3^x = -\frac{2}{27}$ розв'язків не має; рівняння $3^x = \frac{1}{9}$ має розв'язок $x = -2$. Отже, дане рівняння має один корінь $x = -2$.

2. Логарифмічні рівняння. *Логарифмічними* називають такі рівняння, в яких невідоме входить під знак логарифма.

При розв'язуванні логарифмічних і показникових рівнянь часто доводиться логарифмувати і потенціювати обидві частини рівняння. Це може привести до одержання рівнянь, рівносильних даним.

Так, якщо A і B є вирази, що містять невідомі, то будуть нерівносильними такі пари рівнянь:

а) $A = B$ і $\lg A = \lg B$;

б) $\lg(AB) = \lg C$ і $\lg A + \lg B = \lg C$;

в) $\lg \frac{A}{B} = \lg C$ і $\lg A - \lg B = \lg C$;

г) $\lg A^n = C$ і $n \lg A = C$.

Для логарифмічних рівнянь, так само як і для показникових, загального методу розв'язання немає. Проте можна виділити кілька груп таких рівнянь, що розв'язуються елементарними методами. Розв'язуючи рівняння, необхідно встановити область допустимих значень для невідомого.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду

$$\log_a x = b,$$

де a — відмінне від 1 додатне число. При будь-якому дійсному b рівняння має єдиний розв'язок: $x = a^b$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\lg x = 2 - \lg 5$.

Розв'язання.

$$x > 0,$$

$$\lg x = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20; \quad x = 20.$$

1) Логарифмічне рівняння виду

$$\log_a f(x) = b,$$

де a — відмінне від 1 додатне число, а $f(x)$ — елементарна алгебраїчна функція.

Введенням нового невідомого $t = f(x)$ рівняння цього виду зводиться до найпростішого логарифмічного рівняння $\log_a t = b$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_3(x^2 - 7x + 21) = 2.$$

Розв'язання. Область допустимих значень для x — уся числова вісь, тому що $x^2 - 7x + 21 > 0$ при будь-якому x (дискримінант $D < 0$). За означенням логарифма

$$x^2 - 7x + 21 = 3^2, \; x_1 = 3, \; x_2 = 4.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\log_{x-1}(x^2 - 5x + 2{,}25) = 2.$$

---

* Це краще було б замінити $3^{x+2} = y$.

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого визначається з умов:

$$x-1>0, \quad x-1\neq 1;$$
$$x^2-5x+2{,}25>0,$$

отже, $x>4{,}5$.

Розв'язування даного рівняння зводиться до розв'язування рівняння

$$x^2-5x+2{,}25=(x-1)^2,$$

або

$$-3x=-1{,}25, \quad x=\frac{5}{12}.$$

$x=\frac{5}{12}$ не належить до області допустимих значень.

Рівняння не має дійсних коренів.

2) Логарифмічне рівняння виду

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x),$$

де a — відмінне від 1 додатне число, $f(x)$ і $\varphi(x)$ — елементарні алгебраїчні функції. Дане рівняння зводиться до розв'язування рівняння $f(x)=\varphi(x)$. Для розв'язання рівняння $\log_a f(x)=\log_a \varphi(x)$ досить знайти всі розв'язки рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і серед них вибрати ті, що належать до області допустимих значень невідомого даного рівняння. Якщо ж рівняння $f(x)=\varphi(x)$ розв'язків не має, то їх не має і рівняння

$$\log_a f(x)=\log_a \varphi(x).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $5\lg x=3\lg\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Область допустимих значень $x>0$.

$$\lg x^5=\lg\left(\frac{x}{2}\right)^3,$$

тоді

$$x^5=\left(\frac{x}{2}\right)^3.$$

Розв'язавши рівняння $x^5=\left(\frac{x}{2}\right)^3$, дістанемо

$$x_1=x_2=x_3=0, \quad x_4=-\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad x_5=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

До області допустимих значень належить лише x_5. Отже, дане рівняння має один розв'язок $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\lg(2x)=2\lg(4x-15).$$

Розв'язання. Для $\lg(2x)$ область допустимих значень невідомого $x>0$; для $\lg(4x-15)$ маємо $4x-15>0$, або $x>\frac{15}{4}$. Отже, область допустимих значень невідомого буде $x>3\frac{3}{4}$. Перетворимо дане рівняння:

$$\lg(2x)=\lg(4x-15)^2, \quad 2x=(4x-15)^2, \quad 16x^2-122x+225=0.$$

Значить, $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=3\frac{1}{8}$. Оскільки x_2 не належить до області допустимих значень, а x_1 задовольняє рівняння, то рівняння має єдиний корінь:

$$x=\frac{9}{2}.$$

3) Логарифмічне рівняння виду

$$\log_a f_1(x)+\log_a f_2(x)+\cdots+\log_a f_s(x)=$$
$$=\log_a \varphi_1(x)+\log_a \varphi_2(x)+\cdots+\log_a \varphi_m(x),$$

де a — відмінне від 1 додатне число, а $f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ — алгебраїчні функції, причому деякі з них можуть бути сталими числами.

Рівняння такого виду зводяться до рівнянь виду

$$f_1(x)f_2(x)\ldots f_s(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3.$$

Розв'язання. Визначимо спочатку область допустимих значень для x:

$$3x-11>0, \quad x>3\frac{2}{3};$$
$$x-27>0, \quad x>27.$$

Загальна область допустимих значень буде $x > 27$.

Замінивши $3 = \lg 1000$, дане рівняння перепишемо так:

$$\lg[(3x - 11)(x - 27)] = \lg 1000,$$

звідси

$$(3x - 11)(x - 27) = 1000,$$

або

$$3x^2 - 92x - 703 = 0, \quad x_1 = 37, \quad x_2 = -\frac{19}{3}.$$

Оскільки $x_2 = -\frac{19}{3}$ не належить до області допустимих значень, то рівняння має єдиний корінь $x = 37$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\lg(2x) + \lg(x + 3) = \lg 2 + \lg(6x - 2).$$

Розв'язання. Область допустимих значень невідомого для:

$$\lg(2x), \quad x > 0;$$
$$\lg(x + 3), \quad x > -3;$$
$$\lg(6x - 2), \quad x > \frac{1}{3}.$$

Загальна область допустимих значень буде $x > \frac{1}{3}$.

Рівняння набуває вигляду

$$x(x + 3) = 6x - 2,$$

або

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

звідки

$$x_1 = 2, \; x_2 = 1.$$

Обидва значення належать до області допустимих значень і обидва вони є розв'язками даного рівняння.

4) Логарифмічні рівняння виду

$$F[g(x)] = 0,$$

де $g(x)$ — логарифмічна функція, а F — елементарна алгебраїчна. Для розв'язування такого рівняння вводять змінну $t = g(x)$. Тоді дане рівняння зводиться до рівняння $F(t) = 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(\lg x - 5)\lg x^3 + 18 = 0.$$

Розв'язання. Область допустимих значень $x > 0$. Оскільки $\lg x^3 = 3\lg x$, то дане рівняння рівносильне рівнянню $(\lg x - 5)3\lg x + 18 = 0$.

Приймаючи $\lg x = t$, дістанемо:

$$3t(t - 5) + 18 = 0, \quad t^2 - 5t + 6 = 0, \quad t_1 = 2, \; t_2 = 3.$$

Розв'язавши рівняння $\lg x = 2$ і $\lg x = 3$, одержимо розв'язки даного рівняння $x_1 = 100$ та $x_2 = 1000$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0.$$

Розв'язання. Область допустимих значень $x > 0$. Приймемо $\log_2 x = z$, тоді

$$z^2 - z - 2 = 0, \; z_1 = +2, \; z_2 = -1,$$

отже,

$$\log_2 x = 2, \quad x_1 = 4; \quad \log_2 x = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_5 \log_4 \log_3 x = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння так:

$$\log_5(\log_4 \log_3 x) = 0.$$

Тоді число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 5^0, тобто 1:

$$\log_4 \log_3 x = 1.$$

Запишемо це рівняння так: $\log_4(\log_3 x) = 1$. Звідси дістаємо $\log_3 x = 4$, або $x = 3^4 = 81$.

3. **Показниково-логарифмічні рівняння.** Так називають рівняння, в яких невідоме входить і під знак логарифма, і у показник степеня.

Звичайно показниково-логарифмічне рівняння розв'язують логарифмуванням обох його частин, після чого дістають логарифмічне рівняння. Іноді дане рівняння перетворюють так, щоб одержати рівність степенів з однаковими основами.

Розглянемо кілька прикладів таких рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^{3 - \lg \frac{x}{3}} = 900$.

Розв'язання. Логарифмуючи обидві частини рівняння, дістаємо

$$(3 - \lg x + \lg 3)\lg x = 2\lg 3 + 2,$$
$$\lg^2 x - (3 + \lg 3)\lg x + 2\lg 3 + 2 = 0,$$
$$\lg x = \frac{3 + \lg 3 \pm \sqrt{(1 - \lg 3)^2}}{2};$$
$$\lg x_1 = 2,\ x_1 = 100;\ \lg x_2 = \lg 30,\ x_2 = 30.$$

П р и к л а д 2. Розв'язати рівняння

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} + 3^{\lg x - 1}.$$

Розв'язання.

$$5^{\lg x}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3^{\lg x}\left(3 + \frac{1}{3}\right);$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg x} = \frac{25}{9};\quad \lg x = 2;\quad x = 100.$$

4. Системи показникових і логарифмічних рівнянь.

П р и к л а д 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 3\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Потенціюючи перше рівняння, дістаємо систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \frac{10}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, одержимо

$$x_1 = 3,\quad y_1 = \frac{1}{3};\quad x_2 = \frac{1}{3},\quad y_2 = 3.$$

П р и к л а д 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Вважаємо, що основи логарифмів a та b і невідомі величини x та y додатні. Потенціюванням дістаємо

$$xy = a^2,\quad \frac{x}{y} = b^4.$$

Ця система має два розв'язки:

$$x_1 = ab^2,\quad y_1 = \frac{a}{b^2};\quad x_2 = -ab^2,\quad y_2 = -\frac{a}{b^2}.$$

Але другий розв'язок непридатний, бо при додатних значеннях a та b значення x та y від'ємні. Отже, дана система має єдиний розв'язок:

$$x = ab^2,\quad y = \frac{a}{b^2}.$$

П р и к л а д 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 512, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Через те що $2^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2^9$, то $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$. З другого боку, $\lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 2$, $\lg \sqrt{xy} = \lg 20$, тобто $\sqrt{xy} = 20$. Таким чином, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 20, \end{cases}$$

розв'язавши яку, одержимо:

$$x_1 = 16,\ y_1 = 25;\ x_2 = 25,\ y_2 = 16.$$

П р и к л а д 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Через те що $729 = 9^3$ і $3^0 = 1$, дістанемо

$$9^{x+y} = 9^3 \text{ і } 3^{x-y-1} = 3^0,$$

звідки:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь має розв'язок: $x = 2$, $y = 1$, який є також розв'язком даної системи.

П р и к л а д 5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 14^x - 63y = 0, \\ 17^x - 87y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\frac{14^x}{63}=y,\quad \frac{17^x}{87}=y.$$

Тоді

$$\frac{14^x}{63}=\frac{17^x}{87},\quad \left(\frac{14}{17}\right)^x=\frac{63}{87},$$

$$x\lg\frac{14}{17}=\lg\frac{63}{87},\quad x=\frac{\lg\frac{63}{87}}{\lg\frac{14}{17}}\approx 1{,}66.$$

З рівняння $14^x=63y$ знаходимо y:

$$y\approx\frac{1}{63}\cdot 14^{1,66}\approx 1{,}28.$$

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=12, \\ 3^{\lg(2y-x)}=1. \end{cases}$$

Розв'язання. Приймаємо, що $2^{\frac{x-y}{4}}=z$. Тоді перше рівняння буде $z^2-z-12=0$, звідки $z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}$, $z_1=4$, $z_2=-3$. Друге значення відкидаємо й одержуємо $2^{\frac{x-y}{4}}=4$. З другого боку, через те що $3^{\lg(2y-x)}=1$, то $\lg(2y-x)=0$, $2y-x=1$. Таким чином, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{4}}=4, \\ 2y-x=1. \end{cases}$$

Ця система має розв'язок: $x=17$, $y=9$, який є також розв'язком даної системи.

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_x\log_2\log_x y=0, \\ \log_y 9=1. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння знаходимо $y=9$. Тоді

$$\log_x(\log_2\log_x 9)=0 \quad \text{і} \quad \log_2\log_x 9=1.$$

Звідси $\log_x 9=2$, $x^2=9$, $x=\pm 3$. Відкидаючи $x=-3$, одержуємо $x=3$.

Відповідь. $x=3$, $y=9$.

§ 38. Логарифмічна лінійка

1. Призначення й опис логарифмічної лінійки. Логарифмічна лінійка є одним з найпростіших лічильних приладів. За допомогою логарифмічної лінійки можна виконувати множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня і деякі складніші математичні операції. Лінійка дає наближені результати: з її допомогою можна знаходити лише перші три-чотири значущі цифри, яких цілком досить для розрахунків, що найчастіше трапляються в практиці (особливо при обчисленнях з наближеними даними).

Логарифмічна лінійка (рис. 63, див. між стор. 352—353) складається з: 1) *корпусу* з поздовжнім пазом; 2) *повзуна*, який можна пересувати по повздовжньому пазі корпуса лінійки; 3) *бігунка*, що являє собою металеву рамку зі склом, на якому нанесено *візирну лінію*, або *індекс*.

На лицьовому боці корпусу є 7 шкал: 1) шкала (зверху), позначена буквою K, дає куби чисел шкали D; 2) A й B дають квадрати чисел шкал D і C; 3) шкала обернених чисел; 4) шкали, позначені буквами C і D, — основні; 5) рівномірна шкала (на нижньому краї корпусу), позначена буквою L і поділена на пвміліметри, дає мантиси логарифмів чисел шкали D.

На зворотному боці повзуна є три шкали для обчислення тригонометричних величин. На зворотному боці корпусу лінійки вміщено деякі довідкові відомості, а на бічних гранях — сантиметрові й міліметрові поділки.

2. Логарифмічна шкала. Розглянемо основну шкалу логарифмічної лінійки.

Випишемо з таблиці десяткових логарифмів значення логарифмів перших десяти натуральних чисел, узявши їх з точністю до 0,01.

Тоді одержуємо таку таблицю:

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Логарифм	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Відкладемо на відрізку (рис. 64) довжини, відповідні логарифмам, і кінці одержаних відрізків позначимо числами 1, 2, 3 і т. д. Початок даного відрізка lg 1 позначимо міткою 1, lg 2 — міткою 2, і т. д., нарешті lg 10 — міткою 10.

Користуючись таблицею логарифмів, на цій самій шкалі можна нанести дрібніші поділки, а саме: 1,1; 1,2; 1,3, ... Ця шкала в спрощеному вигляді являє собою одну з основних шкал логарифмічної лінійки.

Логарифмічну шкалу для значень від 10 до 100 (рис. 65) дістанемо, якщо продовжимо шкалу за межі першої ділянки (від 1 до 10) і повто-

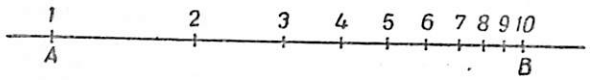


Рис. 64.

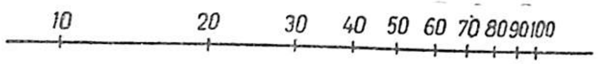


Рис. 65.

римо поділки, нанесені на першому відрізку, збільшивши всі числа міток у 10 разів. Так само можна продовжити шкалу до 1000 і далі, причому не тільки праворуч, але й ліворуч, тому що логарифмічна шкала періодична. Таким чином, маючи логарифмічну шкалу довжиною в одну масштабну одиницю, можна одержати нескінченну логарифмічну шкалу простим її повторенням.

Позначивши *масштаб*, або *модуль шкали*, буквою m, знайдемо, що відстань від початку логарифмічної шкали до мітки a в міліметрах дорівнює $m \lg a$. Узявши модуль шкали 250 *мм* (лінійки такої довжини дуже поширені, їх називають *нормальними*), дістанемо логарифмічну шкалу для чисел від 1 до 10 шкали A. Продовживши її для чисел 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, одержимо логарифмічну шкалу A нашої лінійки. Пара тотожних логарифмічних шкал становить прилад, який дає змогу легко виконувати множення і ділення. Звичайна лічильна лінійка відрізняється від нього наявністю інших шкал, які дають змогу виконувати не лише множення та ділення, а й багато інших операцій. Властивість періодичності мають також інші шкали лічильної лінійки. На шкалі K маємо три (зліва направо) підшкали: мітки першої ідуть від 1 до 10, другої від 10 до 100 і третьої від 100 до 1000

3. Ціна поділок, читання і встановлення міток. Щоб користуватися логарифмічною лінійкою для обчислень, треба насамперед знати ціну поділок різних її шкал, тобто різниці чисел, що їх виражають мітки суміжних штрихів шкал.

На шкалах C і D найменша поділка на ділянці від 1 до 2 означає 0,01, від 2 до 4 — 0,02, від 4 до 10 — вже 0,05.

На шкалах A і B ціна поділки на ділянці від 1 до 2 дорівнює 0,02, від 2 до 5 — 0,05, від 5 до 10 — 0,1, від 10 до 20 — 0,2, від 20 до 50 — 0,5, від 50 до 100 — 1.

