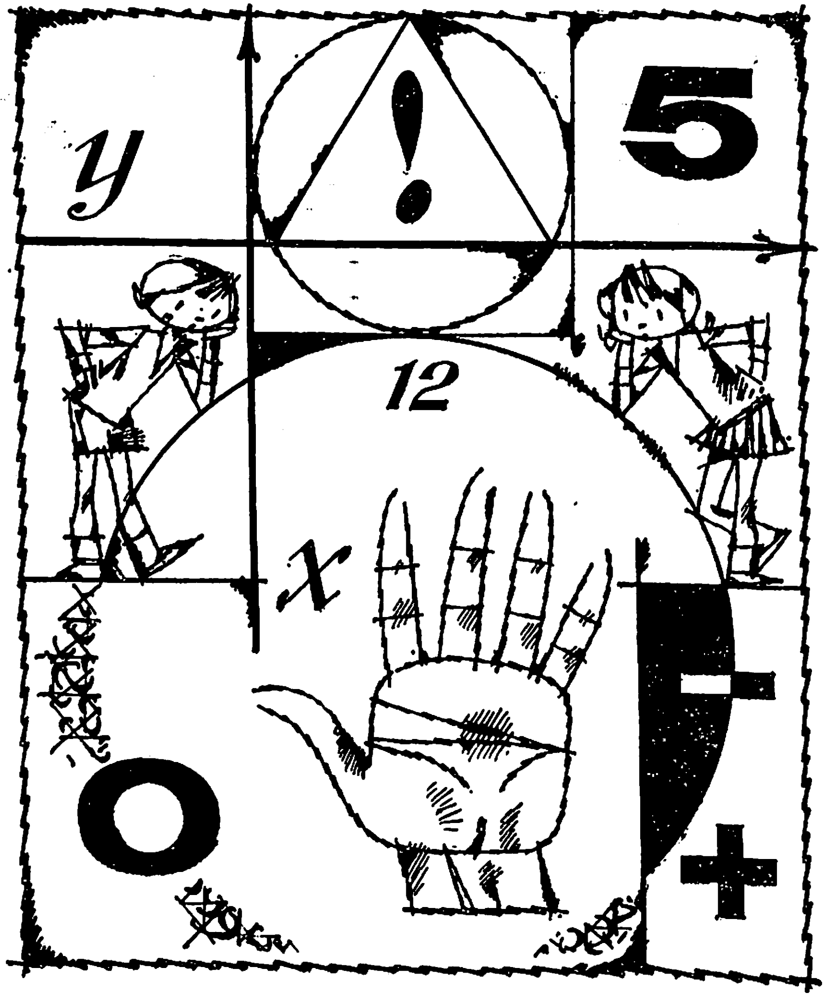
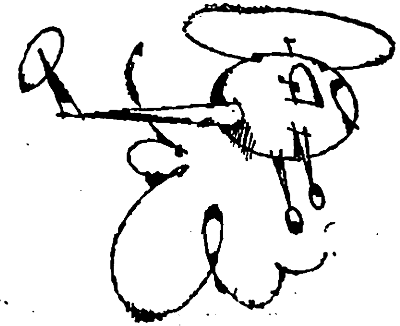




АНДРІЙ КОНФОРОВИЧ
МИКОЛА СОРОКА

ДОРОГАМИ УНІКУРСАЛІЇ

МАТЕМАТИЧНІ
МАНДРІВКИ

Для середнього
шкільного віку

Художник
ЮРІЙ ЖОЛУДЄВ

КИЇВ «ВЕСЕЛКА» 1988

ББК 22.1
К65

З цієї книжки юні читачі дізнаються про деякі розв'язані та нерозв'язані проблеми простих чисел, про діалектичні суперечності теорії нескінченності, про Ейлерові графи, Евклідову координатну площину і про інші цікаві питання науки математики.

Из этой книги юные читатели узнают о некоторых решенных и нерешенных проблемах простых чисел, о диалектических противоречиях теории бесконечности, об Эйлеровых графах, Евклидовой координатной плоскости и о многих других интересных вопросах удивительной науки математики.

Видання третє, доповнене

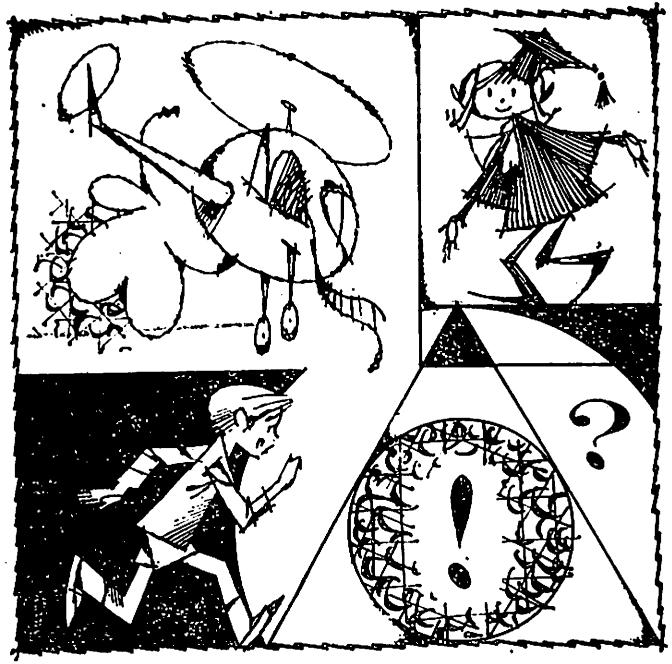
Конфорович А. Г., Сорока М. О.
К65 Дорогами Унікурсалії: Мат. мандрівки: Для серед. шк. віку / Худож. Ю. Ю. Жолудев.— 3-тє вид., доп.— К.: Веселка, 1988.— 312 с.: іл.
ISBN 5-301-00194-9

У книжці педагог-математик і журналіст у формі мандрівок розповідають про деякі проблеми простих чисел, діалектичні протиріччя теорії нескінченності, про Ейлерові графи, Евклідову координатну площину та про інші цікаві питання математичної науки.

ББК 22.1

К $\frac{4802020000—134}{М206(04)—88}$ Б3—5—39.88.

ISBN 5-301-00194-9



НЕСПОДІВАНА ПРОПОЗИЦІЯ

...Матч, здавалося, досяг найвищої напруги, коли у безхмарному небі над стадіоном завис сріблястий вертоліт дивовижної конструкції і одразу привернув до себе увагу глядачів.

Футбольні пристрасті поволі вгамовувались, а сріблястий красень, м'яко погойдуючись, опускався прямо на зелене поле. Великі лопаті гвинта стали обертатися повільніше і невдовзі зупинилися. З кабіни вийшли двоє, з усього видно — пілоти. Вони заходилися ретельно оглядати крилатого велетня.

Потім зійшло ще троє. Перемовляючись між собою, ці попрямували до глядачів.

— Ну, хто переміг?— звернувся один до юрби хлопців, що вийшли їм назустріч.

— Гру припинили,— відповів за своїх друзів-однокашників Віктор.

— Виходить, ми вам на заваді стали?

— Нічого. Гру ми ще побачимо, а таку машину навряд... — обізвався Олег.— Звідки ви, якщо не секрет?..

— Хіба не знаєте: сьогодні у вашій школі створено товариство математичних мандрівок? Ми оце повертаємось з установчого засідання.

— То ви були в нашій школі? На запрошення Івана Федоровича — нашого вчителя математики,— вихопилося у Віктора.

І треба ж: сам не пішов на засідання та ще й інших відговорив. А Іван Федорович он що придумав!

— Ви, мабуть, з області?— поцікавився Олег.

— Ні, з Іксовії.

— Звідки, звідки?— не зрозумів Віктор.

— З Іксовії...

— Щось не чув про таку...

— Бо не любите, певно, математики,— спокійно мовив незнайомець.— А звідки тоді приходять до вас ікси, ігреки, зети, за допомогою яких ви розв'язуєте задачі, і не тільки з математики, а й з фізики, хімії?

— Нізвідки вони не приходять,— буркнув Олег.— Їх придумали люди так само, як рубанок, плуг, цвях...

— Це вас Іван Федорович запросив на засідання товариства?— нарешті встряв у розмову Ігор.

— Атож. Ми там навіть показали дещо з тих часів, коли зачиналась математика.

— Як-то показали?— не повірив Олег.— Можна подумати, що Піфагора в кіно знімали...

— Не знімали. Але в Іксовії легко можна відтворити події ще віддаленішого часу...

— Все це байки,— махнув рукою Віктор.— Самі слова, а докази?

— А ми хіба відмовляємося довести?.. Тільки ж не на стадіоні!

— Тоді — де?

— Звичайно, в Іксовії. Згода?

Ну й пропозиція! Хлопці принишкли.

— Не знаю, як ви,— нарешті мовив Віктор, звертаючись до друзів,— а я згоден. Бо завтра в школі засміють. Скажуть — боялися... А може, ще хтось зі мною?

Бажаючих не було.

— Тільки ж коли ми повернемось назад?— запитав хлопець у прибулих.

— Не загаємось. Нам дозволять, певно, додатковий рейс, чи не правда, Ігреку й Зете?

— Неодмінно дозволять,— закивали головами двоє інших прибулих.— Адже це вперше нам не довіряють...

— То ви й справді — Ікс, Ігрек, Зет?— швидше вигукнув, ніж запитав Віктор.— От здорово!— І з надією подивився на хлопців.— То, може, й ви зі мною? Таке тільки в казці буває...

Олег почервонів.

— А ти що думав?.. Гарні були б ми друзі, якби залишили тебе самого!.. Правда, Ігорю?

— Атож...

Тим часом, поки велася ця розмова, один із пілотів, що порався біля літального апарата, піднявся в машину і запустив двигуни. Другий, той, що стояв унизу, стежив, як набирали швидкості лопаті. За якусь мить вони злилися в прозорий зеленкуватий круг.

— Будь ласка!— запросив Ігрек хлопців у вертоліт.

Непевними кроками вони рушили до крилатої машини. Біля самого трапа Віктор озирнувся й гукнув до гурту хлопців, що махали їм услід:

— Усім привіт! Нехай тепер хто скаже, що ми не любимо математики! І перекажіть про наш політ Іванові Федоровичу.

Затим хлопці швидко піднялися в салон вертольота і зайняли місця. Пілот зачинив двері. Ледве чутно туркотіли двигуни. Потім туркіт подужчав, машина легко гойднулася, і майже одразу хлопці відчули, як їх неначе хтось прикував до сидінь. Віктор виглянув в ілюмінатор: земля ніби падала кудись униз, і все на ній швидко зменшувалось у розмірах. Стадіон нагадував всього-на-всього клаптик зеленого паперу, по краях якого ледве виднілися цятки людей. Потім Віктор облишив ілюмінатор і подивився на Ікса і його товаришів. Вони, не звертаючи уваги на нових пасажирів, займалися своїми справами. Ікс і Ігрек стиха розмовляли, Зет щось занотовував до блокнота. Нарешті він звернувся до Віктора:

— Я тут прикинув, скільки часу може забрати у вас знайомство з Іксовією та сусідніми країнами. Виявляється, це не так мало. Набагато більше, ніж його маєте. Тому оберемо скорочений маршрут.