Шкала K на ділянці від 1 до 2 має поділки ціною 0,02, від 2 до 5 — 0,05, від 5 до 10 — 0,1, від 10 до 20 — 0,2, від 20 до 50 — 0,5, від 50 до 100 — 1, від 100 до 200 — 2, від 200 до 500 — 5, від 500 до 1000 — 10.

Шкала L — рівномірна, ціна її поділки 0,002, мітки, позначені цифрами, читаються як десяті.

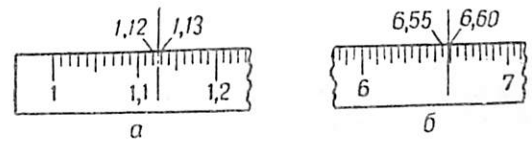


Рис. 66.

Кожна цифра на шкалі позначає не одне число, а всі числа, які можна одержати множенням цього числа на який-небудь степінь 10. Так, мітка, що позначає число 1234, одночасно позначає і числа: 123,4; 12,34; 0,1234. Тому числа на шкалі встановлюють, не звертаючи уваги на кому та нулі в кінці числа. Читають число, називаючи по черзі його цифри: 1—2—3—4.

Щоб точно прочитати число, треба знати його місце на шкалі та його *порядок*. Для чисел, більших від 1, порядок числа дорівнює числу його цифр до коми. Так, порядок числа 32,5 буде 2, порядок числа 4,12 дорівнює 1. Для чисел, менших від 1, порядок числа є кількість нулів після коми до першої значущої цифри; це число беруть зі знаком мінус.

Так, порядок числа 0,038 дорівнює (—1), порядок числа 0,358 дорівнює 0, порядок числа 0,000017 дорівнює (—4).

Для набуття навички читання чисел на лінійці корисно виконати такі вправи.

Знайти на шкалі мітки, що відповідають числам: 3—4—1, 2—0—2 і т. д.

Після того як вже набуто навичку правильного й швидкого читання міток, позначених на шкалах лінійки цифрами або штрихами без цифр, необхідно навчитися читати і встановлювати мітки, нічим на шкалах не позначені, тобто виконувати «інтерполяцію на око».

Так, наприклад, нехай треба прочитати мітку, встановлену індексом (рис. 66, *а*). Індекс тут знаходиться між мітками 1,12 та 1,13 на шкалі C; ціна поділки 0,01. Між міткою 1,12 та індексом проміжок трохи більший, ніж між індексом та міткою 1,13. Оцінюючи їх як 0,6 і 0,4 всієї поділки, бачимо, що до найближчої лівої мітки треба додати ще $0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}006$. Таким чином, мітка індексу тут $1{,}12 + 0{,}006 = 1{,}126$.

На рис. 66, *б* індекс знаходиться між мітками 6,55 та 6,60. Беручи проміжок між міткою 6,55 та індексом таким, що дорівнює 0,8 всієї поділки, ціна якої 0,05, дістаємо мітку індексу, рівну $6{,}55 + 0{,}8 \times 0{,}05 = 6{,}55 + 0{,}04 = 6{,}59$.

§ 39. Обчислення на логарифмічній лінійці

1. Множення. При множенні на логарифмічній лінійці іноді повзун пересувають ліворуч, а іноді — праворуч.

П р и к л а д 1. Нехай треба помножити 3 на 2. Встановлюємо індекс на цифру 3 шкали D, під індекс бігунком підводимо одиницю — початок шкали C; потім переводимо індекс на цифру 2 шкали C і під ним на шкалі D читаємо одержаний добуток: 6.

П р и к л а д 2. Нехай треба помножити 9 на 5. Встановлюємо індекс на цифру 9 шкали D. Під індекс підвести початок шкали C не можна, бо цифра 5 шкали C виходить за межі шкали D, тому під індекс підводимо кінець шкали C; потім переводимо індекс на цифру 5 шкали C і під ним на шкалі D читаємо результат: 45.

Щоб визначити місце коми в результаті, вдаються до різних способів.

Перший спосіб. Спосіб *прикидки* за допомогою грубого округлення.

П р и к л а д. При множенні $0{,}0267 \cdot 32$ на лінійці читаємо: 8 — 7 — 3. Грубий підрахунок дає: $0{,}03 \cdot 30 = 0{,}9$. Тому відповідь буде 0,873.

Другий спосіб. Користуємось таким правилом: порядок добутку дорівнює сумі порядків співмножників, якщо бігунок посунуто ліворуч, і на одиницю менший від суми порядків співмножників, якщо бігунок посунуто праворуч.

Для кращого запам'ятовування цього правила використовують запис на лінійці $P - 1$ (якщо бігунок посунуто праворуч, то $P = P_1 + P_2 - 1$, де P — порядок добутку, P_1 та P_2, відповідно, порядки співмножників).

П р и к л а д 1. Помножити $4{,}3 \cdot 3{,}4$. На лінійці читаємо 1 — 4 — 6 — 2. Порядок першого співмножника 1, порядок другого 1; бігунок посунуто ліворуч. Порядок добутку дорівнює $1 + 1 = 2$.

Відповідь. 14,62.

П р и к л а д 2. Помножити $0{,}026 \cdot 32$. На шкалі читаємо 8—3—2; порядок першого співмножника дорівнює -1, порядок другого співмножника 2. Бігунок посунуто праворуч. Порядок добутку дорівнює: $-1 + 2 - 1 = 0$.

Відповідь. 0,832.

Якщо треба перемножити три, чотири, п'ять і т. д. чисел, спочатку знаходять добуток перших двох, потім, не читаючи цей добуток, множать його на третє дане число, далі, не читаючи результат, множать його на четверте дане число і т. д. Ці операції тривають доти, доки не будуть вичерпані всі співмножники. Місце коми в результаті з'ясовується прикидкою.

П р и к л а д 3. Помножити $23{,}4 \cdot 0{,}765 \cdot 388$. На шкалі читаємо: 6—9—5; робимо прикидку $20 \cdot 0{,}8 \cdot 400 = 6400$, і тоді остаточний добуток буде 6950.

2. Ділення. Ця дія виконується так.

Проти діленого, взятого на шкалі D, встановлюють дільник, який беруть на шкалі C; проти лівого (або правого) кінця шкали C читають на шкалі D результат.

При діленні можна одержати результат як під правим, так і під лівим кінцем шкали повзуна.

Кому в результаті визначають прикидкою або за формулою $Q = Q_1 - Q_2$, якщо бігунок посунуто ліворуч, чи за формулою $Q = Q_1 - Q_2 + 1$, якщо бігунок посунуто праворуч. Тут Q_1 — порядок діленого, Q_2 — порядок дільника; Q — порядок результату.

Для кращого запам'ятання формул на лінійці зліва є запис $Q + 1$.

П р и к л а д. Обчислити $\dfrac{0{,}00274}{0{,}873}$. На лінійці читаємо: 3 — 1 — 4.

Порядок діленого дорівнює -2, порядок дільника дорівнює 0. Бігунок посунуто ліворуч. Тому порядок результату дорівнює $-2 - 0 = -2$. Отже, результат дорівнює 0,00314.

П р и м і т к а. Множення й ділення можна виконувати як на нижніх шкалах C і D, так і на верхніх шкалах A і B.

3. Сумісне множення й ділення. Якщо доводиться обчислювати значення виразу виду $x = ab : c$, то зручніше спочатку ділити a на c і результат помножити на b, тобто

$$(a : c) \cdot b.$$

П р и к л а д. Якщо $x = 84 \cdot 5{,}3 : 6{,}45$, то, встановивши проти мітки 8—4—0 шкали A мітку 6—4—5 шкали B, наводимо індекс на мітку 5—3—0 шкали B і читаємо мітку 6—9—0 шкали A. Прикидка $80 \times 5 : 6 = 70$ показує, що треба взяти $x = 69{,}0$.

Подібно до цього обчислюють вирази складнішого виду:

$$x = \frac{abcd}{efg}.$$

4. Піднесення до квадрата і добування кореня. Перехід від основної шкали до шкали квадратів здійснюють при піднесенні числа до квадрата. Зворотний перехід рівнозначний добуванню квадратного кореня.

Щоб піднести до квадрата число, треба знайти його мітку на шкалі D і прочитати протилежну їй мітку на шкалі A.

Щоб добути квадратний корінь з числа, треба знайти його мітку на шкалі A і прочитати протилежну мітку на шкалі D.

Порядок результату при піднесенні до квадрата визначається залежно від того, на якій половині квадратної шкали міститься результат:

а) якщо на лівій, то порядок результату дорівнює подвоєному порядкові основи мінус одиниця;

б) якщо на правій, то порядок результату дорівнює подвоєному порядкові основи.

Приклад 1. $0{,}0308^2 = 0{,}000949$. Тут порядок основи дорівнює -1. Через те що результат знаходиться на лівій підшкалі, то його порядок дорівнює $2(-1) - 1 = -3$.

Приклад 2. $417^2 = 174\,000$. Тут порядок основи дорівнює 3. Через те що результат знаходиться на правій підшкалі, то його порядок дорівнює $2 \cdot 3 = 6$.

Якщо порядок підкореневого числа — парне число, то це число встановлюють на правій підшкалі квадратів, а якщо непарне — то на лівій.

Порядок квадратного кореня дорівнює числу всіх його граней ліворуч від коми (включаючи й неповні), якщо підкореневе число не менше від 1, і числу чисто нульових граней праворуч від коми, взятому зі знаком мінус, якщо підкореневе число менше від 1.

Приклад 1. $\sqrt{0{,}000000534} = 0{,}000731$. Тут порядок підкореневого числа дорівнює -6. Встановлюємо підкореневе число на правій підшкалі.

Підкореневе число менше від одиниці, і число його чисто нульових граней дорівнює 3; отже, порядок кореня буде -3.

Приклад 2. $\sqrt{0{,}00074} = 0{,}0272$. Тут порядок підкореневого числа -3. Ставимо його на лівій підшкалі. Через те що підкореневе число менше від одиниці, а число чисто нульових граней його дорівнює 1, то порядок результату буде дорівнювати -1.

Приклад 3. $\sqrt{176{,}2} = 13{,}28$. Тут порядок підкореневого числа 3. Ставимо його на лівій підшкалі. Через те що число більше від 1 і число його граней ліворуч від коми дорівнює 2, то й порядок результату також дорівнює 2.

5. Піднесення до куба і добування кубічного кореня. Перехід від основної шкали до шкали кубів рівнозначний піднесенню числа до куба. Зворотний перехід рівнозначний добуванню кубічного кореня.

Щоб дане число піднести до куба, треба знайти мітку на шкалі D і прочитати протилежну їй мітку на шкалі K.

Шкалу кубів поділено на три однакові підшкали (ліву, середню і праву).

Порядок результату при піднесенні до куба якого-небудь числа (P) визначається за формулами:

1) $P = 3p$ — коли результат читаємо на правій підшкалі кубів;

2) $P = 3p - 1$ — коли результат читаємо на середній підшкалі кубів;

3) $P = 3p - 2$ — коли результат читаємо на лівій підшкалі кубів.

Буквою p тут позначено порядок основи.

Приклади. а) $20^3 = 8000$. Результат читаємо на лівій підшкалі, отже, порядок його дорівнює $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

б) $0{,}315^3 = 0{,}0313$. Результат читаємо на середній підшкалі, отже, його порядок дорівнює $0 \cdot 3 - 1 = -1$.

Щоб добути кубічний корінь з числа, треба знайти його мітку на шкалі K і прочитати протилежну їй мітку на шкалі D.

Щоб поставити підкореневе число на лінійці, розбиваємо його (у думці) на грані по три цифри так, щоб кома була між гранями. Якщо остання справа грань виявиться неповною, до неї треба приписати один або два нулі, щоб вона стала повною. Неповною може виявитися і перша зліва грань. Відповідно до того, чи має перша зліва грань одну, дві або три цифри, підкореневе число встановлюють на ліву, середню чи праву підшкалу кубів.

Порядок кореня третього степеня визначається за формулами:

1) $P = \dfrac{p+2}{3}$ — коли індекс на лівій підшкалі K;

2) $P = \dfrac{p+1}{3}$ — коли індекс на середній підшкалі K;

3) $P = \dfrac{p}{3}$ — коли індекс на правій підшкалі K.

Приклади. а) $\sqrt[3]{8000} = 20$. Перша зліва грань підкореневого числа має одну цифру, отже, це число встановлюємо на лівій підшкалі. Порядок результату дорівнює $\dfrac{4+2}{3} = 2$.

б) $\sqrt[3]{0{,}000\,025} = 0{,}0292$. Перша зліва грань (грань, що складається з одних нулів, до уваги не беремо) має дві цифри, отже, підкореневе число встановлюємо на середній підшкалі кубів. Порядок результату дорівнює $\frac{-4+1}{3} = -1$.

§ 40. Історичні відомості про логарифми та логарифмічну лінійку

Логарифми були винайдені у першій чверті XVII ст. До цього винаходу привела настійна потреба астрономів, яким доводилося мати справу з великою кількістю дуже трудомістких обчислень. Тому винахід цей було зроблено майже одночасно різними вченими і вдосконалено протягом короткого часу. За влучним виразом Лапласа, винайдення логарифмів, «скоротивши працю астронома, подвоїло його життя».

Першим винахідником логарифмів був шотландський аматор-математик Джон Непер, який ввів і самий термін «логарифми». Обчислені ним таблиці були опубліковані у 1614 р. під назвою «Опис надзвичайних таблиць логарифмів»; вони містили, крім логарифмів чисел від 1 до 1449, також логарифми синусів, косинусів і тангенсів, обчислені через кожну мінуту дуги.

Проте таблиці Непера були незручні для обчислень, що, зрештою, помітив і сам їхній автор. Він не визначив основи своєї системи, не знав і самого поняття основи системи. Те ж число, яке відповідало основі його системи, було обернене основі натуральних логарифмів. Логарифми Непера спадали із зростанням числа, а числа типу 10 мали логарифми з великою кількістю значущих цифр.

Перші в історії науки таблиці десяткових логарифмів обчислив і опублікував англійський математик Генрі Брігс.

У 1624 р. Брігс опублікував «Логарифмічну арифметику», яка містила 14-значні логарифми чисел від 1 до 20 000 та від 90 000 до 100 000. Складання цих таблиць вимагало величезних затрат праці: для обчислення логарифма кожного опорного числа Брігс добував корінь 54 рази з точністю до 32-го знака.

Одночасно з Брігсом над удосконаленням винаходу Непера працював лондонський вчитель математики Джон Спейдель, який у 1619 р. видав обчислені ним таблиці під назвою «Нові логарифми». Таблиці Спейделя містили логарифми синусів, тангенсів та секансів. Пізніше, у 1622 р., Спейдель опублікував також таблицю логарифмів чисел. Основою своєї системи Спейдель вибрав число e: від прийнятих тепер натуральних логарифмів ця система відрізнялася лише множником 10^6.

У 1628 р. голландський математик Адріан Влакк опублікував десятизначні таблиці логарифмів від 1 до 100 000, а дещо пізніше — десятизначні таблиці тригонометричних функцій. Влакк у своїх таблицях застосував брігсові логарифми.

Одночасно з Брігсом і Спейделем над удосконаленням та полегшенням обчислень працював у Празі великий астроном Йоганн Кеплер (1571—1630) і швейцарський годинникар Іобст Бюргі (1552—1632). Розроблену ними систему Бюргі опублікував у 1620 р. під назвою «Арифметичні й геометричні таблиці прогресій разом з грунтовним повчанням, як їх треба розуміти і з користю вживати у всіляких обчисленнях». Таблиці містили члени арифметичної прогресії з різницею 10 (логарифми) та геометричної прогресії із знаменником 1,0001.

Способи обчислень, якими користувалися перші винахідники логарифмів, грунтуються на використанні пропорцій. За допомогою останніх, затрачаючи величезну працю, вони обчислили перші таблиці логарифмів. Згодом знайдено інші, більш легкі, способи обчислень за допомогою нескінченних рядів.

Російською мовою таблиці логарифмів видано вперше в 1703 р. Склали їх викладачі Московської навігацької школи Андрій Фархварсон, Стефан Гвін та Леонтій Магницький. У свою «Універсальну арифметику» Леонард Ейлер включив розділи, присвячені теорії логарифмів.

У 1783 р. були надруковані семизначні таблиці логарифмів, які обчислив австрійський математик Георг Вега. Ці таблиці завдяки ретельності їх виконання стали незамінним посібником і перевидавалися багатьма мовами (в тому числі й російською) протягом більш як півтораста років, причому витримали кілька сот видань.

Майже одночасно з логарифмами винайдено і лічильну лінійку. В 1620 р. Едмунд Гюнтер сконструював шкалу, відстані на якій були пропорціональні логарифмам чисел. За допомогою циркуля можна було додавати та віднімати числа цієї шкали, виконуючи таким чином операції множення і ділення.

Близько 1622 р. Вільям Аутред винайшов круглу лічильну лінійку, але опис її опублікував лише в 1632 р., а двома роками пізніше він винайшов пряму лінійку. Близько 1630 р. учень Аутреда Річард Деламейн запропонував дещо іншу конструкцію круглої лінійки.