— Так, то справді вихід,— обізвався Ігрек.— Але, сподіваємося, це не остання наша зустріч, і дещо можна залишити на майбутнє...

— Атож,— подав голос Ікс.— Тільки не плануй такого, де б гості заблудилися навіть з провідником.

— Я це врахував. Ось приблизно такий маршрут, глянь. Він для них буде і доступний, і корисний.

По цих словах Зет передав Іксові свого блокнота. Ігрек теж поцікавився маршрутом:

— Кібертонія, Координатія, Цифроград, відвідини учня Гео Метра, Світу випадковостей... Що ж, маршрут і справді цікавий, чи не так?— усміхнувся Ігрек до хлопців.

І в цей час на стіні салону засвітилося табло: «Посадка!» Хлопці так і прилипли до ілюмінаторів. Назустріч їм виростали квартали якогось міста. Вузенькі смужки вулиць швидко ширшали, і вже було видно, як по них пливли автомашини, а тротуарами неквапно рухались перехожі.

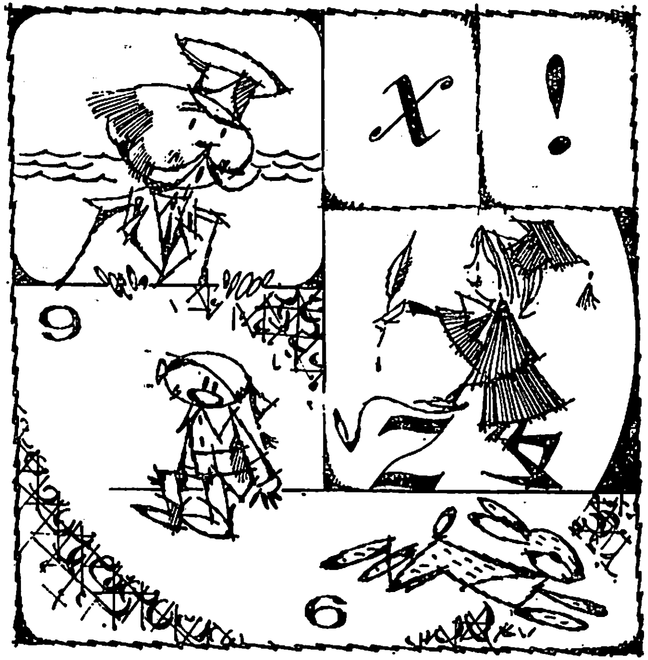
— Напевне, Київ або Харків. А ще видумують — Іксовія!— ніби жалкуючи за втраченою казкою, шепнув Віктор Олегові.

— Побачимо. Сьогодні й так багато несподіванок...

Вертоліт сів на широку площу, яку з усіх боків обступали високі будинки.

— Оце і є наша Іксовія. Тут ми несемо вахту. Зачекайте кілька хвилин у чергового, а ми тим часом владнаємо справу з провідником,— сказав Ікс юним друзям.

Усі вийшли з вертольота і попрямували до одного з будинків.



НА ВАХТІ — ІКСИ

— Черговий сьогодні — чудовий хлопець! Ви одразу ж побачите нашу роботу...— йдучи, весело гомонів Ікс.

Олег штовхнув Віктора ліктем:

— От тобі й Харків...

У кімнаті, куди зайшли друзі, на величезному столі стояло кілька телефонів. А всю стіну займав екран відеотелефону. Худорлявий, жвавий хлопець, який щось записував до журналу, очевидно, і був черговий. Ікс привітався з ним і відрекомендував:

— Знайомтесь: Ікс-перший. Сьогодні він — черговий по Іксовії. А це наші гості — Віктор, Олег, Ігор.

Ікс-перший кожному потис руку, запропонував сісти в зручні м'які крісла. Поцікавився:

— Надовго до нас?

— На жаль, вони мають обмаль часу,— поінформував Ікс.— Ми влаштуємо їм всього кілька мандрівок. Поки що хай тут придивляються, а я тим часом побіжу в бюро екскурсій...

І вийшов з кімнати.

Саме тоді пролунав дзвоник і засвітився екран відеозв'язку. З екрана до чергового звернувся кремезний чоловік у формі моряка.

— Вахта Іксовії?

— Так. Черговий Ікс-перший вас слухає.

— Говорить капітан суховантажного судна «Ураган». Нас захопив шторм, і ми змушені якомога швидше скинути за борт частину вантажу, бо надто велика осадка судна.

— Що ж, відберіть найменш цінне і скидайте.

— Це ми й самі знаємо,— стурбовано говорив капітан.— Нам досить зменшити вантаж на 1500 кг. Цю вагу якраз складають 15 тюків тютюну. Хотілося б саме його й позбутися, але так, щоб ніхто не запідозрив, що ми вчинили це навмисне.

— А ви маєте ще 15 місць якогось вантажу?

— Так. 15 місць шоколаду.

— От і добре. Зажді хвилину-другу — ми поміркуємо...

— Ікси — другий і третій,— кинув Ікс-перший у мікрофон.— У морі може статися катастрофа. Терміново до мене!..

А вже через хвилину Ікс-перший ставив завдання своїм помічникам. Зробивши необхідні записи, Ікси — другий і третій — перейшли до сусідньої кімнати і засіли за розрахунки. Хлопці з інтересом чекали, що можна придумати. Вони вже й самі міркували, але задача для них була надто складна. Тільки Ікс-перший був спокійний.

— Не хвилюйтеся. Все буде гаразд. Це все одно, що з відра води напитись! А хіба були такі халепи?!

Аж ось Ікси — другий і третій — забігли до чергового і подали йому план врятування «Урагану». Вони пропонували розставити ящики й тюки по колу, а капітан нехай наказує скидати за борт кожен тринадцятий предмет.

— Ось у чому річ,— сказав Ікс-другий,— ящики й тюки можна розмістити так, що за бортом опиниться весь тютюн. І судно буде врятовано, й іксовці поласують шоколадом.

Ікс-перший одразу ж дав радіограму на судно і детально розповів, як і що треба робити.

Капітан щиро подякував, але попросив у чергового з'ясувати ще одне питання.

— Тепер «Ураган» іде з швидкістю 20 км за годину,— сказав він.— А 10 хвилин тому від судна пішов спеціальний катер, який має розвідати метеорологічну обстановку по курсу «Урагану» на 100 км. Швидкість катера 100 км за годину. Чи не могли б ви сказати: через який час нам чекати повернення катера з інформацією?

Ікс-перший сам підрахував і сказав результат підрахунку капітанові.

— Цікава у вас робота!— висловив своє захоплення Олег.

— Кожна робота по-своєму цікава. Варто лише її полюбити...

Не забарився й ще один дзвоник. Телефонували з пристані. З екрана відеотелефону на чергового схвильовано дивилися люди, що зібралися там зустрічати дизель-електрохід, який повертався з комплексної експедиції. Капітан передав, що судно попало в шторм і, рухаючись зі швидкістю 20 км за годину, запізнюється на цілу годину. Та коли вдасться збільшити швидкість до 30 км за годину, то воно прибуде навіть на 40 хвилин раніше, ніж передбачено розкладом. Зустрічаючі хвилюються і хочуть знати: як далеко знаходиться судно, на якому пливуть їхні рідні й знайомі?

На цей раз взявся за роботу Ікс-другий, і невдовзі на пристані одержали радіограму, яка складалася лише з одного слова: сто.

Там усе зрозуміли.

Не встигли Ікси — перший і другий — вислухати подяку, як надійшло нове замовлення. Дзвонили з казки, де жили сорок гномів і Білосніжка. Гноми просили вибачити, що дзвонять по звичайному телефону,— відео в них ще тільки встановлюють,— а справа невідкладна. У цьому досі дружному товаристві вперше виникла суперечка. Почалося з того, що 16 гномів, працюючи по 7 годин щоденно, побудували за певну кількість днів для Білосніжки терем. Тоді четверо з них стали нахвалятися, що за стільки ж днів вони вчотирьох можуть звести такий самий терем. Але ж гноми не вчили математики і не знають, по скільки годин на добу їм доведеться працювати. Вони приступлять до роботи негайно, тільки-но взнають, скільки має тривати робочий день.

На цей раз за роботу взявся Ікс-третій, і за мить в казку вже телефонували: двадцять вісім...

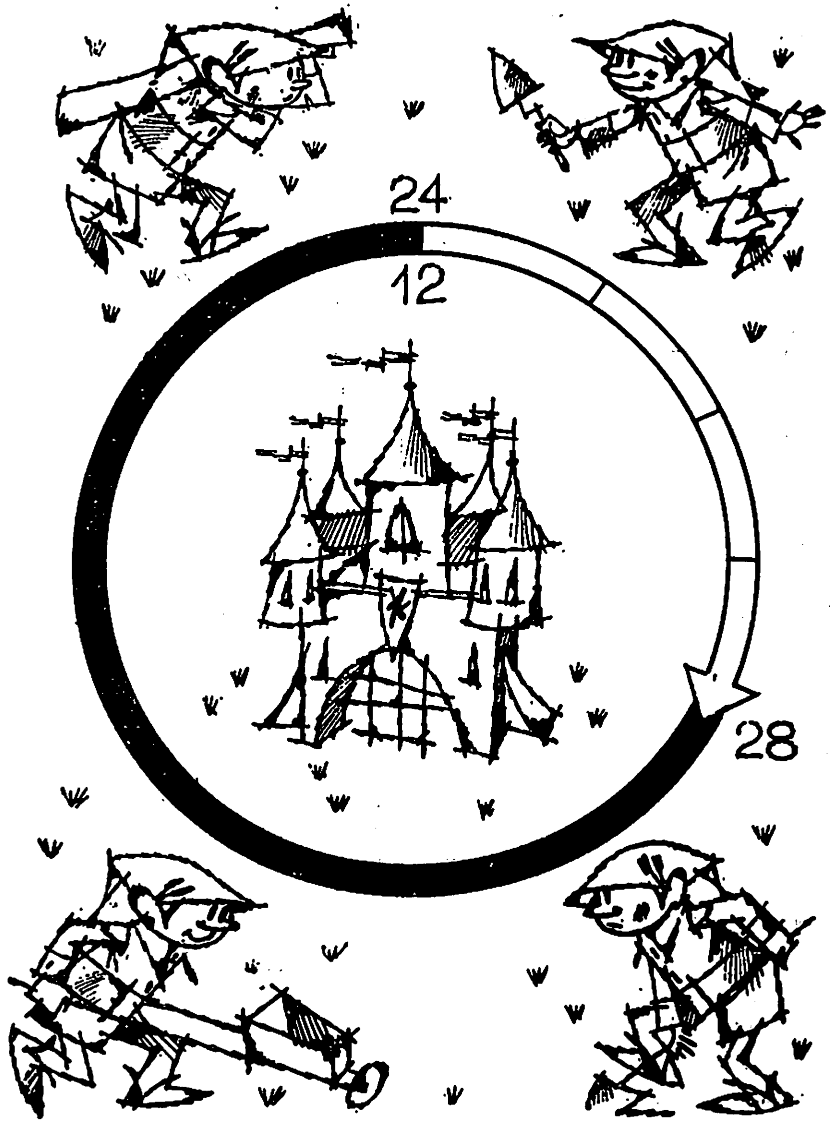
У кімнаті чергового запала тиша. Та ненадовго: знову подзвонили з казки. Замість подяки, чотири гноми звинувачували іксовців, що ті неуважно поставились до них. Гноми не згодні з підрахунками: бо як же можна працювати 28 годин на добу?