Через те що винайдення подібного лічильного приладу відповідало потребам мореплавців та інших спеціалістів, то незабаром після перших винаходів було запропоновано багато нових конструкцій лінійок, що більш-менш відрізнялися одна від одної. До винахідників приєднався і Ньютон, який запропонував конструкцію лінійки для розв'язування рівнянь.

Якщо в XVII ст. основним типом лінійки був круглий, то у XVIII ст. переважно розповсюджується прямокутна лінійка. У 1787 р. Уільям Нікольсон (1753—1815) запропонував ряд удосконалень, що надали лінійці майже сучасного вигляду.

В середині XIX ст. вдосконаленням логарифмічної лінійки займався відомий французький геометр та механік Амеде Маннгейм (1831—1906). Запропонована ним лінійка застосовується до цього часу. Зміни в конструкції лінійки після 1850 р. стосуються лише незначних подробиць.

§ 41. Числові послідовності

1. Означення. *Числовою послідовністю* називають функцію від натурального аргументу. Числа, що входять до складу числової послідовності, називають її *членами**.

Послідовність часто записують так:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

x_n називають загальним членом послідовності.

Послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ коротко позначають символом $\{x_n\}$.

Приклади послідовностей:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots;$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n}\ \ldots;$$

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots;$$

$$1,\ -1,\ +1,\ \ldots,\ 1,\ -1,\ \ldots;$$

$$2,\ 2,\ 2,\ \ldots,\ 2,\ \ldots.$$

Остання послідовність є прикладом *сталої* послідовності. Якщо в послідовності є останній член, то вона називається *скінченною*. Якщо послідовність має нескінченну множину членів, вона називається *нескінченною*. Скінченна послідовність може бути задана переліком членів. Щоб задати нескінченну послідовність $\{x_n\}$, треба вказати правило, за яким будь-якому натуральному числу n можна поставити у відповідність деяке число x_n.

Так само як і функцію від дійсного аргументу, послідовність можна задавати за допомогою формули, табличним та графічним способами.

Наприклад, послідовність непарних натуральних чисел можна задавати у вигляді формули загального члена:

$$x_n = 2n - 1$$

* У математиці розрізняють послідовності й числові послідовності. Членами послідовності можуть бути будь-які предмети: лінії, фігури і т. д. Членами числової послідовності є лише числа. Проте далі, розглядаючи числові послідовності, ми коротко будемо називати їх просто послідовностями.

або у вигляді таблиці:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \ldots$$

Можна задати її також у вигляді графіка, що складається з ізольованих одна від одної точок (рис. 67).

Можна задати цю послідовність і за допомогою точок на числовій осі (рис. 68). Сталій послідовності на числовій осі відповідає одна точка. Послідовність

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots$$

на числовій осі зображується так, як це показано на рис. 69.

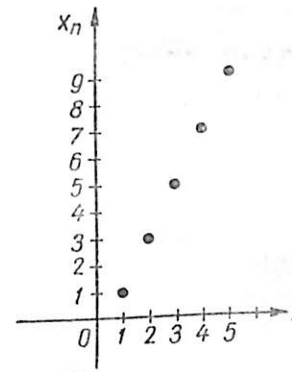


Рис. 67.

Від задання послідовності за допомогою формули не важко перейти до табличного або графічного способу її задання.

Приклад. Якщо $x_n = n + (-1)^n$, то, приймаючи $n = 1, 2, 3, \ldots$, дістанемо послідовність

$$0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ \ldots.$$

Ще приклад. Якщо

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{для непарних } n, \\ \frac{n}{n+1} & \text{для парних } n, \end{cases}$$

то, приймаючи $n = 1, 2, 3, \ldots$, дістанемо $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \ldots$.

Проте, якщо послідовність задано у вигляді таблиці, іноді дуже важко визначити її аналітичний вираз. Наприклад, для послідовності простих чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \ldots$$

взагалі не відомий загальний член, незважаючи на те, що багато математиків уперто шукали його протягом кількох століть.

2. Границя послідовності. Число a називається границею послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число N, залежне від ε, таке, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*, а така, що не має границі, — *розбіжною*. Послідовність не може мати більше однієї границі. Границя послідовності не зміниться, якщо на початку її приписати або виключити кілька членів.

Якщо послідовність має границю, на числовій осі вона зображатиметься такими точками, які, починаючи з певної, лежать у до-

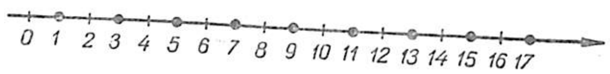


Рис. 68.

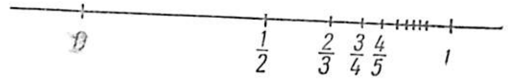


Рис. 69.

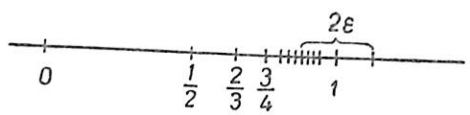


Рис. 70.

вільно малому проміжку, що оточує точку $a : (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$. Так наприклад, якщо ми зобразимо на числовій осі послідовність

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1 - \frac{1}{3},\ x_3 = 1 - \frac{1}{4}, \ldots, x_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \ldots$$

і оточимо точку $x = 1$ відрізком довжиною 2ε так, щоб ця точка знаходилась всередині відрізка, то всі точки $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ увійдуть до цього відрізка (рис. 70), якщо тільки $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, тобто якщо $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Якщо послідовність, що має границею число a, зобразити графічно в прямокутній системі координат, дістанемо сукупність точок, які весь час наближаються до прямої $y = a$. Так, точки послідовності,

зображені на рис. 71, прямують до злиття з прямою $y = 1$, отже ця послідовність має своєю границею 1. В цьому легко впевнитися, оцінивши за абсолютною величиною різницю

$$x_n - 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Маємо: } |x_n - 1| = \frac{1}{2^n}.$$

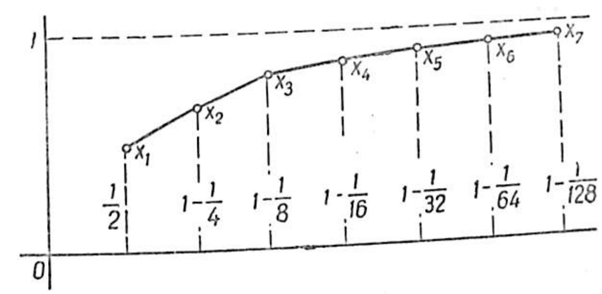


Рис. 71.

Тоді $|x_n - 1| < \varepsilon$, якщо $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, тобто якщо n задовольняє нерівність $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Щодо послідовностей справджуються такі твердження.

а) Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю a і $a > b$ $(a < b)$, то існує такий номер N, що для всіх $n > N$ вірною є нерівність $x_n > b$ $(x_n < b)$.

б) Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні і завжди $x_n \geqslant y_n$, то $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

в) Якщо для послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ завжди є вірними нерівності $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ і $\lim x_n = \lim z_n = a$, то і $\lim y_n = a$.

Розглянемо кілька прикладів.

П р и к л а д 1. Показати, що

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2.$$

Розв'язання. Складемо різницю

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютною величиною:

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Нерівність справджується, якщо

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N.$$

Таким чином, для кожного додатного числа ε знайдеться число $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ таке, що при $n > N$ справджується потрібна нерівність. Отже, число 2 є границею послідовності

$$\left\{\frac{2n+1}{n+1}\right\}.$$

Приклад 2. Показати, що послідовність

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

не має границі.

Розв'язання. Припустимо, що $\{x_n\}$ має границею a. Візьмемо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тоді за означенням має існувати таке натуральне число N, що при $n > N$ буде $|x_n - a| < \frac{1}{2}$. Але серед значень $n > N$ завжди будуть як парні, так і непарні; якщо $n = 2k$, то $x_n = 1$, а якщо $n = 2k+1$, то $x_n = -1$. Тоді мають місце нерівності:

$$|1 - a| < \frac{1}{2}, \quad |a - (-1)| < \frac{1}{2},$$

але тоді

$$2 = |(1-a) + (1+a)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

що неможливо. Виходить, припущення є невірним; отже, послідовність $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ не має границі.

Приклад 3. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$. Визначити, для яких значень n величина

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

менша 0,0001.

Розв'язання. Для визначення n треба розв'язати нерівність

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{10^4},$$

або

$$\left|\frac{1}{3(2-3n)}\right| = \frac{1}{3\,|2-3n|} < \frac{1}{10^4},$$

звідки

$$3(3n-2) > 10^4,$$

$$n > \frac{10^4+6}{9} \approx 1111.$$

Таким чином, $\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right|$ буде меншим від 0,0001 при $n \geqslant 1111$.

3. Обмежені й необмежені послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо всі члени її менші (більші) від деякого числа.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто якщо існують такі числа m та M, що для всіх n

$$m < x_n < M.$$

Кожний член обмеженої послідовності $\{x_n\}$ за абсолютною величиною менший від деякого числа: $|x_n| < A$.

Послідовність, що має границю, є обмеженою.

Нескінченна послідовність $\{x_n\}$ називається *необмеженою*, якщо для будь-якого наперед заданого числа A існує таке n, що $|x_n| > A$.

Приклади. Послідовність $x_1 = 0$; $x_2 = 0{,}3$; $x_3 = 0{,}33$; ..., $x_n = \underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ раз}}$; є обмеженою, тому що $|x_n| < 1$ при всіх n.

Послідовність $x_n = (-1)^n$ також обмежена, оскільки при всіх $|x_n| = 1$.

Послідовність натуральних чисел 1, 2, 3, ... є необмеженою зверху, бо не існує такого числа M, щоб усі члени послідовності залишалися меншими від цього числа.

Послідовність $-1, -2, -3, \ldots$ є необмеженою знизу.

Якщо для будь-якого додатного числа A можна вказати таке число N, що при $n > N$, $x_n > A$, то кажуть, що x_n наближається до плюс нескінченності, і це записують так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \text{ або } x_n \to +\infty.$$

Якщо для будь-якого від'ємного числа A можна вказати таке натуральне число N, що при $n > N$ здійснюється нерівність $x_n < A$, то вважають, що x_n наближається до мінус нескінченності, і записують це так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty, \text{ або } x_n \to -\infty.$$

4. Монотонні послідовності. Послідовність $\{x_n\}$ називається *зростаючою (спадною)*, якщо кожний наступний член її більший (менший) від попереднього, тобто якщо

$$x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n).$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається *неспадною* (незростаючою), якщо кожний наступний член її не менший (не більший) від попереднього, тобто якщо

$$x_{n+1} \geqslant x_n \ (x_{n+1} \leqslant x_n).$$

Послідовності зростаючі, спадні, незростаючі й неспадні називаються *монотонними*.

Приклад 1. Показати, що послідовність $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ зростаюча.

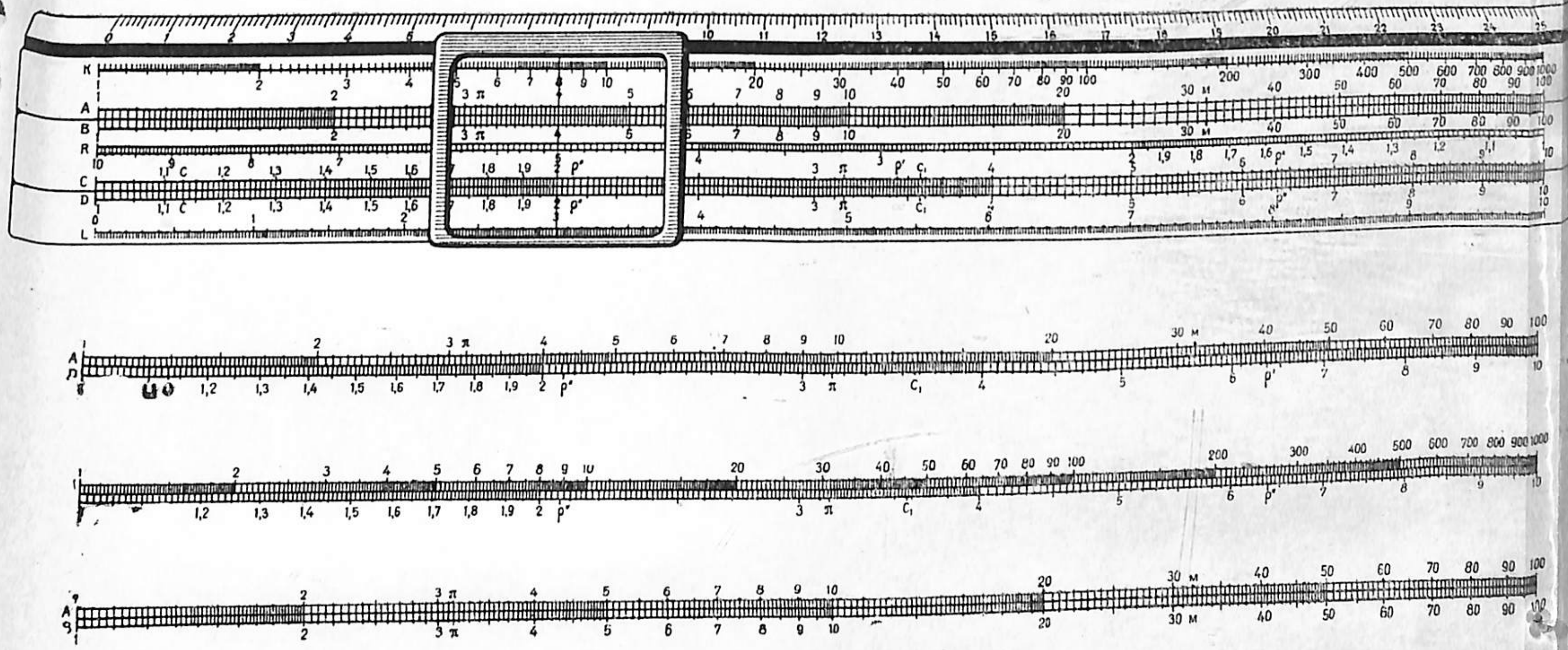
Розв'язання. Треба показати, що для кожного n

$$x_{n+1} > x_n, \text{ або } x_{n+1} - x_n > 0.$$

Справді

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Отже, дана послідовність зростаюча.



* Запис $N = N(\varepsilon)$ означає, що число N залежить від ε.

$x_{n+1} - x_n = \quad n+2 \quad n+1 \quad (n+1)(n+2)$

Отже, дана послідовність зростаюча.

Для монотонних послідовностей справджується теорема: якщо монотонно зростаюча послідовність $\{x_n\}$ обмежена зверху, то вона має границю; в противному разі вона прямує до $+\infty$. Монотонно спадна послідовність $\{x_n\}$, обмежена знизу, має скінченну границю; в противному разі вона прямує до $-\infty$.

П р и к л а д 2. Дослідити на збіжність послідовність із загальним членом

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Розв'язання. Дана послідовність зростаюча, тому що $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ і, значить, при будь-якому n має місце нерівність $x_{n+1} > x_n$.

Дана послідовність і обмежена. Справді

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Отже, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} < 2.$

Як бачимо, дана послідовність монотонно зростаюча і обмежена зверху, тому вона має границю.

Для збіжності послідовності $\{x_n\}$ необхідно і достатньо, щоб для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ існувало таке число $N = N(\varepsilon)$*, при якому справджується нерівність $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ при будь-якому n, більшому від $N(\varepsilon)$, та при довільному натуральному числі p (критерій Коші).

П р и к л а д. Дослідити на збіжність послідовність із загальним членом x_n $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Розв'язання. Застосовуючи критерій Коші, дістаємо:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}.$$

* Запис $N = N(\varepsilon)$ означає, що число N залежить від ε.

$^1/_2$ 12 6-501

За цим критерієм різниця має бути меншою від ε для будь-якого натурального числа p. Припустимо, що $p = n$, тоді маємо:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

отже, умова Коші не здійснюється, якщо взяти $p = n$. Значить, послідовність розбіжна.

5. Дії з послідовностями. Теореми про границі. Сумою, різницею, добутком та часткою двох послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називаються відповідно послідовності: $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ та $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, причому в останньому випадку припускають, що послідовність $\{y_n\}$ не має нулів.

Для збіжних послідовностей справджуються теореми: якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то збіжними будуть також послідовності $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ та $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. В останньому випадку припускають, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Вірними є такі формули:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

Ці рівності читають так:

границя суми, різниці, добутку та частки двох послідовностей, що мають границі, дорівнює відповідно сумі, різниці, добуткові й частці границь цих послідовностей. Причому в останньому випадку (для частки) припускається, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

П р и к л а д. Відомо, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

Знайти границі послідовностей:

$$\text{а)}\ \left\{3x_n + \frac{y_n}{2}\right\}; \quad \text{б)}\ \left\{\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right\}.$$

Розв'язання. Застосовуючи теореми про границі збіжних послідовностей, дістаємо:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty}\left(3x_n + \frac{y_n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}(3x_n) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3^* \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}\frac{1^*}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}.$$

$$\text{б)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_n - 4y_n}{y_n} + \lim_{n\to\infty} x_n =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} + \lim_{n\to\infty} x_n =$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

§ 42. Арифметична прогресія

1. Означення. *Арифметичною прогресією* називається числова послідовність, в якій кожне число, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додане однакове стале для цієї послідовності число (додатне або від'ємне).

Числа, які утворюють прогресію, називаються її членами. Арифметичну прогресію записують так:

$$\div\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Загальний член її позначають через a_n.

Число, яке треба додати до якого-небудь члена, щоб дістати наступний, називається *різницею арифметичної прогресії*; звичайно її позначають буквою d.

* $\lim\limits_{n\to\infty} 3$ слід розглядати як границю послідовності 3,3, ..., 3, ..., а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}$ — як границю послідовності $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{2}$, ...

1/2 12*

П р и к л а д 1. Послідовність чисел 10, 14, 18, 22, ..., $6 + 4n$, ... є арифметична прогресія з різницею 4.

П р и к л а д 2. Послідовність чисел 1, —1, —3, ..., $3 - 2n$ є арифметична прогресія з різницею —2.

Арифметична прогресія називається *зростаючою*, якщо будь-який наступний член її більший від попереднього (тобто якщо $d > 0$); і *спадною*, якщо будь-який наступний член менший від попереднього ($d < 0$).

Будь-який член арифметичної прогресії дорівнює першому її членові, плюс добуток різниці прогресії на число членів, що передують визначуваному, тобто

$$a_k = a_1 + (k - 1)\,d.$$

Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнє арифметичне попереднього й наступного членів, тобто:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнє арифметичне членів, рівновіддалених від нього, тобто:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

У будь-якій арифметичній прогресії $a_m + a_n = a_p + a_q$, якщо $m + n = p + q$. Зокрема, якщо прогресія має скінченне число членів, то сума двох членів, рівновіддалених від кінців її, дорівнює сумі крайніх членів, тобто:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Сума n перших членів арифметичної прогресії виражається формулами

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad s_n = \frac{[2a_1 + d\,(n - 1)]n}{2}.$$

Користуючись формулою суми n перших членів прогресії, можна обчислити суми однакових степенів натуральних чисел:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2\,(n + 1)^2}{4}.$$

2. Задачі на арифметичну прогресію.

З а д а ч а 1. Визначити останній член арифметичної прогресії, в якій

$$a_1 = 110, \quad d = -10, \quad n = 11.$$

Розв'язання.

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1), \quad a_n = 110 - 10\,(11 - 1) = 110 - 10 \cdot 10 = 10.$$

Відповідь. $a_{11} = 10$.

З а д а ч а 2. Знайти суму членів арифметичної прогресії, в якій

$$a_1 = 100, \quad d = -2, \quad n = 30.$$

Розв'язання.

$$a_{30} = 100 + (-2) \cdot 29 = 100 - 58 = 42,$$

$$s_{30} = \frac{(100 + 42) \cdot 30}{2} = \frac{142 \cdot 30}{2} = 71 \cdot 30 = 2130.$$

Відповідь. $s_{30} = 2130$.

З а д а ч а 3. Визначити перший член і суму членів арифметичної прогресії, в якій

$$n = 45, \quad d = 10, \quad a_n = 459.$$

Розв'язання.

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1), \quad a_1 = a_n - d\,(n - 1);$$

$$a_1 = 459 - 10 \cdot 44 = 459 - 440 = 19, \quad a_1 = 19;$$

$$s_n = \frac{(459 + 19)\,45}{2} = \frac{478 \cdot 45}{2} = 239 \cdot 45 = 10755.$$

Відповідь. 19; 10 755.

З а д а ч а 4. Визначити число членів і суму членів арифметичної прогресії, в якій

$$a_1 = 0, \quad d = \frac{1}{2}, \quad a_n = 5.$$

Розв'язання.

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1), \quad n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d},$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1; \quad n = \frac{5 - 0}{\frac{1}{2}} + 1 = 10 + 1 = 11;$$

$$n = 11.$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{(0+5)\cdot 11}{2} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}.$$

Відповідь. 11; $27\frac{1}{2}$.

Задача 5. Між числами 7 та 35 помістили шість інших чисел, які разом з даними утворили б арифметичну прогресію.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $a_1 = 7$, $a_n = 35$, $n = 8$. Тоді з формули $a_n = a_1 + d\,(n-1)$ маємо:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{35-7}{8-1} = 4.$$

Отже, маємо прогресію 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35; числа 11, 15, 19, 23, 27, 31 шукані.

Задача 6. Визначити перший член, різницю і число членів арифметичної прогресії, в якій

$$a_n = 55, \quad a_2 + a_5 = 32{,}5; \quad s_{15} = 412{,}5.$$

Розв'язання.

$$a_2 + a_5 = 32{,}5; \quad (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 32{,}5;$$
$$s_{15} = 412{,}5; \quad \frac{(a_1 + a_{15})^{15}}{2} = 412{,}5.$$

Після перетворень дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 32{,}5, \\ 15a_1 + 105d = 412{,}5, \end{cases}$$

звідки

$$d = 2{,}5; \quad a_1 = 10.$$

Тоді

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{55-10}{2{,}5} + 1 = 19.$$

Відповідь. 10; 2,5; 19.

Задача 7. Знайти чотири послідовних непарних числа, знаючи, що сума їхніх квадратів більша від суми квадратів уміщених між ними парних чисел на 48.

Розв'язання. Позначимо непарні числа через n, $(n+2)$, $(n+4)$, $(n+6)$. Тоді вміщені між ними парні числа будуть $(n+1)$, $(n+3)$, $(n+5)$. За умовою

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+5)^2 + 48,$$

або

$$n^2 + [(n+2)^2 - (n+1)^2] + [(n+4)^2 - (n+3)^2] + [(n+6)^2 - (n+5)^2] - 48 = 0,$$

звідси

$$n^2 + 6n - 27 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо $n_1 = 3$, $n_2 = -9$. Отже, шуканими числами будуть 3, 5, 7, 9, або −9, −7, −5, −3.

Відповідь. 3, 5, 7, 9; −9, −7, −5, −3.

§ 43. Геометрична прогресія

1. Загальні відомості. *Геометричною прогресією* називається така числова послідовність, в якій кожне число, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число, постійне для цієї послідовності.

Числа, що утворюють геометричну прогресію, називаються її членами. Геометричну прогресію записують так:

$$\div\div\; u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Загальний член її позначають через u_n.

Число, на яке треба помножити будь-який член геометричної прогресії, щоб дістати наступний, називається *знаменником* геометричної прогресії; його позначають буквою q.

Звідси випливає, що частка від ділення кожного відмінного від першого члена геометричної прогресії на попередній дорівнює знаменникові прогресії. Знаменник прогресії може бути і додатним, і від'ємним числом.

Приклад 1. Послідовність 8, −16, 32, −64, 128, −256, 512, ..., є геометрична прогресія із знаменником −2.

Приклад 2. Послідовність 20, 10, 5, $\frac{5}{2}$, ..., $40\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ..., є геометрична прогресія із знаменником $\frac{1}{2}$.

Будь-який член геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює першому членові, помноженому на знаменник прогресії, піднесеному до степеня, показник якого дорівнює числу членів, що передують визначуваному, тобто:

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Звідси випливає, що геометричну прогресію, у якої перший член a, знаменник q і число всіх членів n, можна зобразити так:

$$\div\div\, u,\ uq,\ uq^2,\ \ldots,\ uq^{n-1}.$$

Будь-який член геометричної прогресії зв'язаний з попереднім та наступним членами такою залежністю:

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1}.$$

У будь-якій геометричній прогресії $u_m u_n = u_p u_q$, якщо $m + n = p + q$. Зокрема, якщо прогресія має скінченне число членів, то добуток двох членів, рівновіддалених від її кінців, дорівнює добуткові крайніх членів.

Сума членів геометричної прогресії виражається формулою

$$S = \frac{u_n q - u_1}{q - 1} \quad (q \neq 1),$$

або

$$S = \frac{u_1 - u_n q}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Нескінченна геометрична прогресія, знаменник якої за абсолютною величиною менший від 1, називається *нескінченною спадною геометричною прогресією*.

Приклади нескінченних спадних геометричних прогресій:

$$16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

$$-0{,}5,\ -0{,}05,\ -0{,}005,\ -0{,}0005,\ \ldots$$

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ -\frac{1}{243},\ \ldots$$

Сумою нескінченної спадної геометричної прогресії називають границю суми n її перших членів при нескінченному зростанні n.

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

Отже, сума нескінченної спадної геометричної прогресії дорівнює частці від ділення першого її члена на різницю одиниці й знаменника прогресії.

2. Задачі на геометричну прогресію.

Задача 1. Обчислити п'ятий член геометричної прогресії, в якій перший член дорівнює 3, а знаменник прогресії 2.

Розв'язання.

$$u_1 = 3, \quad q = 2; \quad u_5 = u_1 q^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 48.$$

Відповідь. $u_5 = 48$.

Задача 2. Знайти суму членів геометричної прогресії, в якій

$$u_1 = 8, \quad q = \frac{1}{2}, \quad n = 5.$$

Розв'язання.

$$u_5 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2};$$

$$S = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-7\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = 15\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $15\frac{1}{2}$.

Задача 3. Визначити перший член і суму членів геометричної прогресії, в якій

$$q = \frac{1}{2}, \quad n = 10, \quad u_{10} = 7.$$

Розв'язання.

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \quad u_{10} = u_1 q^9.$$

Звідси

$$u_1 = \frac{u_{10}}{q^9} = \frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = 7 \cdot 2^9 = 7 \cdot 512 = 3584;$$

$$S = \frac{3584 - 7 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3584 - 3{,}5}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 3580{,}5 = 7161.$$

Відповідь. 3584; 7161.

Задача 4. Визначити перший та останній члени геометричної прогресії, в якій

$$n = 8, \quad q = 2, \quad S_8 = 765.$$

Розв'язання. Користуючись формулами загального члена і суми прогресії, дістаємо

$$u_8 = u_1 \cdot 2^7, \qquad 765 = \frac{(u_1 2^8 - u_1)}{2 - 1},$$

або

$$u_8 = u_1 \cdot 128, \quad 765 = u_1 (2^8 - 1).$$

Розв'язавши ці рівняння відносно u_1 та u_8, одержимо:

$$u_1 = 3, \quad u_n = 384.$$

Відповідь. 3; 384.

Задача 5. Знайти геометричну прогресію, утворену з шести членів, знаючи, що сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх 21.

Розв'язання.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 168;$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 21,$$

або

$$a + aq + aq^2 = 168;$$
$$aq^3 + aq^4 + aq^5 = 21.$$

Звідси

$$a(1 + q + q^2) = 168;$$
$$aq^3(1 + q + q^2) = 21.$$

Значить, $\frac{1}{q^3} = 8, \quad q = \frac{1}{2}$. Тоді $a = 96$.

Відповідь. $\div\!\div$ 96, 48, 24, 12, 6, 3.

Задача 6. Знайти три числа, що утворюють зростаючу геометричну прогресію, знаючи, що їх сума дорівнює 26, а сума квадратів цих чисел 364.

Розв'язання. Через те що a_1, a_2, a_3 утворюють геометричну прогресію, то $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$. Тоді, за умовою, маємо:

$$a + aq + aq^2 = 26,$$
$$a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 364.$$

Розв'язавши систему, дістанемо: $q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$, $a=2$. Оскільки прогресія зростаюча, знаменник її дорівнює 3.

Відповідь. 2, 6, 18.

Задача 7. Три додатних числа, що дають у сумі 21, становлять арифметичну прогресію. Якщо до них відповідно додати 2, 3 та 9, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання.

$$\div\, a,\ a + d,\ a + 2d.$$
$$\div\!\div\, a + 2,\ a + d + 3,\ a + 2d + 9.$$

За умовою, маємо:

$$a + a + d + a + 2d = 21,$$

звідки

$$3a + 3d = 21,$$

або

$$a + d = 7.$$

З другої умови випливає:

$$\frac{a + 2d + 9}{a + d + 3} = \frac{a + d + 3}{a + 2}.$$

Після перетворень дістанемо:

$$d^2 + 2d - 5a - 9 = 0.$$

Через те що $a = 7 - d$, то $d^2 + 7d - 44 = 0$; $d_1 = 4$, $d_2 = -11$. Тоді $a_1 = 3$, $a_2 = 18$.

Друге значення не задовольняє задачу, бо воно приводить до чисел 18,7 та —4, а останнє з них недодатне. Отже, $d = 4$ і $a = 3$. Тоді маємо такі числа: 3, 7, 11.

Відповідь. 3, 7, 11.

Задача 8. Знайти суму нескінченної спадної геометричної прогресії

$$\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ \ldots$$

Розв'язання.

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}; \quad S = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Відповідь. $3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 9. Сума нескінченної спадної геометричної прогресії дорівнює 12, 5, а сума першого і другого членів її 12.

Знайти цю прогресію.

Розв'язання. За умовою, $S = 12{,}5$; $u_1 + u_2 = 12$. Маємо:

$$u_1 + u_1 q = 12; \qquad 12{,}5 = \frac{u_1}{1-q}.$$

Виключивши з цієї системи u_1, дістанемо квадратне рівняння

$$12{,}5q^2 - 0{,}5 = 0.$$

Тоді $q = \pm \frac{1}{5}$; $u_1 = 12 : (1+q) = 10$ або $u_1 = 15$.

Відповідь. $\div\, 10;\ 2;\ -\frac{2}{5};\ \ldots$

$$\text{і} \div 15;\ -3;\ \frac{3}{5};\ \ldots$$

3. Історичні відомості про прогресії. Прогресії зустрічаються вже у математиків далекої давнини — в папірусі Ахмеса, в Архімеда, у декого з китайських математиків. Древнім індійським математикам також були відомі арифметична і геометрична прогресії, а Брахмагупта (628 р. н. е.) розглядав, крім того, послідовності, утворені квадратами та кубами чисел натурального ряду.

Саме слово «прогресія» запровадили римські математики, його вживав, зокрема, Боєціус (510 р. н. е.).

Давні математики пов'язували поняття «пропорції» і «прогресії». Надаючи пропорціям назви «арифметична», «геометрична» і «гармонічна», вони вважали, що пропорція є не що інше, як чотиричленна прогресія. Більшість з них наводила лише формулу суми прогресії, причому без доведення; деякі наводили також формулу для визначення останнього члена арифметичної прогресії, також без доведення. Правило для відшукання будь-якого члена арифметичної прогресії дав Кардан у 1539 р.

Формула для суми членів геометричної прогресії вперше в західноєвропейській літературі зустрічається в книзі Фібоначчі (1202 р.), потім її наводить Пойєрбах (1460 р.). Формулу цю для сумування нескінченної прогресії узагальнив французький математик Вієт у 1590 р.

§ 44. Метод математичної індукції

У багатьох відділах сучасної математики використовується метод доведення, який називається *методом математичної індукції*. Він грунтується на такій аксіомі індукції. Якщо якесь твердження справджується для $n = 1$ і якщо з припущення правильності його для якого-небудь довільного натурального $n = k$ випливає правильність його і для $n = k + 1$, то це твердження справджується для будь-якого натурального n.

Приклад 1. Довести формулу загального члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Доведення. Формула вірна для $n = 1$, бо $a_1 = a_1$. Припустимо, що формула вірна для $n = k$, тобто $a_k = a_1 + (k-1)d$. Тоді $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$.

Як бачимо, якщо формула вірна для $n = k$, то вона вірна і для $n = k + 1$. Для $n = 1$ вона вірна. Отже, формула, що доводиться, вірна при кожному натуральному значенні n.

Приклад 2. Довести, що при будь-якому n

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Доведення. При $n = 1$ ця рівність вірна: $1 = 1$.

Припустимо, що вона вірна при деякому довільному $n = k$, тобто, що

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2.$$

Тоді, додавши до обох частин цієї рівності одне і те саме число $2k + 1$, дістанемо

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1,$$

або

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] = (k+1)^2.$$

Отже, розглядана рівність справджується при $n = 1$, і з припущення вірності її при $n = k$ випливає, що вона справджується і при $n = k + 1$. Отже, вона вірна при кожному натуральному n.

Методом математичної індукції можна доводити і такі твердження, які при $n = 1$ не вірні, але вірні, починаючи з деякого натурального p, більшого за 1. При цьому використовують такий висновок з аксіоми індукції: якщо якесь твердження справджується для $n = p$ і якщо з припущення вірності його для якого-небудь $n = k \geqslant p$ випливає вірність його і для $n = k + 1$, то це твердження вірне для всіх натуральних чисел, починаючи з p.

Приклад 3. Довести, що при всіх $n \geqslant 5$

$$2^n > n^2.$$

Доведення. При $n = 5$ ця нерівність вірна, бо $32 > 25$.

Припустимо, що при деякому довільному $k \geqslant 5$

$$2^k > k^2.$$

тоді має бути вірною також нерівність

$$2^k + 2^k > k^2 + k^2.$$

Але через те що $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ і при $k \geqslant 5$ $k^2 > 2k + 1$, то з припущення випливає

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1,$$

або

$$2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Як бачимо, якщо дана нерівність вірна при $n = k \geqslant 5$, то вона вірна і при $n = k + 1$. При $n = 5$ вона вірна. Отже, ця нерівність справджується при всіх натуральних $n \geqslant 5$.

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

§ 45. Комплексні числа

1. Означення. У множині дійсних чисел не кожне рівняння вище першого степеня має розв'язки. Так, наприклад, рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має дійсних коренів, оскільки не існує дійсного числа, квадрат якого дорівнює числу -1. Це привело до розширення множини дійсних чисел шляхом впровадження чисел нової природи. Ці нові числа називають *уявними*.