Ікс-перший аж розхвилювався. Він сам заходився підраховувати і одержав таку ж саму відповідь.

— Ікс-третій розв'язав вашу задачу правильно,— казав він сердито гномам.— Знайдене число є коренем рівняння, до якого зводиться ваша задача. А от сама задача розв'язку не має. Бо чотири гноми не розрахували своїх сил, і хоч би скільки годин на добу вони працювали, їм не вдасться побудувати терем за той же час, що його звели 16 гномів при семигодинному робочому дні.

Ікси вправно пов'язують дані і шукані величини. Але їм байдуже до того, яке число буде розв'язком рівняння. Обчислений корінь потребує контролю. Бо розв'язок може бути дробовим числом, скажімо, людей, автомашин, літаків, які практично не можуть бути поділені на частини. Рівняння, якщо воно розв'язане правильно, всі такі числа задовольнятимуть, задачу ж — ні. За це не варто докоряти Іксам. Вони виконують тільки те, що їм належить.

Хвалькуваті гноми на цьому не заспокоїлися. Тепер вони просили сказати, на скільки гномів треба збільшити четвірку, щоб, працюючи по 10 годин на добу, вони за той самий



час могли збудувати терем. Ікс-перший глянув на рівняння і вдруге засмутив гномів.

Від отакої шарпанини Ікс-перший так стомився, що вже збирався відпочити. Але ж телефон дзвонив і дзвонив. Хтось постукав у двері.

Виявилося, це прийшли численні замовники, щоб скласти подяку трудівникам Іксовії і бодай побіжно ознайомитись із її історією. Прибулих гостинно запросили до музею Іксовії. А з ними подалися туди й наші хлопці. Оскільки Ікс не повернувся з екскурсійного бюро, то Ікс-перший вирішив сам провести екскурсію, лишивши на вахті Ікса-другого.

Музей містився в сусідньому будинку. Тут Ікс-перший розповів цікаву історію.

— Один учений згадував,— почав він,— як, навчаючись у першому класі, почув від старшокласників про алгебру і запитав у свого дядька, що вона вивчає. «Алгебра,— пояснили йому,— це весела і мудра наука. Якщо ми хочемо впіймати звіра, на якого полюємо, то називаємо його іксом, поки не впіймаємо».

В алгебрі іксом позначають не тільки звірів, а й числа, машини, дерева, швидкість і взагалі все, що ми хочемо взнати з математичної задачі. Математики називають невідоме не тільки іксом, а й ігреком, зетом або ще якимось символом. Від цього розв'язання задачі не зміниться. Буває, що сам ікс не може впоратись, тоді йому допомагають ігрек, зет, інші вірні друзі.

У математиці ікс — давній роботяга. Вчені різних країн його називали по-різному. Та завжди він був слухняним і надійним помічником при розв'язуванні задач.

Були в ікса і попередники. Десь ще за 3000 років до нашої ери стародавні вавілоняни залишили на глиняних плитках цілі збірники задач і математичні таблиці. Шукану величину вони називали довжиною. Коли ж їх було дві — то довжиною і шириною, а добуток їхній — площею. Але слова «довжина», «ширина» і «площа» вони записували мовою, яка на той час була вже нерозмовною. Слова тієї мертвої мови набули у древніх вавілонян значення символів, на зразок наших *x, y, z*.

Понад 1800 років до нашої ери єгипетський писар Ахмес переписав збірник задач, який було складено ще до нього. В збірнику вміщено задачі на «хау» або «аху», тобто — на обчислення «купи». Шукані предмети ніби звалені в купу, і хтозна-скільки їх там. Але умова задачі містить такі залежності між «купою» і якимись її частинами, що можна визначити, скільки в цій «купі» чого. Наприклад,— продовжував Ікс-перший,— задача 33:

Купа, її $\frac{1}{2}$, її $\frac{1}{4}$, її $\frac{2}{3}$, її ціле,— становлять 37.

І хоча за часів Ахмеса не вміли складати рівнянь, ми вже бачимо ікса. Щоправда, він тільки народжується і в Ахмеса ще не «працює», але в нього велике майбутнє. Багато задач, які Ахмес вважав складними, ми розв'язали б, бавлячись. Скажімо, кому сьогодні не під силу така задача: 10 мір ячменю треба розділити між десятьма чоловіками так, щоб різниця між попередньою і кожною наступною пайкою становила $\frac{1}{7}$ міри. За скільки хвилин ти розділив би ячмінь так, як пропонував Ахмес? — звернувся Ікс-перший до Віктора.

— Та, мабуть, хвилин за десять...

— Молодець! Ахмес поставив би тобі п'ятірку... Переказують,— розповідав далі Ікс-перший,— що Піфагор теж любив відповідати на запитання так, що без нас, іксів, важко було б його зрозуміти. Одного разу Піфагора запитали, скільки учнів відвідує його школу і слухає його бесіди. Він відповів: половина вивчає математику, четверта частина — музику, сьома — взагалі мовчить, крім того, є ще три жінки.

— Ото здивував! Такі задачі сьогодні розв'язують в третьому класі,— не втримався Олег.

— То це ж сьогодні. А Піфагор жив у шостому столітті до нашої ери. І тоді його відповідь була не така вже й проста.

А ще Ікс-перший розповів таке.

В I столітті нашої ери в єгипетському місті Александрії жив і працював математик, механік і фізик Герон. Це він запровадив окремий символ для невідомого числа. Правда, в Герона цей предок іксів робив лише перші кроки. Його навіть записували з деякими доповненнями, залежно від того, в якому числі і відмінку стоїть саме число: зверху приписували одну або дві букви відмінкових закінчень.

А вже десь через півтора століття — у Діофанта, який жив у тій же Александрії,— символ для невідомої змінної вже «працював» при розв'язуванні складних задач. Навіть напис на надгробку цього видатного математика був зроблений у формі задачі, розв'язавши яку за допомогою тієї ж невідомої змінної, можна визначити, скільки прожив він років.

Прах Діофанта гробниця ховає, вдивися — і камінь
Мудрим мистецтвом розкриває покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина,
А ще половину шостої — стрів із пушком на щоках.

Тільки минула сьома, з коханою він одружився,
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та півжиття свого тішився батько лиш сином:
Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина.
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний...

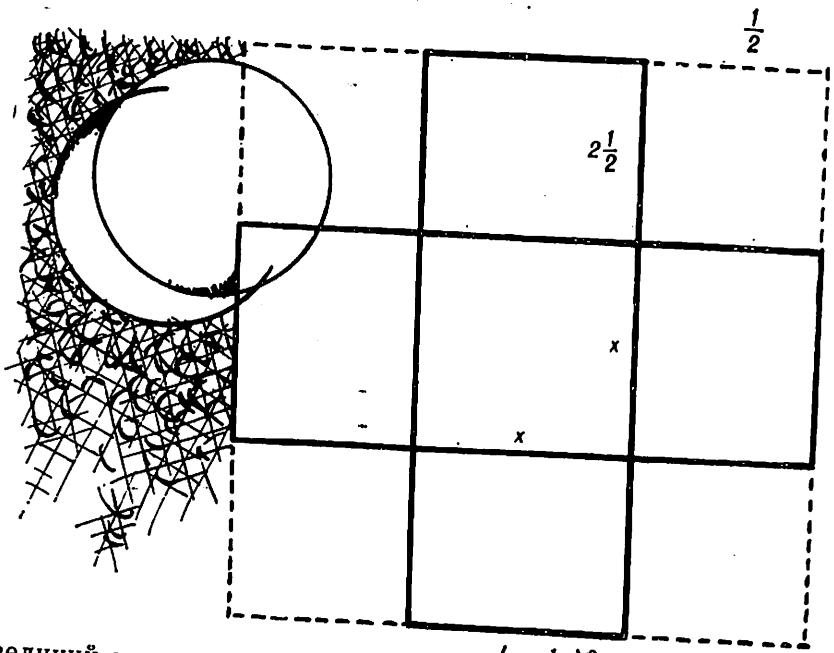
Індійські вчені називали невідому величину «стільки-скільки», а якщо їх було кілька — то позначали різними кольорами: чорна, біла, червона і позначали першими складами відповідних слів.

До нас ікс прийшов від арабів. Невідоме вони позначали словом «шей», тобто «ніщо», «щось». Потім замість слова писали його першу літеру «ш». Це позначення в арабів запозичили іспанці, тільки замість «ш» вони писали «х», а називали «ш». Від іспанців цей знак потрапив до французів. І тут нарешті «х» став називатись «іксом». А потім і до нас потрапили ці надзвичайно корисні символ і назва.

Бувало, що вчені, шукаючи невідому, охочіше вдавалися до геометрії, ніж до іксів. Так робили, наприклад, стародавні греки і багато середньоазіатських математиків. В них невідома x зображалася прямою лінією, x^2 — квадратом, $5x$ — як площа прямокутника із сторонами 5 і x.

Ось як видатний середньоазіатський математик ал-Хорезмі ще в IX ст. розв'язував рівняння $x^2+10x=39$ за допомогою графічного методу.

Він будував квадрат, сторона якого дорівнювала шуканому числу x. На сторонах квадрата будував чотири прямокутники з висотою $2\frac{1}{2}$, а в кутах фігури додавав ще чотири квадрати зі стороною $2\frac{1}{2}$. Одержаний при цьому



великий квадрат мав площу $39 + 4\left(2\frac{1}{2}\right)^2 = 64$. А сторона його, тобто $x + 2 \cdot 2\frac{1}{2} = 8$. Отже, $x = 3$.

Все ж на перших порах іксам доводилося працювати за складних умов. Алгебра ще довго була більше словесною, ніж символічною. Французького математика Франсуа Вієта (1540—1603) вважають «батьком алгебри», бо в його працях алгебра стала загальною наукою про алгебраїчні рівняння, яка грунтується на символічних позначеннях, хоча його символіка була ще надто недосконалою.

— А тепер перейдемо до наступного залу,— запросив Ікс-перший.

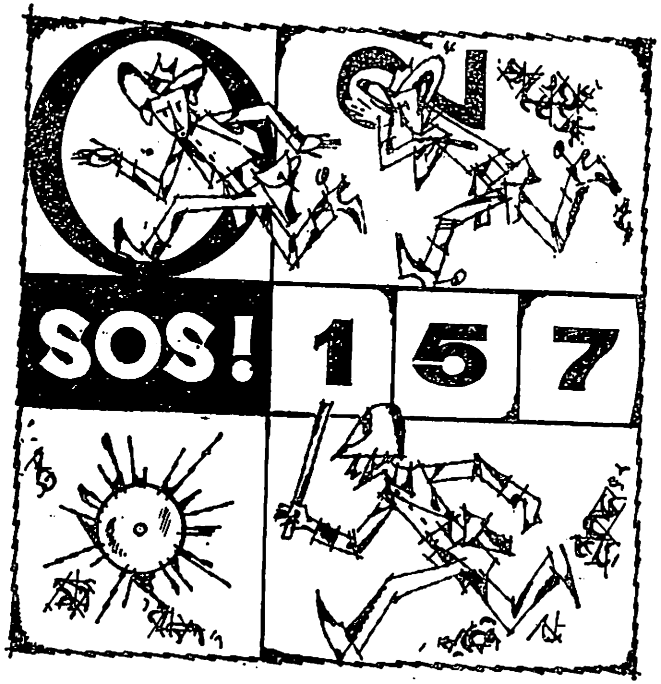
Та несподівано до музею зателефонував Ікс-третій і попросив Ікса-першого негайно повернутися.

— Пробачте, друзі. Певне, сталося щось. Доведеться припинити нашу екскурсію.

І пішов до виходу. Всі попрямували за ним.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Як порадили Ікси — другий і третій — розставити ящики шоколаду і тюки тютюну, щоб, скидаючи за борт кожен тринадцятий тюк або ящик, врятувати шоколад?
2. Через який час повернеться до «Урагану» катер-розвідник?
3. Як Ікс-другий обчислив відстань від пристані до дизель-електрохода?
4. Чому Ікс-перший засмутив хвалькуватих гномів?
5. Як розділити 10 мір зерна між десятьма чоловіками в задачі Ахмеса?
6. Скільки років жив Діофант?



НЕВИДИМКИ В ЦИФРОГРАДІ

Іксовія жила одними клопотами. А тут ще неприємності в Цифrограді. Справа виявилась такою важливою, що цифроградці не довірили її телефону, а спорядили до Іксовії делегацію своїх найшановніших представників — Одиницю, П'ятірку і Сімку. Вони й розповіли про дивні події, які почали непокоїти мешканців Цифрограда.

— Через неуважність охоронців в одну з брам,— розповідала Одиниця,— в Цифроград пробралися розбійники. Інакше їх не назвеш. До того ж вони напевне невидимки, бо ніхто досі їх не бачив.

У Цифрограді почали зникати окремі цифри й утворені ними числа. І то просто на вулиці, при народі. Таке лихо спіткало якось і Двійку. Її, правда, недолюблюють учні. Але ж Двійка — це не тільки погана оцінка в щоденнику. Кожен з нас має двоє очей, дві руки, дві діагоналі — чотирикутник, два катети — прямокутний трикутник, два дільники — кожне просте число... А скільки ще можна назвати множин, які мають два елементи! І тепер чисельність їх доводиться записувати як $1+1$, $3-1$ або більш незручним способом. А як записати, коли злетів у космос Юрій Гагарін? Коли вперше відзначали День космонавтики і багато інших пам'ятних дат? Одне слово, без Двійки ніяк не обійтися. А щоб не зникла П'ятірка і не доводилося псувати щоденників відмінникам, їй запропонували персональний вертоліт. Та біда може підстерегти її будь-якої миті. Що тоді робити?

— Почастішали в Цифрограді й інші оказії,— продовжувала розповідати Сімка.— Якось Трійка розходилася так, що стала кричати, ніби вона більша від П'ятірки і навіть Дев'ятки. З нею таке коїлося, що П'ятірка і Дев'ятка удвох не могли їй ради дати, аж поки не підійшли три Шестірки. Тільки тоді, як замкнули її в кімнаті, вона заспокоїлась.

Ще більшого клопоту завдала Дев'ятка. Лише бригада з тридцяти Трійок на чолі з Одиницею вгамувала її.

Кілька перебоїв сталося і в роботі обчислювального центру. З невідомих причин із від'ємниками раптом робилося таке, що дія віднімання ніяк не клеїлася, ніби від'ємники були більші за зменшувані. А під час ділення числа 425 на 25 сталася справжня катастрофа. Частка неймовірно зростала, аж поки не перегоріли запобіжники. Майстри досі не можуть налагодити машину.

— Тож просимо допомогти...— закінчили хором цифроградці.

Ікс-перший і Ігрек-перший, який також був тут, вислухавши представників Цифрограда, швидко зрозуміли: задача надто складна і розв'язати її так собі не можна. Були змінні. Але скільки? І як їх пов'язати з подіями, що непокоїли цифроградців? Рівняння не виходило. А тому довелося викликати спеціалістів з особливо важливих доручень — Ікса-нульового та Ігрека-нульового.

Одиниця знову почала переповідати те, що тільки-но розповіла.

— Досить! — зупинив її Ікс-нульовий на півслові.— Здається, зрозуміло все.

— Ти склав рівняння, навіть не дослухавши до кінця?..— здивувався Ікс-перший.

— Ні, тут рівнянням не зарадиш. Не всі задачі розв'язуються за допомогою рівнянь. Та й змінних тут дуже багато. Невидимок, котрі пробралися в Цифроград, не злічити... До того ж вони вміють добре маскуватися, і їх не завжди можна відрізнити від самих цифроградців.

— Хто ж вони — злі і непрошені зайди? — хвилювалася П'ятірка. Їй і в Iксовії було страшно від однієї думки, що невидимки вештаються серед цифроградців.

— Вони не злі,— заспокоював цифроградців Ігрек-нульовий.— Якраз навпаки. Навіть дивно, що ви без них досі обходились. А неприємності пішли з того, що ви нехтуєте правилами поводження з цими, як ви кажете, зайдами.

— Розкрийте ж нарешті таємницю: хто прибув у Цифроград?..— попросили делегати.

— Здається, присутні тут погано знають географію. Зовсім поряд з Цифроградом знаходиться арифметична область — Нуліадія. Там мешкають дуже цікаві, надзвичайно діловиті, але водночас і небезпечні поселяни. Вони й пробралися в Цифроград. Я пізнаю їх по вчинках.

— Навіщо ці загадки? — розсердилася Одиниця.— Географія географією... Але, щоб не знати своїх сусідів, проглядіти цілу область, даруйте!

— Може, й не одну,— вів далі Ігрек-нульовий.— Але сьогодні вас доведеться познайомити й примирити з Нулями.

— Мирити? З ким?..— похопилася П'ятірка.— Таких чисел немає і не може бути. Латинською мовою «nullus» означає — «ніякий», тобто ніяка значуща цифра. То як це ви збираєтесь мирити нас ні з чим. Чи не зухвальство це, чи не образа?

— Та ми вас не ображаємо. Лише дивуємось: як досі цифроградці обходилися без Нулів,— вставив Ікс-нульовий.

— Не тільки обходилися, а й жили красненько...— захищалися цифроградці.

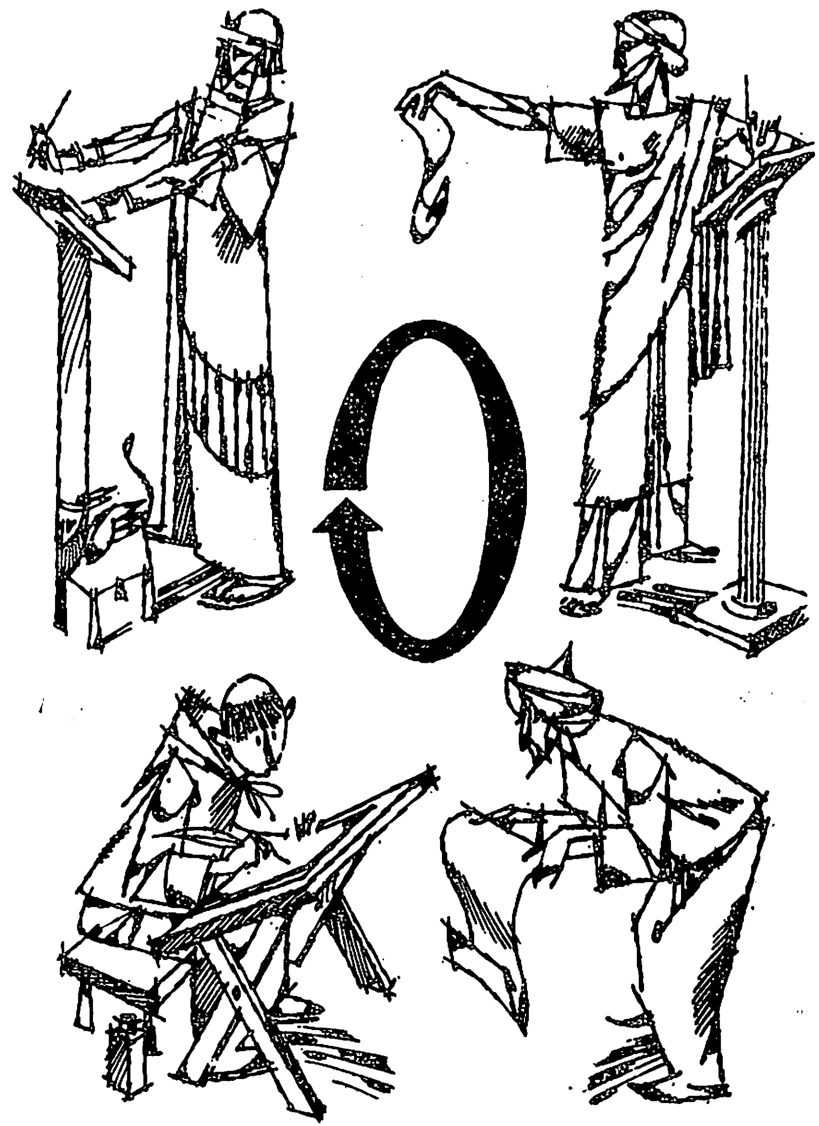
— Обчислити різницю 37—37 не вміли, і це красненьке життя? Виходить, може, її не було зовсім, а чи різниця двох чисел не є число? То що ж тоді — ложка, лопата?