Число, що задовольняє рівність $x^2 = -1$, позначають буквою i, воно називається *уявною одиницею**. Таким чином, $i^2 = -1$.

Число $z = a + bi$, де a і b — будь-які дійсні числа, а i — уявна одиниця, називається *комплексним числом*. Числа a та bi називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z.

При $a = 0$ комплексне число $a + bi$ стає суто уявним числом bi; при $b = 0$ дістанемо число $a + 0i$, тобто дійсне число a.

Таким чином, множина комплексних чисел включає і всі дійсні числа. Кожне відоме нам число, наприклад, 2, 0, $\frac{2}{13}$, 0,06, $\sqrt{5}$, $3 + i$, i можна назвати комплексним числом. На схемі (стор. 368) показано, як пов'язані між собою різні види чисел.

Комплексні числа виду $a + bi$ та $a - bi$ називаються *спряженими*. Комплексні числа виду $a + bi$ та $-a - bi$ називаються *протилежними*.

Два комплексних числа $a + bi$ та $a' + b'i$ вважаються рівними в тому і тільки в тому випадку, якщо

$$a = a', \ b = b'.$$

---

* Існують два різних уявних числа, що задовольняють рівність $x^2 = -1$. Уявною одиницею називають тільки одне з них. Його позначають символом i. Друге число, що задовольняє цю саму рівність, позначають символом $-i$ і називають числом, спряженим до уявної одиниці.

З цього означення випливає, що комплексне число $a + bi$ дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ і $b = 0$.

Примітка. Щодо комплексних чисел не прийнято жодної угоди, яке з них вважати більшим.

2. Дії над комплексними числами. Над комплексними числами виконують такі самі дії, як і над дійсними. Щоб виконати яку-небудь дію над комплексними числами виду $a + bi$, треба виконати дію над двочленами такого виду за тими правилами, які відомі для двочленів з дійсними членами, і, нарешті, в результаті замінити скрізь i^2 на -1. Виходячи з цього, дії над комплексними числами означаються так.

Додавання. Сумою комплексних чисел $a + bi$ та $a' + b'i$ називається комплексне число $(a + a') + (b + b')\, i$.

Звідси випливає, що сума спряжених комплексних чисел $a + bi$ та $a - bi$ дорівнює дійсному числу* $2a$. Комплексне число $a + bi$ можна розглядати як суму дійсного числа a і суто уявного числа bi.

Приклади. $(4 + 2i) + (-3 + i) = 1 + 3i$; $(0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i$, тобто $2i + 5i = 7i$; $(-5 + 8i) + (-3 - 8i) = -8$.

Для додавання комплексних чисел вірні ті самі основні закони, що й для дійсних чисел:

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$

$$[(a + bi) + (c + di)] + (m + ni) = (a + bi) + [(c + di) + (m + ni)].$$

Віднімання. Виходячи з означення віднімання як дії, оберненої додаванню, різницю комплексних чисел $a + bi$ і $a' + b'i$ відшукують так:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i.$$

Різницею двох комплексних чисел може бути будь-яке комплексне, дійсне і суто уявне число.

Приклади. $(1 - i) - (2 - 3i) = -1 + 2i$; $(4 + 5i) - (2 + 5i) = 2 + 0i = 2$; $(9 - 8i) - (9 + 8i) = -16i$.

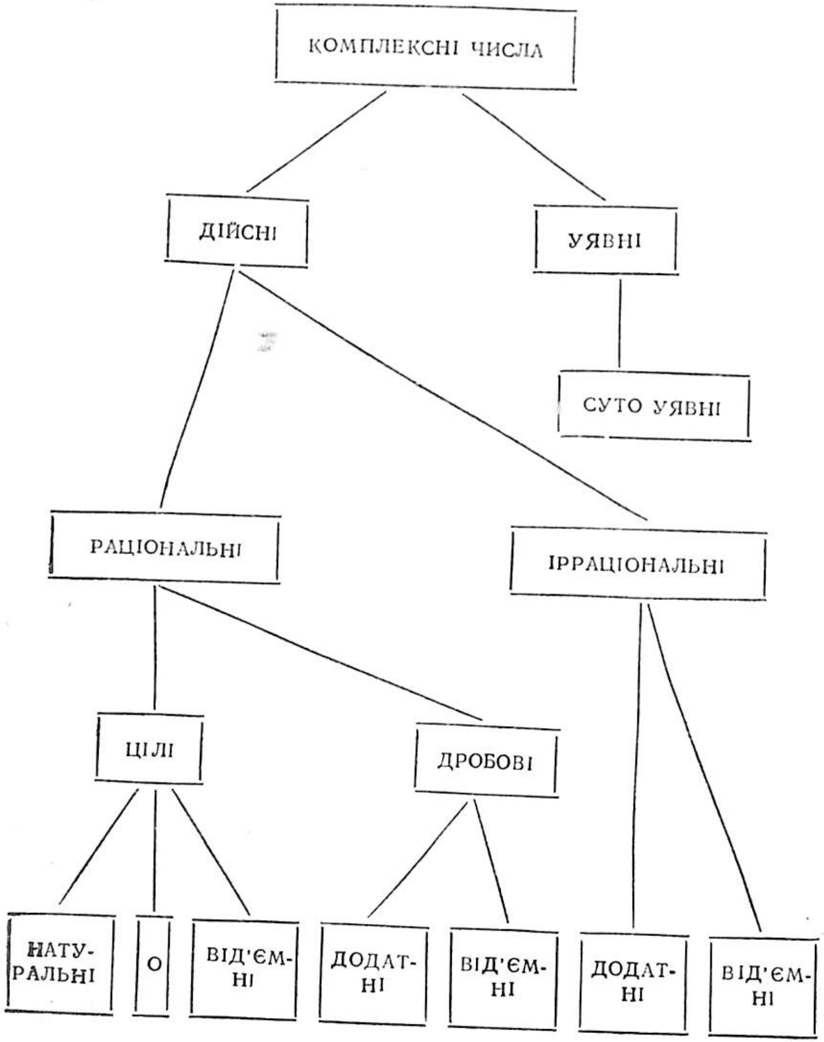
Множення. Добутком комплексних чисел $a + bi$ та $a' + b'i$ називається комплексне число

$$(aa' - bb') + (ab' + ba')\, i.$$

Звідси випливає, що для множення комплексних чисел досить перемножити їх як алгебраїчні двочлени і в одержаному результаті замінити $i^2 = -1$.

---

* Сума двох неспряжених комплексних чисел також може бути дійсним числом, наприклад $(7+3i)+(2-3i) = 9$.



Добуток спряжених чисел* $a + bi$ та $a - bi$ є дійсне число, що дорівнює $a^2 + b^2$.

П р и к л а д. $(2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 5$.

Множення комплексних чисел підлягає тим самим основним законам, що й множення дійсних чисел.

Ділення. Ділення комплексних чисел можна означити як дію, обернену множенню. Звідси випливає, що частка від ділення комплексного числа $a + bi$ на число $a' + b'i$ дорівнює

$$\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} i.$$

На практиці найзручніше ділення комплексних чисел виконувати так: спочатку помножити ділене і дільник на число, спряжене дільникові, після чого дільник стає дійсним додатним числом, а потім поділити дійсну і уявну частини окремо.

П р и к л а д.

$$\frac{-2 + 5i}{-3 - 4i} = \frac{(-2 + 5i)(-3 + 4i)}{(-3 - 4i)(-3 + 4i)} = \frac{-14 - 23i}{25} = -0{,}56 - 0{,}92i.$$

Піднесення до степеня. Спочатку знайдемо результати від піднесення до степеня уявної одиниці i, знаючи, що $i^2 = -1$.

$$i^1 = i; \quad i^3 = -i; \quad i^5 = i; \quad i^7 = -i;$$
$$i^2 = -1; \quad i^4 = 1; \quad i^6 = -1; \quad i^8 = 1.$$

Ми одержали, таким чином, чотири значення, які чергуються

$$i^{4k} = +1; \quad i^{4k+1} = i; \quad i^{4k+2} = -1; \quad i^{4k+3} = -i,$$

де

$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \text{ і т. д.}$$

Слід мати на увазі, що i^0 приймається рівним 1.

Піднесення комплексного числа до цілого степеня виконується так:

$$(a + bi)^n = \underbrace{(a + bi)(a + bi) \ \ldots \ (a + bi)}_{n \text{ разів}};$$

$$(a + bi)^{-n} = \frac{1}{(a + bi)^n}.$$

Тут n — натуральне число.

* Добуток двох неспряжених комплексних чисел теж може бути дійсним числом; наприклад $(2 + 3i)(4 - 6i) = 26$. Якщо ж і сума, і добуток двох комплексних чисел є дійсними числами, то ці комплексні числа неодмінно спряжені.

Добування квадратного кореня. Добування кореня з комплексного числа є дія, обернена піднесенню до степеня, за допомогою якої за даним степенем (підкореневе число) та даним показником степеня (показник кореня) знаходять основу (корінь). У множині комплексних чисел дію добування кореня завжди можна виконати, і в результаті виходить стільки значень, яким є показник кореня. Зокрема, квадратний корінь має два значення, які відшукують за формулою

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

де знак «+» у дужках береться при $b>0$, а знак «—» — при $b<0$.

Приклад.

$$\sqrt{5+12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = (\sqrt{9} + i\sqrt{4}) = \pm\,(3+2i).$$

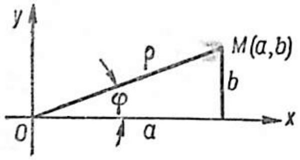


Рис. 72.

3. Геометричне зображення комплексних чисел. Відомо, що дійсні числа можна зображати точками на прямій. Комплексні числа ($z = a + bi$) взаємно однозначно зіставляються з парами дійсних чисел (a, b). Тому умовились комплексне число $z = a + bi$ геометрично зображати в прямокутній системі координат точкою M, абсциса якої дорівнює a, а ордината b (рис. 72).

Комплексне число можна також зображати напрямленим відрізком (вектором) OM, тобто відрізком прямої, у якого вказано, яка з точок, що його обмежують, є початком і яка — кінцем. В нашому випадку 0 є початок, а M — кінець. Значить, комплексне число $z = a + bi$ зображають вектором, початок якого збігається з початком координат, а кінець — з точкою M. Самий вектор позначають $\overrightarrow{OM}$; напрям вектора вказує стрілка на його кінці.

Довжина вектора, що зображає комплексне число, називається *модулем* цього комплексного числа. Модуль будь-якого комплексного числа, що не дорівнює нулеві, є додатне число. Модуль комплексного числа $a + bi$ позначають $|a + bi|$, а також буквою r.

З рис. 72 видно, що

$$r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Модуль дійсного числа збігається з його абсолютним значенням. Спряжені комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ мають однаковий модуль.

Приклади.

$$|3+5i| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}; \quad |-7| = |-7+0\cdot i| = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7; \quad |4i| = |0+4i| = \sqrt{0^2+4^2} = 4.$$

Кут φ між додатним напрямом осі абсцис і вектором $\overrightarrow{OM}$, що зображає комплексне число $a + bi$, називається *аргументом* комплексного числа $a + bi$. Кожне комплексне число, що не дорівнює нулеві, має нескінченну множину аргументів, які відрізняються один від одного на ціле число обертів (тобто на $360°k$, де k — будь-яке ціле число)*.

Аргумент φ комплексного числа $a + bi$ пов'язаний з a і b такими формулами:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

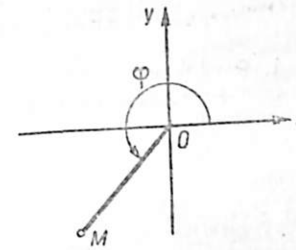


Рис. 73.

Проте жодна з них, узята окремо, не дає змоги знайти аргумент за абсцисою і ординатою. Покажемо це на прикладах.

Приклад. Знайти аргумент комплексного числа $-3-3i$.

Розв'язання. Перший спосіб. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$. Цю умову задовольняють як кут 45°, так і кут 225°. Але кут 45° не буде аргументом числа $-3-3i$ (рис. 73). Вірна відповідь буде $\varphi = 225°$ (або $-135°$, або 585° і т. д.). Цей результат одержимо, коли врахуємо, що абсциса й ордината даного комплексного числа від'ємні. Отже, точка M лежить у третій чверті.

Другий спосіб. $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Формула для $\sin\varphi$ показує, що він теж від'ємний. Значить, кут φ належить третій чверті, так що $\varphi = 225° \pm 360°k$.

Найменше за абсолютною величиною значення аргументу називається головним. Так, для комплексного числа $-3-3i$ *головне значення аргументу* дорівнює $-135°$.

Аргумент дійсного додатного числа має головне значення 0°; для від'ємних чисел головним значенням аргументу прийнято вважати 180° (а не $-180°$).

* Для комплексного числа $z = 0$ аргумент втрачає зміст.

У спряжених комплексних чисел головні значення аргументу мають однакові абсолютні значення, але протилежні знаки. Так, головні значення аргументів чисел $-3+3i$ та $-3-3i$ дорівнюють відповідно $135°$ і $-135°$.

Аргумент $z = a + bi$ позначається так: $\varphi = \operatorname{Arg} z$, або $\varphi = \arg z$. Перше позначення вживається для всіляких значень аргументу; друге — для головного значення аргументу, який виділяється нерівністю $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

§ 46. Тригонометрична форма комплексного числа

1. **Означення.** Загальна форма запису комплексного числа, тобто форма $a + bi$, називається *алгебраїчною*. Абсциса a і ордината b комплексного числа $a + bi$ виражаються через модуль r і аргумент φ (рис. 73) формулами

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Тоді дістанемо:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Останній вираз називається *тригонометричною формою комплексного числа* з модулем r і аргументом φ. Будь-яке число $z \neq 0$ може бути подане у тригонометричній формі.

Приклад 1. Подати у тригонометричній формі число $-3+2i$.

Розв'язання. $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{3} = -0{,}666\ldots$.

Тангенс від'ємний, отже, значення φ треба шукати у другій та четвертій чвертях. Звертаючись до формул для $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$, помічаємо, що при $a = -3$ та $b = 2$ синус буде додатний, а косинус від'ємний, що здійснюється у другій чверті*. За таблицями дістаємо $\varphi = 146°18'$, значить

$$-3 + 2i = \sqrt{13}\,(\cos 146°\,18' + i\sin 146°\,18').$$

Приклад 2. Подати в тригонометричній формі число $1 - i$.

Розв'язання. Маємо: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = -1$. Тут $a = 1$, $b = -1$. Отже, φ знаходиться у четвертій чверті. Звідси дістаємо $\varphi = 315°$ і можемо написати:

$$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i\sin 315°).$$

---

* Зручніше чверть визначати за знаками при a і b. У даному разі $a = -3$, $b = +2$. Точку з такими координатами знаходять у другій чверті.

Примітка. Через те що $315° = 360° - 45°$ і $\cos 315° = \cos 45°$; $\sin 315° = \sin(-45°) = -\sin 45°$, це число можна записати й так:

$$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 45° - i\sin 45°).$$

Приклад 3. Подати в тригонометричній формі дійсне число $m > 0$.

Розв'язання. Через те що $m = m + 0\cdot i$, то $a = m$, $b = 0$ і тоді

$$r = \sqrt{m^2 + 0^2} = m;\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{m} = 0;\ \cos\varphi = \frac{m}{m} = 1.$$

Отже, $\varphi = 0$ і можна написати:

$$m = m(\cos 0° + i\sin 0°),$$

або в загальному вигляді

$$m = m(\cos 360°k + i\sin 360°k).$$

Звідси випливає, що модулем додатного числа є саме це число, а аргументом його є $0°$ (або $360°k$).

Приклад 4. Подати в тригонометричній формі від'ємне число $-m\,(m > 0)$.

Розв'язання. Через те що $-m = -m + 0\cdot i$, то $a = -m$, $b = 0$, і ми маємо:

$$r = m,\ \operatorname{tg}\varphi = 0,\ \cos\varphi = -1.$$

Отже, $\varphi = 180°$ і тоді,

$$-m = m\,(\cos 180° + i\sin 180°),$$

або в загальному вигляді:

$$-m = m\,[\cos(180° + 360°k) + i\sin(180° + 360°k)] =$$
$$= m\,[\cos 180°\,(2k+1) + i\sin 180°\,(2k+1)].$$

Отже, модулем від'ємного числа є його абсолютна величина, а аргумент дорівнює $180°$, або в загальному вигляді $180°(2k+1)$.

Приклад 5. Виразити в алгебраїчній формі число

$$4\,(\cos 30° + i\sin 30°).$$

Розв'язання. Через те що

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 30° = \frac{1}{2},$$

то маємо:

$$4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Далі розглянемо, як виконувати дії над комплексними числами, поданими в тригонометричній формі.

Додавання та віднімання комплексних чисел простіше й зручніше виконувати, коли вони виражені в алгебраїчній формі. Для решти алгебраїчних дій зручнішою є тригонометрична форма.

2. **Множення.** Нехай дано два комплексних числа z_1 та z_2. Записавши їх у тригонометричній формі

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

і перемноживши, дістанемо:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, *модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників, а аргумент дорівнює сумі аргументів співмножників.* Це правило вірне для будь-якого числа співмножників.