— У нас таких задач не траплялось,— виправдовувалась Сімка.

— Життя красне у вас почнеться тільки тепер — у союзі з Нулями. Адже математика вчить: не забувайте про Нулі. І хоч Нулі знають, що самі по собі вони ніщо, але в тім їхня й сила. І, може, саме тому вони завітали до вас. До того ж мешканці Нуліадії набагато давніші від вас, цифроградців,— говорив спокійно Ігрек-нульовий.— Першими вдалися до Нулів математики стародавнього Вавілону. Якщо в якомусь «серединному» розряді числа не було одиниць, то вавілоняни просто лишали вільним місце цього розряду. Наприклад, запис 7 3 означав сім сотень і три прості одиниці. А десь у VIII ст. до н. е. замість пропуску почали ставити спеціальний знак. Форма його не одразу встановилася. Найчастіше його позначали спеціальним знаком. У VII ст. індійські математики вже систематично застосовували Нуль, позначаючи його крапкою або кружечком. Вони називали Нуль «сунья», тобто «пусте», вказуючи цим на відсутність одиниць у розряді числа. Араби ж узяли індійське «сунья» і переклали на свою мову «ал сіфр», «пустота». Тому до XVII ст. Нуль (і тільки його) називали «цифрою»...

— А якщо вони, оті Нулі, такі древні і всім потрібні, то чому чинять не по-сусідськи. Раді, що можуть бути невидимками? — перебила Ігрека-нульового П'ятірка.

— Винні не тільки Нулі,— виступив на захист винуватців цифроградського неспокою Ікс-нульовий.— Така вже їхня природа, що вони вимагають до себе особливої уваги. З давніх-давен вони завдавали математикам клопотів. У 1299 році, наприклад, власті Флоренції навіть видали указ, який забороняв використовувати індійські цифри — писати їх в стовпчики. І все через Нуль. Бо з Нуля,



мовляв, легко можна зробити 6 або 9. Навіть у XV ст. математики писали: «Цей знак завдає чи не найбільше ускладнень і плутанини». Особливо важко було тоді збагнути, чому Нуль, дописаний в кінці числа, збільшував це число у десять разів.

Нарешті, Ікс-нульовий пояснив причини неладу, який порушив мирне життя в Цифрограді:

— Ви зовсім не стежили за знаками дій, і тому деякі з них мандрували собі без діла за числами. Власне, з цього все й почалося. При додаванні і відніманні Нулі невловимі, вони справжні невидимки. Бо $a+0=a-0=a$ для будь-якого числа a, і $0+0=0-0$. Скільки їх не додавай, скільки не віднімай — вони не виявлять себе. Але коли Нуль наблизиться до якогось числа і між ними опиниться знак множення, тоді оцей невидимка вмить знищить число — перетворить його в Нуль. Бо для довільного числа $a: 0 \cdot a=a \cdot 0=0$. Якщо ж Нуль прилаштується до крайньої цифри у числі праворуч і між ними не буде ніякого знаку, він стане частиною цього числа і збільшить його в десять разів. Так сталося з Трійкою і Дев'яткою. Тому вони й відчули себе такими великими. Є в Нуля ще одна особливість. Коли про неї забути — чекай катастрофи. Якщо Нуль зверху над якимось числом, наприклад, $\frac{0}{2798}$ — результат дорівнюватиме Нулю, навіть коли це число велике-велике. Коли ж він унизу — це вже математична катастрофа, бо на Нуль не можна ділити. Обчислювальний центр у Цифрограді через те й вийшов з ладу, що один з Нулів наблизився до дільника 25 саме тоді, коли між ними тинявся знак множення. Так Нуль, не бажаючи чинити зла, перетворив

дільник 25 у нуль і тим самим вивів з ладу Обчислювальний центр.

Цифроградці вже не перебивали Ікса-нульового. Затамувавши подих, вони уважно слухали його розповідь. А коли Ікс-нульовий закінчив, його й Ігрека-нульового запросили в Цифроград, щоб ті допомогли цифроградцям налагодити з Нулями дружні стосунки і усунути непорозуміння, що виникли між ними.

У Цифрограді разом з іксовцями побували й Віктор з Олегом та Ігорем. Вони були свідками, як іксовці знайомили цифроградських горожан із «зайдами» з Нуліадії, а тепер фактично мешканцями їхнього міста.

Одначе й після докладного знайомства траплялося, що дехто забував правила поводження з Нулями і, ясна річ, опинявся в смішному становищі.

Був у цифроградців і свій Незнайко. Так от він розв'язував рівняння $5x-25+20=4x$ в такий спосіб: $5x-25=4x-20$; $5 \cdot (x-5)=4 \cdot (x-5)$. Поділивши почленно обидві частини рівняння на $x-5$, він одержав $5=4$. А оскільки $4=2 \cdot 2$, то він вважав, ніби довів, що $2 \cdot 2=5$.

Його товариш Верхоглядько (і такий тут був!) задавався, що зробив відкриття, довівши, нібито половина дорівнює цілому. Він навіть розповів іксовцям, як це в нього вийшло. Відомо, що $(a^2-b^2)=(a-b) \cdot (a+b)$ для будь-яких чисел. Поклавши $a=b$, матимемо: $(a^2-a^2)=(a-a) \cdot (a+a)$; $a \cdot (a-a)=(a+a) \cdot (a-a)$. Оскільки добутки в лівій і правій частині рівні і мають по одному однаковому співмножнику, то повинні бути рівні й інші співмножники: $a=a+a$, або $a=2a$, звідки $a=\frac{a}{2}$.

Іксовці сказали, що і Верхоглядько припускається помилки.

А той, хоча швидко й визнав її, одразу став наполягати, що $5=7$. І ось чому. Нехай b будь-яке число і $a=1{,}5b$. Тоді $10a=15b$ і $14a=21b$. Звідки $14a-10a=21b-15b$, або $15b-10a=21b-14a$. Отже, $5(3b-2a)=7(3b-2a)$. Скоротивши на $3b-2a$, одержимо $5=7$.

Та іксовці і цього разу розчарували зазнайкуватого Верхоглядька.

Згодом Нулі так осміліли, що деякі стали навіть претендувати на провідне місце серед інших чисел. Один заявив, що сума будь-яких двох натуральних чисел дорівнює нулю; інший — що будь-яке натуральне число є нулем, а ще інший,— що він більший за будь-яке число.

Іксовцям на якийсь час довелося затриматися в Цифрограді і терпляче вислухати отих хвалькуватих Нулів.

— Я не Верхоглядько і не Незнайко,— мовив перший з них.— Я можу постояти за себе. Сподіваюся, ви знаєте математику хоча б за шостий клас? — звернувся він до іксовців.

Ікс-нульовий знизав плечима: от, мовляв який нахаба!

— Тоді я говоритиму з вами, як з фахівцями,— поспішив Нуль, мабуть, збагнувши, що його запитання було недоречним.— Нехай $a \in N$ і $b \in N$ і $a+b=c$ і $c \in N$. Помножимо рівність $c=a+b$ на $a+b$. Одержимо $c(a+b)=(a+b)^2$, $ac+bc=a^2+2ab+b^2$, $a^2+2ab+b^2-ac-bc=0$.

$$(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)=0$$

$$a(a+b-c)+b(a+b-c)=0$$

Поділивши вираз на $a+b-c$, одержимо: $a+b=0$...

— Вас було приємно слухати. Але тепер треба поважати не тільки своїх колег, а й правила арифметичних дій,— зауважив Ікс-нульовий.

— Що ви хочете цим сказати?

— А те, що обидві ці речі ви забуваєте...

Ігрек-нульовий запитав у другого хвалька, що той хотів сказати.

Але другий хвалько виявився обачливіший і сказав, що має ще поміркувати над своїм доведенням.

Відмовився виступати й третій Нуль...

Впоравшись із цифроградськими клопотами, іксовці вже збиралися додому, та тут їм зателефонували з Іксовії і попросили затриматися в Цифрограді. Комусь із сусідів цифроградців була потрібна допомога. А щоб вони не їхали за тридев'ять земель, їх і послали до Ікса і Ігрека — нульових — у Цифроград.

Тож іксовці і юні друзі мали трохи вільного часу, і вдячні господарі запропонували їм прогулянку по Цифрограду.

Екскурсоводом назвалась Одиниця. Від природи вона добра і, як годиться найстаршій серед цифроградців за віком, наймудріша. Скільки радісних і сумних подій з історії Цифрограда берегла її пам'ять! Їй є про що розповісти навіть іксовцям, яких, здається, уже нічим не здивуєш.

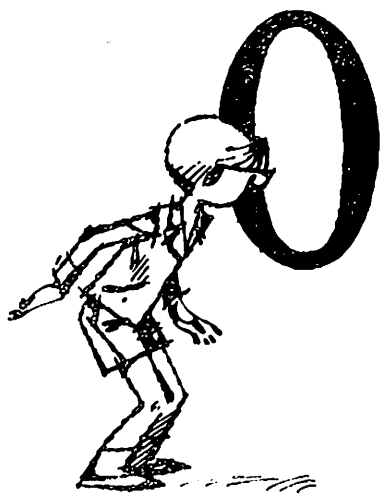
— Як і у вашій Іксовії, у нас теж є музей,— щебетала Одиниця.— В ньому показані найголовніші етапи історії нашого міста. Я пропоную вам почати екскурсію з музею. Запевняю, то буде вельми цікаво... Не тільки іксовцям, а й учням, які зважилися на таку незвичайну мандрівку.

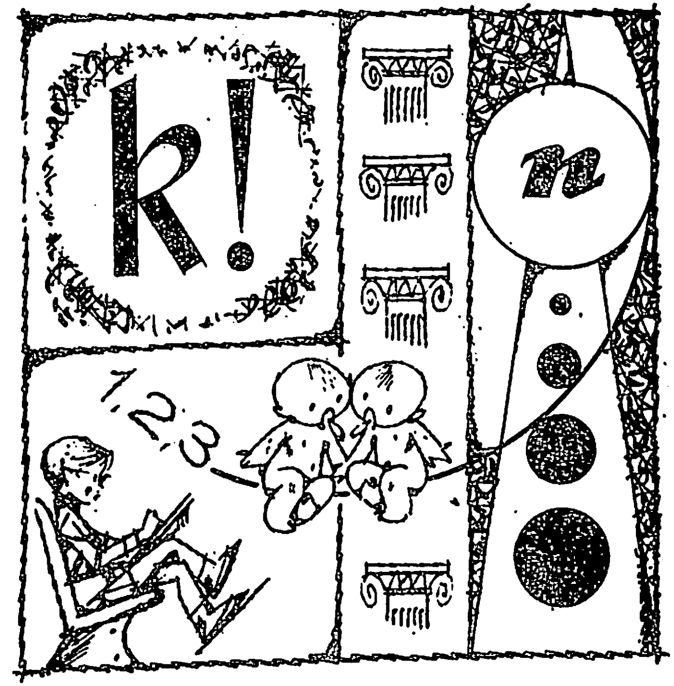
ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Де помилявся Незнайко, коли доводив, що $2 \cdot 2 = 5$?

2. Де помилявся Верхоглядько, коли доводив, що половина дорівнює цілому? Де він робив помилку, коли доводив, що $5 = 7$?

3. Де помилявся Нуль, коли доводив, що для будь-яких $a \in N$ і $b \in N$, $a + b = 0$?





НЕПРОСТІ СПРАВИ ПРОСТИХ ЦИФРОГРАДЦІВ

Фасад Центрального музею Цифрограда виходив на площу Евкліда. Високі квадратні колони надавали йому суворої урочистості. Сама ж споруда тяглася аж геп за обрій.

— Ого який!..— захоплено мовив Ігор.— Скільки-то часу треба, щоб весь обійти?

— І життя не вистачить,— відповіла Одиниця.— Практично дійти до кінця нікому й ніколи не вдасться.

А тому вона запропонувала оглянути лише відділ простих чисел. І тут не проминула розповісти про себе:

— Ви знаєте, що всі натуральні числа, ясна річ, крім мене, мають принаймні два дільники. Проте є числа, які мають їх більше двох, наприклад: 4, 6, 8, 10, 12, 14 і т. д. Такі числа називають складеними. Ті ж, які задовольняються двома дільниками, названо простими. З деякими ви вже знайомі. Це — 2, 3, 5, 7... Отже, залежно від кількості дільників цифроградці вже давно поділились на три множини. До першої належать прості, до другої — складені, в третій — лише я. Третя множина, як бачите, небагата цифроградцями. Вона одинична. Тому в ній і спокійно. А в тих двох завжди якісь негаразди кояться. І так уже понад два тисячоліття.

При вході до музею Одиниця подякувала адміністраторові за готовність виділити кваліфікованого екскурсовода, бо вирішила сама знайомити гостей з минулим свого міста.

— Чи не забули, як називається площа, що до неї прилягає музей?— звернулася вона до екскурсантів.

— Як же, Евклідова,— відповів за всіх Віктор.

— Евклід, цей давньогрецький математик, що на початку 3 ст. до н. е. жив і працював у Александрії, заслужив такої шани. Він дуже багато зробив для цифроградців. Та головне — він довів, що множина простих цифроградців нескінченна.

— Мабуть, зробити це було важко?

— Може. Але зрозуміти його легко.

Нескінченність множини простих чисел Евклід доводив методом від супротивного. Припустимо, що множина

їх скінченна. Тоді існує найбільше просте число p. Перемножимо всі прості числа — від найменшого (числа 2) до найбільшого (числа p) — і одержаний добуток збільшимо на мене, тобто одиницю:

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\ldots p+1=M \qquad (1)$$

Очевидно, M більше за мене, що мене, звичайно, не ображає. Але тоді M — або просте, або складене. Якщо M просте, то M більше не тільки за мене, а й за число p. Якщо ж M складене, то воно має принаймні одного простого дільника. Попереджаю — це твердження можна довести, але в нас немає на те часу...

Оскільки простого числа, меншого від 2, немає, то цей дільник буде, безперечно, тільки більшим від числа p.

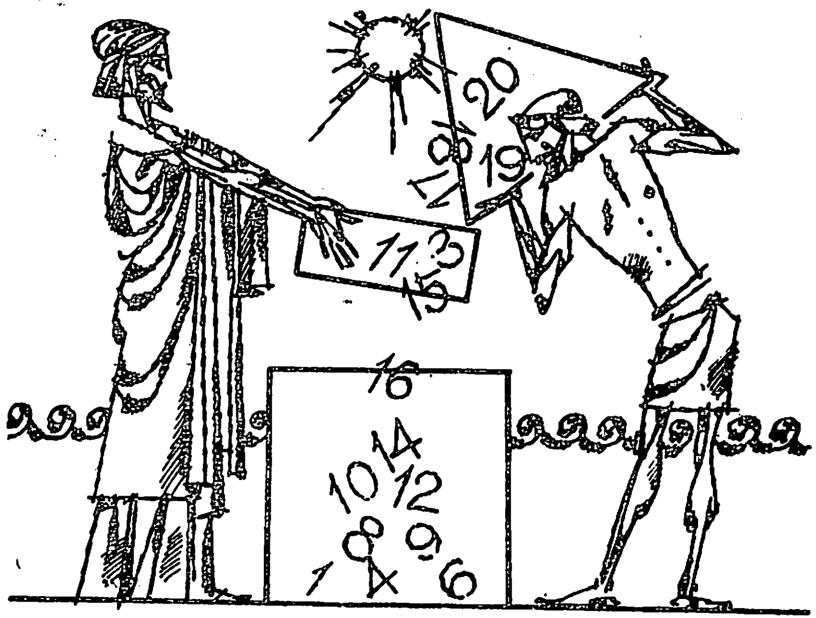
Припустивши, що існує найбільше просте число, ми прийшли до суперечності. А це говорить про те, що наше (точніше, Евклідове) припущення є неправильним, звідки — висновок: множина їх, простих чисел, нескінченна.

Оцей стенд унаочнює доведення теореми Евкліда:

$$\begin{array}{rr}
2+1= & 3 \\
2\cdot3+1= & 7 \\
2\cdot3\cdot5+1= & 31 \\
2\cdot3\cdot5\cdot7+1= & 211 \\
2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1= & 2311
\end{array}\Bigg\}\ \text{Прості числа}$$

$$\begin{array}{rr}
2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1= & 59\cdot509 \\
2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17+1= & 19\cdot97\cdot277
\end{array}\Big\}\ \text{Складені числа}$$

У двох останніх рядах ми дістали складені числа, але кожне з них має прості дільники, які більші від найбільшого простого числа, що фігурує у відповідному добутку простих чисел в лівій частині ($59>13$, $19>17$).



— Виходить, числа можна просіювати, як борошно?! — вигукнув Віктор, розглядаючи величезну картину.

На полотні було зображено, як чоловік, в одязі стародавнього грека, просіював за допомогою великого решета натуральні числа. На землі лежали 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12... В решеті ж залишилися лише прості числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

— Як бачите, художник своєрідно унаочнив роботу молодшого сучасника Евкліда — Ератосфена Кіренського (бл. 276—194 рр. до н. е.). Цей давньогрецький учений, друг Архімеда, перший знайшов дуже простий і зручний

спосіб складання таблиць простих чисел, менших від якогось числа n. Ось як він це зробив, у випадку $n=50$:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Ератосфен виписав усі натуральні числа в межах, які його цікавили. Оскільки я,— розповідала Одиниця,— є число не просте і не складене, він мене закреслив. Число 2, як просте, він, навпаки, підкреслив. Усі парні числа, більші від 2, будуть складеними. Тому, рахуючи від числа 2, парні числа таблиці (4, 6, 8, 10... 50) всі закреслено. Наступним простим числом буде 3. Його Ератосфен підкреслив, а рахуючи від 3 через два, закреслив кожне третє, бо всі вони (6, 9, 12, 15... 48) будуть складеними.

Ви, певне, здогадалися, що, закреслюючи числа, кратні 3, Ератосфен натрапляв на вже закреслені числа 6, 12, 18, 24 і т. д. Але ж це не заважало його роботі. Просто ці числа були кратні не тільки числу 3, а й числу 2, і він їх закреслив, коли, так би мовити, висіював парні числа.

Наступне просте число — 5. Його підкреслено, а всі числа, кратні 5 (як складені), закреслено. Підкреслені числа і утворюють таблицю простих чисел, менших від числа 50:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Одиниця також повідала, що свої таблиці простих чисел Ератосфен виписував на папірусі і складені числа не закреслював, а на тому місці робив лише прокол. Утворювалось щось на зразок решета, з якого ніби й висіювалися складені числа, а в самому решеті, тобто на папірусі, залишалися прості числа.

Звичайно, тепер таблиці простих чисел складають за допомогою електронних обчислювальних машин — ЕОМ. Але коли треба скласти невелику таблицю простих чисел, а під рукою нема довідника, то в пригоді може стати і подароване нам понад два тисячоліття тому решето Ератосфена.

— Коли ми будемо на проспекті, пробачте, на промені Цифрограда,— говорила далі Одиниця,— зверніть увагу на деякі його особливості. Найбільшого простого числа ви не побачите, і в цьому нас переконав Евклід. Разом з тим, вчені виявили, що у віддалених районах Цифрограда існують як завгодно довгі числові проміжки, де нема жодного простого числа. Справді, яким би великим не було $k \in N$, в N можна знайти k послідовних натуральних чисел, які будуть складеними. Для доведення нам потрібен буде лише один символ, з яким, можливо, ще не всі знайомі:

$$k!$$

Читається «k факторіал» і означає скорочений запис добутку всіх послідовних натуральних чисел від 1 до k. Наприклад: $2!=1\cdot2$; $3!=1\cdot2\cdot3$; $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)\cdot n$.

Нехай $(k+1)!=M$. Очевидно, що M ділиться без остачі на 2. (Скорочено це записують так: $M\,\vdots\,2$). Зрозуміло, що $M\,\vdots\,3$; $M\,\vdots\,4$, ..., $M\,\vdots\,(k+1)$. Тепер зверніть увагу на числовий проміжок $M+2$, $M+3$, $M+4\ldots M+k$, $M+k+1$. Мені не треба вас переконувати, що всі ці k послідовних натуральних чисел є складеними. А оскільки на саме число k ми не накладали ніяких умов, то цей ряд може бути як завгодно довгим.

— Прошу вибачити, але тут щось не так,— не згодився Ігор.— Якщо можна утворити як завгодно довгий ряд із складених натуральних чисел, то тоді за ним не буде простого числа, бо коли б воно було, то утворений ряд не був би як завгодно довгим.

— О, в такому разі доведеться ближче познайомитись із Нескінченністю. Відразу ж скажу: це не Нуль. Ця персона своїми витівками і не таких заводила в безвихідь. Може, колись ще познайомитесь з нею, а поки що...

Всі помітили, що Одиниця чимось стурбована.

— Ігорю, ти віриш Евклідові?— несподівано запитала вона.

— Його доведення бездоганне, йому не можна не вірити.

— Ти віриш, що існують як завгодно довгі числові проміжки, утворені лише із складених чисел?

— Так.

— От і добре. Що ж до висновку, який ви зробили з цих двох теорем,— іншим разом. Він заслуговує на увагу. В натуральному ряді існують і ближче досить довгі числові проміжки, утворені з послідовних складених чисел. Наприклад, між 1327 і 1361, а також між 8467 і 8501 лежать по 34 складених чисел, а між 370 261 і 370 373 — 112 послідовних складених чисел. За простим числом 610 030 968 987 49 ми побачимо 682 послідовних, всі вони складені. Але, шановні гості, на нас чекають прості числа. На жаль, за браком часу, не можу познайомити вас із їхніми родичами: квазіпростими, майже простими та зовсім простими числами.