Приклад. а) Нехай

$$z_1 = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ);$$
$$z_2 = 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ),$$

тоді

$$z_1 z_2 = 6(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ).$$

б) Перемножити

$$2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ),\ 3[\cos(-160^\circ) + i\sin(-160^\circ)]$$

та

$$0{,}5(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ).$$

Розв'язання. Модуль добутку $2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 = 3$. Аргумент добутку $150^\circ - 160^\circ + 10^\circ = 0^\circ$. Добуток дорівнює $3(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$.

в) Перемножити

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r^2(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = r^2,$$

значить, добуток двох спряжених комплексних чисел є дійсне число, яке дорівнює квадратові їхнього спільного модуля.

3. **Ділення.** Нехай треба число $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ поділити на число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Будемо мати

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}.$$

Помноживши чисельник і знаменник на $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$ після перетворень, дістанемо

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Отже, *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент — різниці аргументів діленого і дільника.*

Приклад. Нехай

$$z_1 = \sqrt{3}(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ),$$
$$z_2 = 2[\cos(-160^\circ) + i\sin(-160^\circ)].$$

Тоді

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. **Піднесення до степеня.** Помноживши число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ само на себе n разів, дістанемо

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, *модуль степеня комплексного числа дорівнює тому самому степеневі модуля основи, а аргумент дорівнює аргументові основи, помноженому на показник степеня.*

В окремому випадку, якщо $r = 1$, то попередня рівність набуває вигляду:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ця формула має назву формули Муавра, за ім'ям англійського математика Муавра (1667—1754).

Приклади. а) Піднести до куба число

$$z = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ).$$

Розв'язання.

$$z^3 = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 4 + 4\sqrt{3}\,i,$$

тому що

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Піднести до 20-го степеня число

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Розв'язання. Записавши його в тригонометричній формі

$$z = 1\,(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$$

знайдемо:

$$z^{20} = 1^{20}\,(\cos 1200^\circ + i \sin 1200^\circ) =$$

$$= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

в) Знайти, як виразиться косинус і синус кута 3φ через косинус і синус кута φ.

Розв'язання.

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi +$$
$$+ 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin \varphi = \cos^3 \varphi -$$
$$- 3\cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi).$$

Зрівнюючи дійсні та уявні частини, дістанемо:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \sin^2\varphi \cos\varphi; \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3\varphi.$$

П р и м і т к а. Можна так само знайти $\cos 4\varphi$, $\sin 4\varphi$ і загальні формули для $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$.

5. Добування кореня. Корінь n-го степеня з комплексного числа добувається за формулою

$$\sqrt[n]{r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Тут $\sqrt[n]{r}$ — арифметичний корінь, а $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Корінь степеня n у множині комплексних чисел має n різних значень. Виняток становить $z = 0$. В цьому випадку всі значення кореня рівні між собою і дорівнюють нулеві.

Модуль кореня n-го степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого числа, а аргумент для кожного значення кореня визначається за формулою

$$\varphi_{k+1} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

П р и к л а д 1. Знайти корінь кубічний з числа

$$z = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ k\right)\right].$$

При $k = 0$

$$n_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}\right).$$

При $k = 1$

$$n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right].$$

При $k = 2$

$$n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)\right].$$

Легко переконатися, що при $k = 3, 4, 5, 6, \ldots$ будемо одержувати $n_4 = n_1$, $n_5 = n_2$ і т. д., тобто нових значень кореня ми вже не дістанемо.

П р и к л а д 2. Знайти кубічний корінь з одиниці.

Розв'язання. Маємо

$$1 = 1\,(\cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k).$$

Тоді

$$\sqrt[3]{1} = 1\,(\cos 120^\circ k + i \sin 120^\circ k).$$

При $k = 0, 1, 2$ дістанемо відповідно:

$$n_1 = 1\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 1;$$

$$n_2 = 1\,(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$n_3 = 1\,(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

6. Геометричне тлумачення дій над комплексними числами.

Додавання. Нехай треба додати числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$. Числу z_1 відповідає вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 — вектор $\overrightarrow{OM_2}$

13 6-501

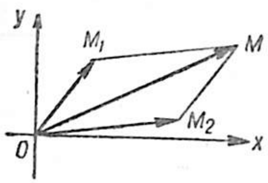


Рис. 74.

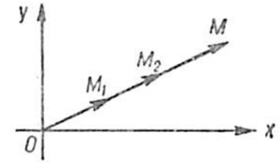


Рис. 75.

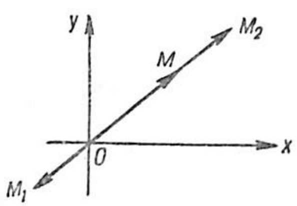


Рис. 76.

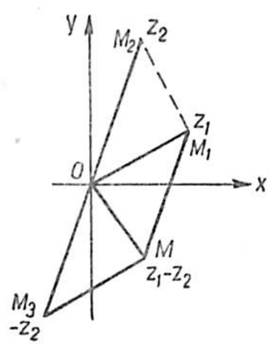


Рис. 77.

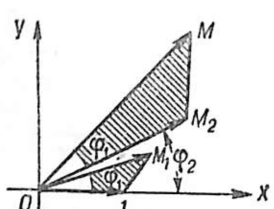


Рис. 78.

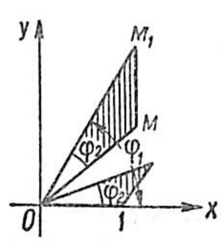


Рис. 79.

(рис. 74). З кінця M_1 вектора $\overrightarrow{OM_1}$ проведемо вектор $\overrightarrow{M_1M}$, що дорівнює векторові $\overrightarrow{OM_2}$, тобто такий, який має з вектором $\overrightarrow{OM_2}$ однакову довжину і напрям. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ дасть геометричне зображення суми $z_1 + z_2$. Якщо вектори $\overrightarrow{OM_1}$ та $\overrightarrow{OM_2}$ лежать на одній прямій, то і вектор $\overrightarrow{OM}$ лежить на тій самій прямій (рис. 75 і 76).

Побудований вектор $\overrightarrow{OM}$ називається сумою векторів $\overrightarrow{OM_1}$ та $\overrightarrow{OM_2}$.

Отже, *сумі двох комплексних чисел відповідає сума векторів, які зображають окремі доданки.*

Сума трьох (і більшої кількості) комплексних чисел також передається сумою векторів, що зображають окремі доданки.

Віднімання. Нехай треба відняти число $z_2 = a_2 + b_2 i$ від числа $z_1 = a_1 + b_1 i$. Числу z_1 геометрично відповідає вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а числу z_2 — вектор $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 77). Щоб одержати вектор, що відповідає різниці $z_1 - z_2$, перетворимо цю різницю: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Точка M_3, що відповідає $(-z_2)$, одержується з точки z_2 перетворенням симетрії відносно початку 0. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ відповідає числу $z_2 - z_1$.

Побудований вектор $\overrightarrow{OM}$ називається різницею векторів $\overrightarrow{OM_2}$ та $\overrightarrow{OM_1}$.

Отже, *різниці двох комплексних чисел відповідає різниця двох векторів, що зображають зменшуване і від'ємник.*

Множення. Щоб побудувати вектор $\overrightarrow{OM}$, відповідний добуткові $z_1 z_2$, де $z_1 = r(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, досить вектор $\overrightarrow{OM_1}$, відповідний числу z_1, повернути на кут φ_2 і піддати його перетворенню розтягу (або стиску, якщо $r_2 < 1$) в r_2 разів (рис.78).

Якщо $r_2 = 1$, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ можна буде тільки повернути на кут φ_2.

Ділення. Через те що ділення $\frac{z_1}{z_2} = z$ можна подати як множення на $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, то спосіб побудови вектора $\overrightarrow{OM}$, відповідного числу z, буде такий: вектор $\overrightarrow{OM_1}$, відповідний числу z_1, досить повернути на кут φ_2 і піддати операції стиску (або розтягу, якщо $r_2 < 1$) в r_2 разів (рис. 79).

Тут r_2 і φ_2 — модуль і аргумент z_2. Якщо $r_2 = 1$, то вектор $\overrightarrow{OM_1}$ тільки повернеться на кут φ_2.

Добування кореня. Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Звідси випливає, що всі n різних значень величини $\sqrt[n]{z}$ мають однаковий модуль $\sqrt[n]{|z|}$, а аргументи двох значень $\sqrt[n]{z}$, відповідні суміжним значенням k (k та $k+1$), відрізняються один від одного на $\frac{2\pi}{n}$ і тому *точки, відповідні значенням $\sqrt[n]{z}$, є вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром у початку координат.*

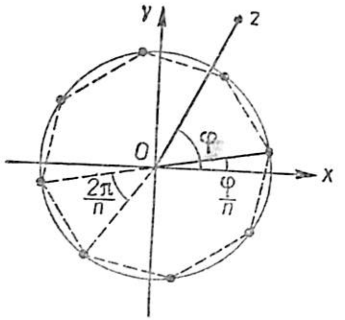


Рис. 80.

Спосіб побудови точок, відповідних значенням $\sqrt[n]{z}$, такий (рис. 80). З початку координат, як з центра, описуємо коло, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{|z|}$. Провівши від початку координат промінь, напрямлений до додатного напряму дійсної осі під кутом в n разів меншим від кута, утворе-
ного з тим самим напрямом променя, що йде від початку координат
у точку z, ми знайдемо на колі точку, відповідну значенню $\sqrt[n]{z}$ при
$k = 0$. Вписавши в коло правильний n-кутник так, щоб однією з його
вершин була знайдена точка, ми побудуємо точки, відповідні решті
значень кореня.

§ 47. Історичні відомості про комплексні числа

Числа, що згодом дістали назву комплексних, вперше з'явились
в одній із задач Д. Кардано. Він їх назвав «софістичними», бажаючи цим
підкреслити їхню парадоксальність: вважалося, що корінь квадратний
з від'ємного числа не має змісту, і в той же час добуток двох таких коре-
нів виявився цілком реальним числом.

Початок застосуванню комплексних чисел у математиці поклали
Г. Лейбніц та Я. Бернуллі. Лейбніц твердив, що логарифми від'ємних
чисел існують і є комплексними числами. Бернуллі й Даламбер намага-
лися довести, що вони дійсні. Це спірне питання вдалося розв'язати

Л. Ейлеру. Він показав, що логарифми від'ємних та комплексних чисел
є числа уявні.

У кількох замітках, що вийшли у першій чверті XVIII ст., А. Муавр
вказав на зв'язок, який існує між комплексними числами та тригоно-
метричними функціями, і вивів, правда, в неявній формі, свою знаме-
ниту формулу. В явній формі:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi;$$

що формулу вивів Л. Ейлер у 1748 р. Дещо раніше, у 1740 — 1743 рр.,
Л. Ейлер встановив основне співвідношення між показниковою і три-
гонометричною функціями:

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x.$$

З другої половини XVIII ст. почалася інтенсивна розробка питань,
що стосуються поняття комплексного числа. Початок систематичного
використання комплексних чисел пов'язаний з працями Ейлера та Да-
ламбера, які з'ясували ряд властивостей комплексних чисел і їхній
зв'язок з деякими задачами геодезії, картографії, гідродинаміки.

Проте, незважаючи на всі досягнення теорії, математики відмовля
лися вважати комплексні числа реально існуючими. Основною супереч
ністю була нез'ясованість самого поняття уявної одиниці: з одного боку,
було відомо, що не існує числа, квадрат якого дорівнював би —1, з дру-
гого, дії з цього роду «уявними» числами давали правильні результати.
Таким чином, треба було або визнати, що комплексні числа є свого роду
умовністю, або ж знайти їх тлумачення, пов'язане з об'єктивною реаль-
ністю. Подібне геометричне тлумачення було знайдене наприкінці
XVIII ст.

Вперше геометричне зображення комплексних чисел запропонував
Г. Кюн, учитель данцигської гімназії, у 1750—1751 рр. Проте лише в
1799 р. норвезький математик Гаспар Вессель (1745—1818) дав загальне
геометричне тлумачення комплексних чисел як точок на площині. Вес-
сель показав, що всі відомі до того часу числа є лише окремими випад-
ками комплексних.

На початку XIX ст. над питаннями дальшого обгрунтування теорії
комплексних чисел працювали К. Ф. Гаусс та О. Коші. К. Ф. Гаусс
впровадив і самий термін «комплексні числа».

§ 48. Рівняння вищих степенів

1. Деякі загальні теореми. Рівняннями вищих степенів називають-
ся алгебраїчні рівняння степеня вище другого. Загальний вигляд та-
ких рівнянь:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

а) Всяке алгебраїчне рівняння n-го степеня у множині комплексних чисел має n коренів, серед яких можуть бути і рівні один одному.

б) Якщо многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ має корінь x_1, то він ділиться на $x - x_1$, тобто $f(x) = (x - x_1)\,Q(x)$. Це — висновок з теореми Безу: *остача від ділення многочлена $f(x)$ на $x - x_1$ дорівнює $f(x_1)$.*

в) Усякий многочлен n-го степеня у множині комплексних чисел може бути поданий і притому єдиним способом у вигляді добутку двочленів першого степеня:

$$f(x) = A(x - x_1)^m (x - x_2)^p \ldots (x - x_n)^r,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені даного рівняння, а $m + p + \ldots + r = n$.

г) Якщо рівняння з дійсними коефіцієнтами (а тільки такі й розглядаються в елементарній алгебрі) має комплексний корінь $a + bi$, то воно має і спряжений з ним корінь $a - bi$. Якщо ж це рівняння непарного степеня, то воно повинно мати хоча б один дійсний корінь.

д) Усяке рівняння з дійсними коефіцієнтами має парне число уявних коренів, попарно спряжених.

е) Як уже відзначалося (стор. 247), для квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ справджується теорема Вієта:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

а

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

де x_1 та x_2 — корені рівняння.

Взагалі для рівняння n-го степеня

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

маємо:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

а

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

є) Для того щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був коренем рівняння з цілими коефіцієнтами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

необхідно, щоб p було дільником вільного члена a_n, а q — дільником коефіцієнта a_0.

ж) Якщо рівняння має цілі коефіцієнти і коефіцієнт при x^n дорівнює 1, то раціональними коренями можуть бути лише цілі числа.

з) Цілі корені рівняння з цілими коефіцієнтами є дільниками вільного члена.

У деяких випадках, використовуючи викладені вище властивості, можна порівняно легко розв'язувати рівняння вищих степенів з цілими коефіцієнтами.

П р и к л а д 1. Розв'язання рівняння $x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Розв'язання. Через те що рівняння має цілі коефіцієнти і коефіцієнт при x^3 дорівнює одиниці, то цілими коренями можуть бути лише дільники вільного члена, тобто:

$$1;\ 2;\ 3;\ -1;\ -2;\ -3.$$

Перевіримо, чи не буде 1 коренем даного рівняння:

$$f(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 11\cdot 1 - 6 = 0.$$

Тоді на підставі теореми Безу поліном у лівій частині ділиться на $x - 1$. Можна або безпосередньо поділити ліву частину на $x - 1$, або подати її у вигляді добутку:

$$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Квадратний тричлен легко розкладається на множники, отже,

$$f(x) = (x - 1)\cdot(x - 2)\cdot(x - 3) = 0.$$

Звідси дістаємо, що корені даного рівняння будуть 1; 2; 3.

2. **Рівняння, ліва частина яких розкладається на множники, а права є нуль.** В цьому випадку ліву частину рівняння розкладають на множники, з яких кожний — многочлен не вище другого степеня. Тоді прирівнюємо до нуля кожний множник окремо і розв'язуємо одержані рівняння. Знайдені корені будуть коренями даного рівняння.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$.

Розв'язання. Ліва частина легко розкладається на множники x та $x^2 + 3x - 10$. Отже, дане рівняння розпадається на два:

$$x = 0 \text{ та } x^2 + 3x - 10 = 0,$$

з яких знаходимо три розв'язки:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5.$$

Ефективність розв'язування рівнянь цим способом залежить від уміння розкласти ліву частину рівняння на множники. Проілюструємо це на прикладах.

П р и к л а д и. Розв'язати рівняння:

а) $x^3-4x^2-4x-5=0$;

б) $x^3+(b^2-a^2)x+ab^2=0$;

в) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

Розв'язання.

а) $x^3-5x^2+x^2-5x+x-5=0$; $x^2(x-5)+x(x-5)+(x-5)=0$;

Тоді
$$(x-5)(x^2+x+1)=0.$$

Значить,
$$x-5=0,\ x^2+x+1=0.$$

$$x_1=5,\ x_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\ i.$$

б) $x^3+b^2x-a^2x+ab^2=0$; $(x^3-a^2x)+(b^2x+ab^2)=0$; $x(x^2-a^2)+b^2(x+a)=0$; $x(x-a)(x+a)+b^2(x+a)=0$; $(x+a)[x(x-a)+b^2]=0$;

Тоді
$$(x+a)(x^2-ax+b^2)=0.$$

Значить,
$$x+a=0 \text{ і } x^2-ax+b^2=0.$$

$$x_1=-a,\ x_{2,3}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}.$$

в) $(x^4+x^3-12x^2)+(x^3+x^2-12x)+(-2x^2-2x+24)=0$; $x^2(x^2+x-12)+x(x^2+x-12)-2(x^2+x-12)=0$;

Тоді
$$(x^2+x-12)(x^2+x-2)=0.$$

Значить,
$$x^2+x-12=0 \text{ і } x^2+x-2=0.$$

$$x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=1,\ x_4=-2.$$

Перевірка. За теоремою Вієта:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0};$$

$$3-4+1-2=-\frac{2}{1};\quad -2=-2;$$

$$x_1x_2x_3x_4=(-1)^n\frac{a_n}{a_0};\quad 3\cdot(-4)\cdot1\cdot(-2)=(-1)^4\ \frac{24}{1};$$

$$24=24.$$

3. Двочленні рівняння. *Двочленним рівнянням* називається рівняння виду $ax^m+b=0$, $(a\neq0)$. Поділивши обидві частини такого рівняння на a, дістанемо зведене двочленне рівняння $x^m\pm q=0$.