— Тут не тільки прості числа, а й експонати демографічного музею!— мовив Віктор, підійшовши до великого стенда під назвою «Близнята».

— Та ні, йдеться тут не про людей. «Близнята» є і серед простих чисел,— уточнила Одиниця.— Але придивіться до таблиці перших простих чисел:

2, 3, 5, 7, 11 13, 17, 19, 23,
29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97...

2 і 3 серед них є унікальною парою. Це єдина пара послідовних натуральних чисел, кожне з яких є простим. Між іншим, 2 — єдине парне число, яке є простим. Усі інші — непарні. Хоч зрозуміло й те, що не всі непарні числа є простими. Та існують пари послідовних непарних чисел, кожне з яких є простим: 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 17 і 19, 29 і 31. Вони й називаються простими числами-близнятами. Бо ніби народжуються в натуральному ряді відразу одне за одним. Перші дві пари близнюків (3, 5) і (5, 7) так само унікальні. Вони єдині, що мають спільний елемент — число 5. Далі такого не доведеться бачити. Хоча спостерігатимемо багато інших пар. До 100 000 їх 1224 пари, до 1 000 000 — 8164, а до 30 000 000 — 152 892. Найбільшу відому тепер пару простих чисел-близнюків складають велетні, кожен з яких записується 303 цифрами.

Все ж і до сьогодні лишається таємницею: скінченна чи нескінченна множина пар цих чисел? Одначе не спішіть доводити цю теорему. За неї бралися сотні людей — від любителів математики до видатних учених. І всі зазнали невдачі. Спершу розберіться, наскільки вона складна і чи досить у вас сил. А тепер усі в ракетоплан. Подивимось, який Цифроград, так би мовити, в натурі.

Ракетоплан, схожий на велетенську стрілу, очевидно, був розрахований на величезні швидкості. Хлопці з повагою розглядали його металеву обшивку, вкриту окалиною. Видно, вона витримувала температуру не в одну тисячу градусів! Просторий салон для пасажирів нагадував лекційну аудиторію. Тут були телевізори, кіноустановка, інші технічні засоби, необхідні для проведення лекцій.

— Друзі, машина справді незвичайна, але час вирушати,— звернулась до хлопців Одиниця.— Мушу сказати: спеціально для нашого польоту Цифроград дещо переобладнали. Тож уявіть нескінченну шерегу опор лінії електропередачі, пронумерованих послідовно 1, 2, 3, 4, 5 ... n, $(n+1)$... На опорах, номери яких є простими числами, підвішено потужні електролампи, оскільки на час подорожі замовлено темну і як завгодно довгу ніч. Ракетоплан стартує від опори № 1 в напрямку опор № 2, № 3... як тільки стане темно. Згори лампи нагадуватимуть манюсіньких світлячків. Але придивіться, як вони виринатимуть назустріч нам з нічної пітьми.

Хто не переживав бентежних хвилин перед дорогою? І турист, і космонавт — всі дещо хвилюються. Хвилювалися і наші друзі.

За широкими ілюмінаторами повільно, як в театрі світло, згасав день. Водночас салон ракетоплана заповнювало м'яке зеленкувате світло. Його випромінювали стіни.

— Зверніть увагу, ми біля опори з № 1,— сказала Одиниця.— Лампа над нею не світиться. Тепер рушаємо!..

За ілюмінаторами пропливли опори № 2 і № 3. Над кожною з них горіли світлячки електроламп.

Потім вогники над опорами з'являлися то частіше, то рідше. Але час від часу ракетоплан проносився над опорами, на яких лампи світилися через одну.

Одиниця побачила, що пасажири освоїлися з новою обстановкою, і вела далі свою розповідь:

— Коли підраховувати кількість простих чисел у кожній сотні послідовних натуральних чисел, то зменшення їх кількості при переході від однієї сотні до наступної ще не має якоїсь закономірності...

При цьому Одиниця натиснула кнопку, і на екранах телевізорів з'явилася числова таблиця:

Числові проміжки	Кількість простих чисел
1—100	25
101— 200	21
201— 300	16
301— 400	16
401— 500	17
501— 600	14
601— 700	16
701— 800	14
801— 900	15
901—1000	14
1001—1100	16
1101—1200	12
1201—1300	13
1301—1400	11
1401—1500	17
1501—1600	12
1601—1700	15
1701—1800	12
1801—1900	12
1901—2000	13

— Коли ж подивитися, як насичені простими числами кожен з десяти перших мільйонів,— вела Одиниця,— то тут у кожному наступному мільйоні простих чисел завжди менше, ніж у попередньому. Ось переконайтесь...

На екранах з'явилася нова таблиця:

Числові проміжки	Кількість простих чисел
Перший мільйон	78 498
другий мільйон	70 435
третій мільйон	67 883
четвертий мільйон	66 330
п'ятий мільйон	65 367
шостий мільйон	64 336
сьомий мільйон	63 799
восьмий мільйон	63 129
дев'ятий мільйон	62 712
десятий мільйон	62 090

— Тут дія закону великих проміжків уже очевидна. Але даремно ви шукатимете закон розміщення або слідування простих чисел у натуральному ряді. І не тому, що в математиці ви початківці. Над пошуками цього закону билися кращі математики понад два тисячоліття, та без успіху. Вчені найчастіше шукали таку функцію від натурального аргументу x, яка б при значеннях $x=0$, 1, 2, 3... набувала значень послідовних простих чисел. На сьогодні доведено, що не існує многочлена $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+$ $+...a_{m-1}x+a_m$, де a_0, a_1, ..., a_{m-1}, a_m — цілі числа, який для кожного натурального значення x давав би просте число. Хоча вчені й відкрили многочлени, які для багатьох послідовних натуральних значень змінної x набувають значень простих чисел. Так, славетний математик Леонард Ейлер (1707—1783) відкрив тричлен x^2+x+41. При $x=0$, 1, 2... 39 він дає різні прості числа, але вже при $x=41$ одержимо: $41^2+41+41=41(41+1+1)=41\cdot43$ число складене. Тричлен $x^2-79x+1601$ також дає прості, хоча й не всі різні при $x=0$, 1, 2, 3... 79.

Радянський математик Ю. В. Матіясевич, розв'язуючи одну математичну проблему, одержав результат, який справив величезне враження на математиків. З'ясувалося, що все-таки можна знайти цілочисельний многочлен, хоча й досить високого степеня і великого числа змінних, але такий, що при всіх цілих значеннях змінних, при яких він додатний, дає тільки прості числа і до того ж усі прості числа.

А взагалі,— продовжувала Одиниця,— прості числа найнедисциплінованіша частина натурального ряду. Їх важко звести до якихось законів, і несподіванок тут вистачає. Ось ми пролітаємо над рядом із 17 послідовних простих чисел. Найменше з них 3 430 751 869, найбільше 4 827 507 229. Усі 17 утворюють арифметичну прогресію із знаменником теж не маленьким — 87 297 210. Чи трапиться ще такої довжини арифметична прогресія, всі члени якої були б послідовними простими числами — ніхто не відає. Хоча знаємо: все може трапитися. Вони такі...

Юні друзі пильно вдивлялися в ілюмінатори і теж бачили, що лампи то проносилися одна за одною, то раптом зникали. І все це без жодного натяку на якийсь порядок чергування. Всі відчули, що ракетоплан набирає дедалі більшої швидкості, але лампи з'являлися рідше й рідше. Закон великих проміжків давав про себе знати.

Одиниця глянула на лічильник, потім у якийсь довідник і звернулася до пасажирів:

— Увага, друзі! Вам надається можливість побачити рідкісне видовище. Незабаром ми пролетимо над опорами № 1000000000149341 і № 1000000000149343. Це — одна з великих пар простих чисел-близнюків. Найбільшу пару ми не станемо демонструвати, бо утворилася б шеренга із 606 цифроградців.

Хлопці й справді побачили, як назустріч ракетоплану з пітьми вихопилися майже один біля одного два світлячки. Ще мить, і вони згасли в океані темряви.

— Правда, жаль розлучатися з цією симпатичною парою?— запитала Одиниця.

— Авжеж,— відповів Віктор.— Бентежить і те, що ніхто не може сказати, чи є за найбільшою сьогодні відомою парою ще хоч одна пара простих чисел-близнят? Чи їх нескінченна множина?

— Так. Вчені не знають навіть, як підійти до розгадки цієї таємниці,— з сумом мовила Одиниця.

А тим часом все рідше й рідше проносилися вогники. Все довше доводилося чекати вісника наступного простого числа. Мовчання, яке запанувало в салоні, знову порушила Одиниця.

— Зверніть увагу ще на одну річ. Скоро ми прослідуємо над числом $2^{61}-1$, тобто 2 305 843 009 213 693 951. Так от, за простими числами полювало багато людей. І кожен хотів довести «простоту» якогось великого числа. В 1883 році Іван Михейович Первушин, сільський піп, який полюбляв більше математику, аніж церковні справи свої, довів, що цей числовий велетень є простим числом.

— А чому Первушин доводив простоту числа саме виду 2^p-1, а не якогось іншого?— запитав Олег.

— Річ у тім, що з числами цього виду пов'язані інші числа — зі Знаком якості...

— Хіба і числам присвоюють такий знак?

— Бачте, у нескінченному ряді натуральних чисел увагу математиків здавна привертали числа, сума дільників яких (виключаючи саме число) дорівнює тому ж самому числу. Наприклад, 6 ділиться на 1, 2, 3, і $1+2+3=6$; 28 ділиться на 1, 2, 4, 7, 14, і $1+2+4+7+14=28$. За цю властивість математики назвали такі числа досконалими. Два перші досконалі числа були відомі ще в глибоку давнину. Наступні два — 496 і 8128 — відшукав Евклід. Він же дав ключ до пошуку всіх парних досконалих чисел, довівши теорему: якщо числа p і 2^p-1 прості, то число $2^{p-1}(2^p-1)$ буде досконалим. Тільки в XV столітті знайшли п'яте досконале число — 33 550 336. Дев'яте в 1883 році обчислив І. М. Первушин: $2^{60}\cdot(2^{61}-1)=2\,658\,455\,991\,569\,831\,744\,654\,692\,615\,953\,842\,176$. Ясна річ, спершу йому довелося довести простоту числа $2^{61}-1$. Уже з 13-го досконалого числа їх відшукують за допомогою ЕОМ, бо дванадцяте — $2^{126}(2^{127}-1)$ — має у запису сімдесят сім цифр!.. Недаремне математик і філософ Микола Геразький, який жив в І ст. до н. е., писав: «Досконалі числа красиві, але відомо, що красиві речі рідкісні, потворні ж зустрічаються часто...» Через трудність знаходження й таємничу незбагненність досконалих чисел у давнину їх вважали божественними. Так церковники в епоху середньовіччя повчали, що вивчення досконалих чисел веде до врятування душі і тому, хто знайде нове таке число, гарантувалося вічне блаженство. Світ прекрасний, повчали вони, бо, як розповідає біблійна легенда, він створений за 6 днів (6 — число досконале!), а рід людський — недосконалий, бо пішов (згідно з тією ж легендою) від 8 людей, що врятувалися у Ноєвому ковчезі від всесвітнього потоку. Та облишмо релігійні баєчки. Погляньте на той вогник! До 1971 року це було найбільше із відомих простих чисел: $2^{19937}-1$. Аби знайти його, ЕОМ працювала 40 хвилин! І не дивно. Адже, коли написати таке число, вийде ланцюг цифр довжиною 114 метрів! Цьому цифроградцеві відповідає досконале — $2^{19936}(2^{19937}-1)$. Три роки витратили два молоді американські математики, щоб дістатися до наступного простого числа виду 2^p-1.