Щоб розв'язати такі рівняння, вважають, що $x=\sqrt[m]{q}\cdot z$; тоді ці рівняння зводяться до простіших:

$$z^m-1=0,\quad z^m+1=0.$$

Такі рівняння можна розв'язати елементарними способами при деяких окремих значеннях m. Загальний спосіб полягає в розкладанні лівої частини рівняння на множники, після чого рівняння зводиться до виду, що був розглянутий раніше*.

П р и к л а д и. Розв'язати рівняння:

а) $x^3-1=0$;

б) $16x^4+81=0$.

Розв'язання.

$$\text{а) } x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Значить рівняння $x^3-1=0$ має своїми коренями корені рівнянь $x-1=0$ та $x^2+x+1=0$.

Розв'язавши їх, знайдемо, що рівняння $x^3-1=0$ має такі три корені:

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

б) Поділивши обидві частини даного рівняння на 16, дістанемо:

$$x^4+\frac{81}{16}=0.$$

Нехай

$$x=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}\cdot z=1{,}5z,$$

тоді

$$x^4+1=0.$$

Це рівняння можна розв'язувати кількома способами.

---

* Коли рівняння має вигляд $ax^m+bx^n=0$, де $m>n$, то його можна подати так: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ і, отже, воно розпадається на два рівняння: $x^n=0$ та $ax^{m-n}+b=0$.

*Перший спосіб**.

$$z^4=-1,\quad z^2=\pm i,$$

$$z_{1,2}=\sqrt{i}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right]=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

$$z_{3,4}=\sqrt{-i}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right]=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Другий спосіб.

$$z^4+1=0,\ z^4+2z^2+1-2z^2=0,\ (z^2+1)^2-2z^2=0,$$

$$z^2+1-\sqrt{2}z=0 \text{ і } z^2+1+\sqrt{2}z=0,$$

звідки

$$z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),$$

$$z_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i).$$

Третій спосіб.

$$z_{1,2,3,4}=\sqrt[4]{\cos(180^\circ+360^\circ k)+i\sin(180^\circ+360^\circ k)}=$$
$$=\cos(45^\circ+90^\circ k)+i\sin(45^\circ+90^\circ k),$$

де $k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$$z_1=\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$z_2=\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

$$z_3=\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$z_4=\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Графічно корені рівняння $z^4+1=0$ можна зобразити, як показано на рис. 81. Корені даного рівняння дістанемо, якщо аргументи чисел z_1, z_2, z_3, z_4 помножимо на 1,5.

* Див. формули на стор. 370.

Відповідь. $x_1=\frac{3}{4}\sqrt{2}(1+i);\quad x_2=-\frac{3}{4}\sqrt{2}(1-i);\quad x_3=-\frac{3}{4}\sqrt{2}(1+i);\quad x_4=\frac{3}{4}\sqrt{2}(1-i).$

4. Біквадратне рівняння. Рівняння четвертого степеня, в яке входять тільки парні степені невідомого, називається *біквадратним*.

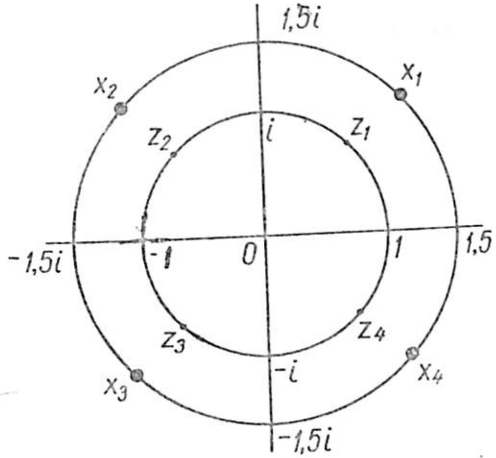


Рис. 81.

Його записують так:

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Це рівняння зводиться до квадратного шляхом заміни $x^2=z$; маємо $az^2+bz+c=0$. Формула розв'язків біквадратного рівняння така:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Вона дає чотири корені біквадратного рівняння, а саме:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Вводимо заміну $x^2 = z$. Дістаємо рівняння $z^2 - 13z + 36 = 0$. Тоді $z_1 = 9$, $z_2 = 4$. З рівності $x^2 = z$, підставляючи замість z знайдені числа 9 та 4, одержуємо такі чотири розв'язки даного рівняння:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

5. Тричленні рівняння. *Тричленними* називаються рівняння виду:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

(окремий випадок такого рівняння при $n = 2$ є біквадратне рівняння). Тричленне рівняння шляхом заміни $x^n = z$ зводиться до квадратного рівняння

$$az^2 + bz + c = 0,$$

звідки

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Підставивши в рівність $x^n = z$ замість z його значення z_1 та z_2, дістанемо два двочленних рівняння n-го степеня:

$$x^n = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x^n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Розв'язавши, якщо це можливо, ці двочленні рівняння, ми одержимо всі розв'язки даного тричленного рівняння.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Розв'язання. $x^3 = z$, $z^2 - 9z + 8 = 0$.

Тоді $z_1 = 8$ і $z_2 = 1$; отже, $x^3 = 8$ і $x^3 = 1$.

Розв'язавши ці двочленні рівняння третього степеня, дістанемо шість значень для x:

$$x_1 = 2, \; x_2 = -1 + i\sqrt{3} \quad x_3 = -1 - i\sqrt{3},$$

$$x_4 = 1, \; x_5 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

6. Симетричні рівняння. Рівняння виду $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + cx^2 + bx + a = 0$, у якого коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку й кінця, рівні, називаються *симетричними*, або *зворотними*.

Наприклад, $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Симетричне рівняння має таку властивість: якщо число x_1 є його розв'язком, то обернене число $\frac{1}{x_1}$ також буде його розв'язком*.

Симетричне рівняння може бути як парного, так і непарного степеня.

Спосіб розв'язування симетричних рівнянь парного степеня покажемо на прикладі рівняння четвертого степеня:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Поділивши обидві частини рівняння на $x^2 (x \neq 0)$, дістанемо:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Згрупуємо члени з однаковими коефіцієнтами:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Замінивши $x + \frac{1}{x}$ новою буквою y, дістанемо:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Отже, симетричне рівняння четвертого степеня зводиться до квадратного рівняння.

Симетричне рівняння парного степеня можна звести за допомогою підстановки $y = x + \frac{1}{x}$ до рівняння в два рази меншого степеня, ніж степінь вихідного. Для цього ділять усі члени даного рівняння на x^n (якщо степінь даного був $2n$) і групують члени, рівновіддалені від кінця і початку.

Після цього виконують заміну за формулами:

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

і т. д.

---

* Жоден з коренів симетричного рівняння не може дорівнювати нулеві.

Симетричне рівняння непарного степеня має корінь $x = -1$. Якщо це рівняння поділити на $x + 1$, то вийде симетричне рівняння парного степеня, на одиницю меншого за степінь вихідного рівняння.

Таким чином, усяке симетричне рівняння непарного степеня зводиться до двох рівнянь: $x + 1 = 0$ та симетричного рівняння парного степеня, на одиницю меншого за степінь вихідного рівняння.

Розглянуті вище рівняння називають симетричними рівняннями *першого роду*.

Рівняння виду

$$ax^{2k} + bx^{2k-1} + cx^{2k-2} + \dots + dx^{k+1} + ex^k - dx^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}bx + (-1)^k a = 0$$

називаються *симетричними рівняннями другого роду*. Розв'язуються ці рівняння тим самим способом, але вводять нове невідоме

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

П р и к л а д. Розв'язати рівняння

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Розв'язання. Це симетричне рівняння непарного степеня, отже, воно має корінь $x = -1$. Поділимо ліву частину даного рівняння на $x + 1$:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} 2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 \\ 2x^5 + 2x^4 \end{array} & x + 1 \\ \hline
\quad -\begin{array}{l} 3x^4 - 13x^3 \\ 3x^4 + 3x^3 \end{array} & 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 \\
\qquad -\begin{array}{l} -16x^3 - 13x^2 \\ -16x^3 - 16x^2 \end{array} & \\
\qquad\quad -\begin{array}{l} 3x^2 + 5x \\ 3x^2 + 3x \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 2x + 2 \\ 2x + 2 \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Отже, для визначення решти коренів даного рівняння треба розв'язати рівняння

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0, \text{ або } 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0.$$

Вважаючи

$$y = x + \frac{1}{x},$$

дістанемо

$$2(y^2 - 2) + 3y - 16 = 0,$$

звідки

$$y_1 = -4, \ y_2 = 2{,}5.$$

Отже, $x^2 + 4x + 1 = 0$ і $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Відповідь. $x_1 = -1, \ x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}, \ x_4 = 2, \ x_5 = \frac{1}{2}$.

СПОЛУКИ ТА БІНОМ НЬЮТОНА

§ 49. Сполуки

1. Множини. Теорія сполук, або, як її ще називають, *комбінаторика*,— це розділ елементарної алгебри, де вивчаються деякі операції над скінченними множинами і розв'язуються задачі, пов'язані з цими операціями.

Поняття *множини* — одне з неозначуваних основних понять у математиці. З цим поняттям зустрічаємося в усіх її розділах. Так, в арифметиці розглядають множину натуральних чисел, множину простих чисел; в алгебрі — множину многочленів, множину коренів даного рівняння тощо. Об'єкти, що утворюють множину, називаються *елементами* цієї множини. Множина, утворена із скінченного числа елементів, називається *скінченною*. Такими множинами є множина всіх двозначних чисел, множина вершин даного многокутника, множина його діагоналей і т. д. Множина, що містить необмежену кількість елементів, називається *нескінченною*. Нескінченною множиною, наприклад, є множина всіх натуральних чисел, усіх простих чисел і т. ін.

Множина, яка не містить елементів, називається *порожньою*.

Якщо всякий елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B. Підмножиною множини B вважають також порожню множину й саму множину B; їх називають *невластивими підмножинами*; решту підмножин називають *властивими*.

Множина $M = \{a, b, c, d, \dots\}$ називається *впорядкованою*, якщо між її елементами встановлено певне співвідношення $a < b$ (читають: «a передує b»), що має такі властивості:

1) для будь-яких двох елементів a та b вірне одне і тільки одне із співвідношень $a = b$, $a < b$, $b > a$;

2) для всяких трьох елементів a, b та c із співвідношень $a > b$ і $b > c$ випливає співвідношення $a > c$.

2. Перестановки. Нехай ми маємо множину M, утворену з n елементів: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Якщо переставляти ці елементи всілякими способами, залишаючи незмінним їх загальне число, дістанемо кілька послідовностей:

$$a_1a_2a_3 \dots a_n,$$
$$a_2a_1a_3 \dots a_n,$$
$$a_na_3a_2 \dots a_1 \quad \text{і т. д.*}$$

Кожну з цих послідовностей називають *перестановкою* з даних n елементів.

Приклад. Нижче наведено 6 можливих перестановок з букв a, b та c:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Отже, перестановкою з n елементів називається всяка скінченна послідовність, яка одержується в результаті впорядкування певної скінченної множини з даних n елементів.

Якщо множина має деяке число елементів, то її можна впорядкувати кількома способами. Число всіх перестановок з n елементів позначається P_n. Це число дорівнює добуткові всіх цілих чисел від 1 до n включно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1)\ n.$$

Добуток n перших натуральних чисел позначається символом $n!$:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Символ $n!$ читають «ен факторіал». Це слово походить від латинського *factor*, що означає множник.

Примітка. При $n = 1$ у виразі $1 \cdot 2 \cdot 3, \dots, n$ залишається одне число 1. Тому приймається (як означення), що $1! = 1$. При $n = 0$ вираз $1 \cdot 2, \dots, n$ зовсім втрачає зміст. Проте приймається (як означення), що $0! = 1$.

Отже, $P_n = n!$

Вірною є також така формула:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}.$$

Приклад. Скількома способами можна розсадити 8 глядачів у ряді з 9 місць?

Розв'язання. $P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$.

3. Комбінації. Нехай маємо множину M, утворену з n різних елементів.

* Записуючи перестановки, звичайно між їхніми членами не ставлять ком. Проте наведені вище записи ні в якому разі не можна розглядати як добутки.

Усяка підмножина множини M, що містить k елементів ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), називається *комбінацією* з даних n елементів по k елементів.

З означення випливає, що дві різні комбінації з даних n елементів по k елементів відрізняються принаймні одним елементом.

Приклад. З множини цифр 1, 2, 3, 4 можна утворити такі комбінації по два елементи: 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4.

Число різних комбінацій з n елементів по k позначається символом C_n^k (*combinatio* від лат. *combinare* — сполучати). Але іноді замість C_n^k пишуть $\binom{k}{n}$.

Число всіх комбінацій з n елементів по k елементів, де $1 \leqslant k \leqslant n$, дорівнює добуткові k послідовних натуральних чисел, з яких найбільшим є n, поділеному на добуток послідовних натуральних чисел від 1 до k:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

Формулу для C_n^k можна записати в іншому вигляді. Помноживши чисельник і знаменник дробу в правій частині на добуток $1 \cdot 2 \times 3 \dots (n-k)$, дістанемо:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

або

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}.$$

Примітка. З n елементів можна скласти тільки одну комбінацію, що містить усі n елементів, тому $C_n^n = 1$. Формула для C_n^k дає це значення тільки в тому разі, якщо прийняти $0!$ за 1. Як означення приймається, що $C_n^0 = 1$.

Вважають також, що $C_0^0 = 1$.

Приклад. Знайти число діагоналей опуклого десятикутника.

Розв'язання. Вершини десятикутника утворюють множину 10 точок площини, з яких будь-які три не лежать на одній прямій. З'єднуючи будь-яку пару цих точок відрізком прямої, дістаємо

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$$

відрізків, 10 з яких є сторонами многокутника, а решта 35 — його діагоналями.

4. Властивості комбінацій. а) Число комбінацій з n елементів по k елементів дорівнює числу комбінацій з n елементів по $n - k$ елементів, тобто

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (n \geqslant k).$$

Це співвідношення дає змогу спростити знаходження числа комбінацій з n елементів по k, коли k перевищує $\frac{1}{2} n$.

Приклад. $C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700.$

б) Число комбінацій з n елементів по k елементів дорівнює числу комбінацій з $n - 1$ елементів по k елементів, плюс число комбінацій з $n - 1$ елементів по $k - 1$ елементів, тобто

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Наведемо ще кілька співвідношень між виразами для чисел різного виду комбінацій (такі співвідношення називають також *комбінаторними тотожностями*):

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \cdots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1};$$
$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = 2^n;$$
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n) = C_{2n}^n;$$
$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \cdots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p.$$

5. Розміщення. Візьмемо яку-небудь множину M, що складається з n елементів.

Усяка впорядкована підмножина, що містить k елементів даної множини n елементів, називається *розміщенням* з n елементів по k (елементів).

Таким чином, два різних розміщення з даних n елементів по k відрізняються одне від одного або елементами, що входять до них, або порядком цих елементів.

Приклад. З трьох цифр 1, 2, 3 можна утворити такі розміщення по два:

1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1; 2, 3; 3, 2.

Число розміщень з n елементів по k позначається символом A_n^k (*Arrangement* (франц.) — розміщення).

Число всіх можливих розміщень з n елементів по k дорівнює добуткові k послідовних цілих чисел, з яких найбільшим є n, тобто

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1),$$

або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

Приклад. У класі вивчають 10 навчальних предметів, щодня є 5 різних уроків. Скількома способами можуть бути розподілені уроки кожного дня?

Розв'язання. Усі можливі розподіли уроків кожного дня являють собою, очевидно, найрізноманітніші розміщення з 10 елементів по 5; тому всіх способів розподілу повинно бути:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

У розглянутих вище перестановках, комбінаціях та розміщеннях елементи, що входять до них, не повторюються, і тому їх називають відповідно перестановками, комбінаціями, розміщеннями *без повторень*.

У математиці розглядають також перестановки, комбінації та розміщення *з повтореннями*. Цей матеріал з достатньою вичерпністю викладено в книзі: С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры, изд-во «Высшая школа», 1965, стор. 527—534.

§ 50. Розв'язування прикладів і задач на сполуки

Приклад 1. Спростити вираз $\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}}$.

Розв'язання.

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)!\,(2x-n)!}{(2x-1)!\,(2x-n)!} = 2x(2x+1).$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110.$

Розв'язання.

$$\frac{(x+2)!\,(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = 110.$$

Отже,

$$(x+1)(x+2) = 110 \text{ або } x^2 + 3x - 98 = 0, \ x_1 = -12, \ x_2 = 9.$$

Від'ємне значення x відкидаємо.

Відповідь. $x = 9$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8, \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dfrac{(2x)!}{(2x-n+2)!} : \dfrac{(2x)!}{(2x-n+3)!} = 8, \\ \dfrac{(2x)!}{(2x-n+2)!\,(n-2)!} : \dfrac{(2x)!}{(2x-n+3)!\,(n-3)!} = \dfrac{8}{3}, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} 2x - n + 3 = 8, \\ \dfrac{2x-n+3}{n-2} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Далі

$$n - 2 = 3, \; n = 5, \; x = 5.$$

Відповідь. $n = 5$, $x = 5$.

Задача 1. Число перестановок з n букв відноситься до числа перестановок з $n+2$ букв, як 0,1 до 3. Знайти n.

Розв'язання. За умовою

$$\frac{P_n}{P_{n+2}} = \frac{0{,}1}{3} \quad \text{або} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\,(n+1)(n+2)} = \frac{1}{30},$$

звідки

$$(n+1)(n+2) = 30.$$

Корені цього рівняння $n_1 = 4$, $n_2 = -7$.

Другий корінь непридатний.

Відповідь. $n = 4$.

Задача 2. Число комбінацій з n елементів по 3 в 5 разів менше за число комбінацій з $n+2$ елементів по 4. Знайти n.

Розв'язання. За умовою

$$5C_n^3 = C_{n+2}^4,$$

або

$$\frac{5n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(n+2)(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

звідки

$$5(n-2) = \frac{(n+2)(n+1)}{4}.$$

Відповідь. $n_1 = 14$, $n_2 = 3$.

Задача 3. Скількома способами можна вибрати з 15 чоловік делегацію у складі трьох чоловік?

Розв'язання. Через те що делегації a, b, c та b, a, c однакові, то шукане число є числом комбінацій з 15 по 3. Воно дорівнює:

$$C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1365.$$

Задача 4. Скількома способами збори, в яких беруть участь 40 чоловік, можуть вибрати зі свого складу голову зборів, його заступника та секретаря?

Розв'язання. Вибрати три чоловіка з 40 чоловік можна так:

a — голова,	a — секретар,
b — секретар,	b — голова,
c — заступник голови;	c — заступник голови

і т. д.

Отже, кількість різних способів буде A_{40}^3:

$$A_{40}^3 = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280.$$

Задача 5. На площині розташовано 10 точок так, що з них ніякі три, за винятком однієї трійки точок, не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих можна провести через ці точки?

Розв'язання. Якби три точки не лежали на одній прямій, то всього можна було б провести C_{10}^2 прямих. Якщо при цьому одна точка переміщається так, що буде на одній прямій з двома іншими точками, то з трьох різних прямих одержимо одну. Отже, всього прямих можна провести $C_{10}^2 - 2 = 43$.

Задача 6. Скільки можливих способів є для утворення дозору з трьох солдатів та одного офіцера, якщо є 80 солдатів і три офіцери?

Розв'язання. При одному офіцері й 80 солдатах можна утворити дозор C_{80}^3 способами. При трьох офіцерах число способів буде втричі більшим, тобто $3\,C_{80}^3 = 246\,480$.

Задача 7. Скількома способами можна розподілити шість різних предметів між трьома особами, так щоб кожна з них одержала два предмети?

Розв'язання. Одна особа може одержати два предмети з шести C_6^2 способами.

Нехай особи A, B, C одержали при одному способі розподілу по два предмети так:

$$A - ab,\ B - cd,\ C - ef.$$

Помінявши місцями власників цих предметів, дістанемо P_3 способів розподілу, що відповідає одній комбінації з шести елементів по два. Отже, всього способів розподілу буде $P_3 \cdot C_6^2 = 90$.

З а д а ч а 8. Скільки може бути випадків вибору двох олівців і трьох ручок з п'яти різних олівців і п'яти різних ручок?

Розв'язання. З п'яти різних олівців два олівці можна вибрати C_5^2 способами; з п'яти різних ручок три ручки можна вибрати C_5^3 способами. Одному вибору двох олівців з п'яти відповідає C_5^3 способів вибору ручок. Отже, всього способів вибору двох олівців і трьох ручок буде:

$$C_5^2 \cdot C_5^3 = C_5^2 \cdot C_5^2 = (C_5^2)^2 = 100.$$

З а д а ч а 9. Серед комбінацій з 10 букв a, b, c, ... по 4 скільки таких, що не містять букву a? букви a й b?

Розв'язання. Щоб обчислити кількість комбінацій з 10 букв a, b, c, ... по 4, які не містять букви a, треба підрахувати число комбінацій з 9 букв b, c, ... по 4; їх буде $C_9^4 = 126$. Тоді число комбінацій з 10 по 4, що не містять букв a та b, буде $C_8^4 = 70$.

З а д а ч а 10. Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, щоб до кожного числа входила кожна з даних цифр не більш як один раз?

Розв'язання. Різними однозначними числами, виключаючи нуль, будуть $A_4^1 = 4$. Якби серед даних цифр не було нуля, то число різних двозначних чисел дорівнювало б A_5^2. Але через те що серед них є нуль, то в числі розміщень з цих п'яти цифр по дві є однозначні числа,— це ті, які починаються з нуля. Число їх дорівнює $A_4^1 = 4$. Значить, різних двозначних чисел вийде $A_5^2 - A_4^1 = 16$. Аналогічно знайдемо, що число різних три-, чотири-, та п'ятизначних чисел буде відповідно

$$A_5^3 - A_4^2 = 48,\ A_5^2 - A_4^3 = 96,\ A_5^5 - A_4^4 = 96.$$

Всього вийде $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$ чисел.

З а д а ч а 11. Два з учасників шахового турніру вибули, зігравши по три партії кожний, і тому на турнірі було зіграно всього 84 партії. Скільки учасників було спочатку?

Розв'язання. Нехай шукане число учасників турніру було x. Повністю зіграли один з одним по партії лише $x - 2$ учасників (два вибули), і число цих партій, очевидно, дорівнює числу $C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$. Це число партій разом з шістьма зіграними двома учасниками, що вибули, становить 84. Звідси дістаємо рівняння $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84$. Розв'язуємо його: $x^2 - 5x - 150 = 0$, $x = 15$ (від'ємний корінь відкидаємо).

Відповідь. 15.

П р и м і т к а. В розв'язуванні припускається, що гравці, які вибули, один з одним не грали. Це дійсно так, тому що рівняння $C_{x-2}^2 + 5 = 85$ не має розв'язків.

§ 51. Біном Ньютона

1. Добуток біномів, що відрізняються тільки другими членами. Вираз $x + a$, як і взагалі всякий двочлен, називається *біномом*. Звичайним множенням знаходимо:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc,$$

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd.$$

Ці добутки являють собою многочлени, впорядковані за спадними степенями x. Усі вони складені за одним і тим же законом: показник першого члена дорівнює числу перемножуваних біномів, показники при x у наступних членах спадають на 1; останній член не має x (тобто має його в нульовому степені).

Коефіцієнт першого члена дорівнює 1; коефіцієнт другого члена є сума всіх других членів перемножуваних біномів; коефіцієнт третього члена є сума всіх можливих добутків других членів, узятих по два; коефіцієнт четвертого члена є сума всіх можливих добутків других членів, узятих по три, і т. д. Останній член є добуток усіх других членів.

Ця закономірність вірна і для добутку якого завгодно числа біномів, тобто

$$(x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + k) = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_m,$$

де
$$S_1 = a + b + c + \ldots + i + k,$$
$$S_2 = ab + ac + \ldots + ik,$$
$$S_3 = abc + abd + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_m = abc \ldots ik.$$

Приклад. Знайти добуток біномів:

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4).$$

Розв'язання.

$$S_1 = (-1) + 2 + (-3) + 4 = 2;$$
$$S_2 = (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + (-1)\cdot 4 + 2(-3) + 2\cdot 4 + (-3)\cdot 4 = -7;$$
$$S_3 = (-1)\cdot 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 2\cdot 4 + (-1)\cdot(-3)\cdot 4 + 2\cdot(-3)\cdot 4 = -14;$$
$$S_4 = (-1)\cdot 2\cdot(-3)\cdot 4 = 24.$$

Отже,

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24.$$

2. Формула бінома Ньютона. Якщо в наведеній вище формулі всі другі члени біномів однакові, тобто $a = b = c = \ldots = k$, тоді ліва частина буде степінь бінома $(x+a)^m$, а $S_1, S_2, \ldots, S_m$ відповідно дорівнюватимуть ma, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3, \ldots, a^m$.

Таким чином, ми дістаємо:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\times a^3x^{m-3} + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^nx^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Ця формула називається формулою бінома Ньютона. Її можна записати й так:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1ax^{m-1} + C_m^2a^2x^{m-2} +$$
$$+ C_m^3a^3x^{m-3} + \ldots + C_m^na^nx^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Примітка. Формули квадрата суми і куба суми (стор. 161, 162) є окремі випадки цієї загальної формули.

Приклад. $(x+a)^5 = x^5 + C_5^1ax^4 + C_5^2a^2x^3 + C_5^3a^3x^2 + C_5^4a^4x + a^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$.

3. Біномні коефіцієнти та їхні властивості. Коефіцієнтом першого члена розкладу бінома є 1 (або C_m^0), другого — C_m^1, третього — C_m^2 і т. д. Коефіцієнт останнього, $(m+1)$-го, члена дорівнює $C_m^m = 1$. Ці коефіцієнти називаються *біномними*. Загальний член розкладу має вигляд:

$$T_{n+1} = C_m^na^nx^{m-n} = \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}a^nx^{m-n}.$$

З цієї формули можна одержати всі члени (крім першого), підставляючи замість n числа: $1, 2, 3, \ldots, m$.

Біномні коефіцієнти мають такі властивості:

1) Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців розкладу, рівні між собою, тобто

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

2) Для одержання коефіцієнта наступного члена досить помножити коефіцієнт попереднього члена на показник букви x в цьому члені і поділити на число членів, що передують визначуваному, тобто

$$C_m^n = \frac{C_m^{n-1}(m-n+1)}{n}.$$

3) Сума всіх біномних коефіцієнтів дорівнює 2^m, тобто

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^n + \cdots + C_m^{m-1} + 1 = 2^m.$$

4) Сума біномних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях, дорівнює сумі біномних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, тобто

$$1 + C_m^2 + C_m^4 + \cdots = C_m^1 + C_m^3 + C_m^5 + \cdots$$

4. Приклади та задачі на біном Ньютона. Задача 1. У розкладі

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$$

коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього члена, як $7:2$. Знайти той член цього розкладу, який містить x у першому степені.

Розв'язання. Біномний коефіцієнт п'ятого члена дорівнює C_n^4, коефіцієнт третього члена дорівнює C_n^2. Тоді, за умовою,

$$\frac{C_n^4}{C_n^2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n(n-1)} = \frac{7}{2},$$

звідси $n = 9$.

Нехай тепер номер члена, що містить x у першому степені, дорівнює $k+1$. Тоді

$$T_{k+1} = C_9^k\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^k\cdot(\sqrt{x})^{9-k} = C_9^k x^{-\frac{2k}{3}}x^{\frac{9-k}{2}} = C_9^k x^{\frac{27-7k}{6}}.$$

За умовою, показник степеня x повинен дорівнювати 1. Значить, $\frac{27-7k}{6} = 1$, звідси $k = 3$.

Отже, член, що містить x у першому степені, є четвертим членом розкладу і дорівнює $T_4 = C_9^3 x$.

Задача 2. В розкладі $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$ біномний коефіцієнт третього члена на 44 більший від коефіцієнта другого. Знайти вільний член.

Розв'язання. Коефіцієнт третього члена буде C_n^2, а коефіцієнт другого — C_n^1. За умовою, $C_n^2 - C_n^1 = 44$. Розв'язуючи рівняння

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} - n = 44,$$

дістаємо $n = 11$ (від'ємне значення відкидаємо). Знаходимо вільний член:

$$T_{k+1} = C_{11}^k(x\sqrt{x})^{11-k}\left(-\frac{1}{x^4}\right)^k = (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{33-11k}{2}}.$$

Щоб x був у нульовому степені, потрібно, щоб $\frac{33-11k}{2} = 0$, тобто $k = 3$. Отже, вільний член дорівнює $-C_{11}^3 = -165$.

Задача 3. Знайти всі раціональні члени розкладу $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$, не виписуючи члени ірраціональні.

Розв'язання. Напишемо загальний член розкладу даного бінома:

$$T_{n+1} = (-1)^n C_{20}^n(\sqrt[3]{2})^{20-n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = (-1)^n C_{20}^n 2^{\frac{40-5n}{6}}.$$

Раціональними члени будуть тоді, коли $\frac{40-5n}{6} = 5\cdot\frac{8-n}{6}$ буде цілим числом. А це можливо при $n = 2, 8, 14$ і 20.

Шукані члени будуть:

$$T_3 = C_{20}^3\cdot 2^5;\quad T_9 = C_{20}^8;\quad T_{15} = C_{20}^{14}\cdot 2^{-5} = C_{20}^6\cdot 2^{-5};\quad T_{21} = 2^{-10}$$

Задача 4. Дано многочлен

$$x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9.$$

Знайти коефіцієнт члена, що містить x^5, якщо виконати вказані дії.

Розв'язання. У розкладі $x(2-3x)^5$ член, що містить x^5, дорівнює xT_{4+1}, де T_{4+1} — п'ятий член розкладу бінома $(2-3x)^5$:

$$T_{4+1} = (-1)^4 C_5^4(3x)^4\cdot 2 = 810x^4.$$

У розкладі $x^3(1+2x^2)^7$ член, що містить x^5, дорівнює x^3T_{1+1}, де T_{1+1} — другий член розкладу бінома $(1+2x^2)^7$:

$$T_{1+1} = C_7^1(2x^2) = 14x^2.$$

Розклад $x^4(1+2x^3)^9$ не містить x^5.

Отже, коефіцієнт члена (даного многочлена), що містить x^5, дорівнює 824.

Задача 5. Многочлен $x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$ розкласти за спадними степенями $x+1$.

Розв'язання. Замінивши x на $(x+1)-1$, дістанемо

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 1 = [(x+1)-1]^4 - 3[(x+1)-1]^3 + [(x+1)-1]^2 + 1.$$

Якщо тепер розкрити за формулою бінома Ньютона вираз $[(x+1)-1]^k$, де $k = 2, 3, 4$, розглядаючи $x+1$ як один член, то після зведення подібних членів дістанемо

$$(x+1)^4 - 7(x+1)^3 + 16(x+1)^2 - 15(x+1) + 6.$$

З а д а ч а 6. Скільки раціональних членів міститься у розкладі

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}?$$

Розв'язання. Маємо:

$$T_{n+1} = C_{100}^{n} (\sqrt{2})^{100-n} (\sqrt[3]{3})^{n} = C_{100}^{n} 2^{\frac{100-n}{2}} 3^{\frac{n}{3}}.$$

Через те що для раціональності члена показники $\frac{100-n}{2}$ та $\frac{n}{3}$ мають бути цілими числами, то число n має бути кратним 3 і 2, тобто кратним 6. Але $0 \leqslant n \leqslant 100$ і числа n, кратні шести, будуть 0, 6, 12, ..., 96. Підрахуємо число m їх, одержимо: $96 = 0 + 6(m - 1)$, звідки $m = 17$.

5. **Історична довідка про біном Ньютона.** Розклад виразу $(a + b)^n$ для цілих значень n був відомий грекам лише при $n = 2$. Узагальнення для будь-якого цілого n було зроблене середньоазіатськими математиками Омаром Хайямом та ал-Каші. Ал-Каші користувався розкладом бінома для наближеного обчислення кореня будь-якого степеня з цілого числа; з цією метою він склав таблицю біноміних коефіцієнтів.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

Ця таблиця має назву *трикутника Паскаля.* У Західній Європі вона вперше була опублікована в посібниках з арифметики Апіануса в 1527 р. та Штіфеля в 1544 р. У 1556 р. Тарталья також опублікував таблицю біномних коефіцієнтів, причому оголосив її своїм винаходом. У 1631 р. дослідженням таблиці займався Аутред, винахідник логарифмічної лінійки; дещо пізніше, в 1654 р., була опублікована праця Паскаля.

У 1676 р. формулу бінома поширив на від'ємні й дробові показники І. Ньютон, хоча й не дав її доведення. Останнє дав Маклорен для раціональних значень n, Ейлер у 1774 р. — для дробових показників. Нарешті, у 1825 р. норвезький математик Нільс-Генрік Абель (1802—1829) довів формулу бінома для будь-якого комплексного числа n.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

Швецов Константин Иванович
Бевз Григорий Петрович

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Арифметика, алгебра

(на украинском языке)

Редактор *В. І. Гавей*
Художній редактор *В. М. Тепляков*
Оформлення художника *Г. М. Балюна*
Технічний редактор *Д. В. Вірич*
Коректор *В. С. Танцюра*

БФ 01445. Зам. № 6-501. Вид. № 271. Тираж 200 000 (1 — 150 000). Папір № 3, $70 \times 108^1/_{32}$. Друк. фіз. аркушів 12,75 + 1 вкл. Умовн. друк. аркушів 18,0. Обліково-видавн. аркушів 25,0. Підписано до друку 31.III. 1967 р. Ціна 78 коп

Видавництво «Наукова думка», Київ, Рєпіна, 3

Книжкова фабрика ім. Фрунзе Комітету по пресі при Раді Міністрів УРСР, Харків, Донець-Захаржевська, 6/8.