— Скільки ж ми добиратимемось до нього?— запитав розпачливо Олег.

— Не турбуйтеся, ракетоплан доставить нас до ще більших велетнів. Ось цього обчислили в 1978 році, і ЕОМ довелося попрацювати вже 440 годин! Придивіться до нього: 25-те досконале число заслуговує на те — воно дорівнює — $2^{21700}(2^{21701}-1)$. За ним ідуть досконалі числа: $2^{23\,208}(2^{23\,209}-1)$, $2^{44\,496}(2^{44\,497}-1)$ і $2^{86\,242}(2^{86\,243}-1)$. Нарешті — відкрите в 1985 році 30-те досконале — 2^{216090}

($2^{216091}-1$). Але тепер ЕОМ працюють з такою швидкістю, що воно недовго зберігатиме титул чемпіона.

— Оце й усе, що ми знаємо про досконалі числа?

— Туман навколо них дещо розсіюється. В 1980 році радянський математик В. Ю. Кряучюкас побудував многочлен 17-го степеня від 48 змінних, множина додатних значень якого, при натуральних значеннях змінних, є точно множиною всіх досконалих чисел.

— Тоді можна сказати і скільки їх?

— Ні, не можна. Ви звернули увагу, що всі відомі досконалі числа є парними? Можливо, є й непарні досконалі? Пошуки таких нагадують полювання на привидів: ніхто їх не бачив, але проведено багато хитромудрих досліджень, якими вони не можуть бути. Доведено також, що коли непарні досконалі числа й існують, то мають бути більшими 10^{100}. Навіть сучасним супер-ЕОМ нелегко підступитися до таких гуліверів.

Ракетоплан долав свій шлях у повній темряві. Внизу не видно було жодного вогника. Це означало, що по курсу знову простягнулася довга шерега складених чисел. Одиниця вирішила сказати кілька слів і про цих своїх співгромадян:

— Не думайте, що тепер під нами якесь одноманітне числове місиво. Кожне число чимось цікаве. Треба лише вміти бачити особливості цифроградців незалежно від того, прості вони чи складені. Так, з-поміж складених ми пролетіли і над парами дружніх, або співдружніх чисел. Це числа, кожне з яких взаємно дорівнює сумі дільників іншого, виключаючи з дільників саме число. Наприклад, дружніми будуть 220 і 284, бо сума дільників числа 220: $1+2+4+$

$+5+10+11+20+22+44+55+110=284$, а сума дільників 284: $1+2+4+71+142=220$. Їх відкрили ще в школі Піфагора. (Піфагор, грецький математик, жив близько 580—500 рр. до н. е.). Але тоді вчені знали лише чотири пари таких чисел. На сьогодні вчені відшукали 3445 пар. Нові дуже великі пари співдружніх чисел обчислили в 1985 році. Пошук продовжується, хоча ми все ще мало знаємо про такі пари, зрештою, не відаємо, скінченна чи нескінченна їх множина. Більше того, усі відкриті пари співдружніх чисел однакової парності. І невідомо, чи існує хоч би одна пара співдружніх чисел, з яких одне парне, а друге непарне. Щоправда, доведено: коли m і n складають таку пару, то кожне з них має бути більшим 10^{23}, а число $m \cdot n$ повинно мати більше 20 простих дільників. Як бачите, математики часто знайомляться із своїми об'єктами заочно. А взагалі, повірте, тут є над чим поміркувати тим, хто любить мати справу з числами. Бо саме числолюбці шукали й часто знаходили цікаві властивості моїх співгромадян. Софія Жермен (1776—1831) довела, що кожне число виду n^4+4 ($n \in N$, $n>1$) є складеним. Великим числолюбцем був і індійський математик Срініваза Рамануджан (1887—1920). Кожен цифроградець був його особистим другом — так він любив і знав нас... Розповідають, що якось Рамануджана запитали: чи не завдає ученому прикрощів номер його машини — 1729. «Ні,— відповів він,— 1729 — дуже цікаве число. Це найменше число, яке можна подати у вигляді суми двох кубів двома різними способами: $1729=10^3+9^3$ і $1729=12^3+1^3$».

Екскурсанти дружно засміялися з такої дотепності відомого математика.

— Ми й самі не здогадувалися, скільки цікавих властивостей мають числа! — вела далі Одиниця.— Ну хто б міг подумати, що кожне непарне число, природно, крім мене, є різницею двох квадратів! Або: сума довільного числа послідовних непарних чисел, починаючи від мене, є точним квадратом? Та не шукайте серед цифроградців хоч би два точні квадрати, які були б послідовними числами. Доведено: таких немає. Зате, якщо до добутку чотирьох послідовних натуральних чисел додати ще й мене,— ви завжди одержите точний квадрат. Як бачите, ми, цифроградці, пов'язані між собою безліччю невидимих ниточок. І кожна така ниточка — то якась залежність, власне, якась формула, теорема...

— Ось як вони постають перед математиками. Їх легко сформулювати, але важко довести. Придивіться, скажімо, до простих чисел 2, 5 і 257. $2=1^1+1$; $5=2^2+1$; $257=4^4+1$. Чи є ще хоч би одне просте число такого виду: n^n+1? Вчені довели, що коли є, то записується більше, ніж 300 000 цифр. Але серед простих чисел можливі й рідкісніші чудасії. Натрапити на них допоможуть числа 2 і 17. Це цікава пара: $2=1^{1^1}+1$, $17=2^{2^2}+1$. Тепер ви самі можете сформулювати проблему. Хто перший?

— Вона,— мовив Ігор,— очевидна: чи є ще хоч би одне просте число виду $n^{n^n}+1$?

— Правильно!

— Ця проблема теж завдала клопотів ученим?

— Ще й яких. Доведено: коли такий третій простий унікум і є, то записується більш ніж мільярдом мільярдів цифр. Уявляєте такого велетня?..

Ракетоплан летів у суцільній темряві, хоча тепер усі

розуміли, який неспокійний, загадковий світ лежав по курсу їхньої мандрівки.

— Так ми можемо летіти мільйони, навіть мільярди років і не побачимо жодної освітленої опори,— сказала Одиниця.— Але хоч би як довго довелося летіти над складеними числами, ми ще побачимо світло простих цифроградців.

Ракетоплан мчав у режимі автоматичного польоту, і Одиниця продовжувала розповідати друзям історію простих чисел.

— ...Багато зусиль доклали вчені, щоб знайти формулу, за допомогою якої можна було б обчислювати кількість простих чисел у проміжку від 1 до *n*. Але такого «лічильника» теж не вдалося знайти. Було знайдено лише наближені формули. І найкраще розв'язав цю задачу геніальний російський математик Пафнутій Львович Чебишов (1821—1894)...

На екрані з'явився портрет вченого, а під ним — його знаменита формула.

— Цілком природно,— пояснила Одиниця,— ця формула для вас як-не-як є складною. Одначе хочу звернути увагу на одну властивість її. Формула дає дещо більше простих чисел, які не перевищують *n*, ніж їх є насправді. Але чим більший числовий проміжок ми братимемо, тим точніші будуть результати. Тобто точність формули зростає із зростанням *n*. Подібні формули називаються асимптотичними. Вже в наш час учені довели, що в натуральному ряді є таке натуральне число n_0, що при $n>n_0$ формула Чебишова даватиме не більше чисел, ніж їх є насправді, а менше. Обчислено, зокрема, що

$$n_0 \approx 10^{10^{10^{34}}}$$

Цей числовий гігант називається числом Скьюза і записується одиницею з $10^{10000000000000000000000000000000000}$ нулями. Навіть нам не долетіти до нього: не вистачить часу.

А тепер кілька слів про внесок вітчизняних учених у теорію простих чисел...

Член Петербурзької Академії наук, геніальний учений Леонард Ейлер (1707—1783) був першим математиком, який багато уваги присвятив теорії чисел. Його праці заклали міцний фундамент загальної теорії чисел, започаткували нові напрямки цієї науки.

Різним питанням теорії простих чисел присвятив свої мемуари Пафнутій Львович Чебишов. Так, у праці «Про прості числа» він майстерно довів правильність твердження французького математика Бертрана про те, що між n і $2n$ (n — ціле число, більше одиниці) завжди знайдеться просте число. Там же наводиться і славнозвісний асимптотичний закон розподілу простих чисел.

Вже в наші дні світового визнання набули праці в галузі теорії простих чисел радянського академіка Івана Матвійовича Виноградова. Ще в 1742 році в листі до Ейлера член Петербурзької Академії наук Християн Гольдбах висловив припущення, що будь-яке ціле число $n \geqslant 6$ можна подати у вигляді суми трьох простих чисел. Справедливість гіпотези Гольдбаха було перевірено для багатьох чисел, але довести її в загальному вигляді нікому не вдавалося. Навіть у 1922 році вчені вважали, що сучасна математика не тільки не знає методів, за допомогою яких

можна було б довести це твердження, а й не скоро їх відкриє. У 1937 році І. М. Виноградов майже розв'язав проблему. Він довів, що серед натуральних чисел існує таке число c, що кожне непарне натуральне, яке перевищує c, є сумою трьох простих чисел. Чому — майже розв'язав?.. Річ у тім, що саме число c надзвичайно велике. Коли б його записати на смужці паперу, то нею можна було б обгорнути земну кулю по екватору 100 мільйонів разів...

— Та, мабуть, досить несподіванок і таємниць із життя простих чисел. Летимо назад,— закінчила Одиниця.

Ніч на замовлення подорожуючих нараз відійшла, і за ілюмінаторами довгою стрічкою понеслися числові гіганти. В очах вони зливалися в суцільний каскад цифр. Тепер можна було бачити, що числа пішли все менші і менші. Нарешті ракетоплан завис над опорою № 1.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

Доведіть:

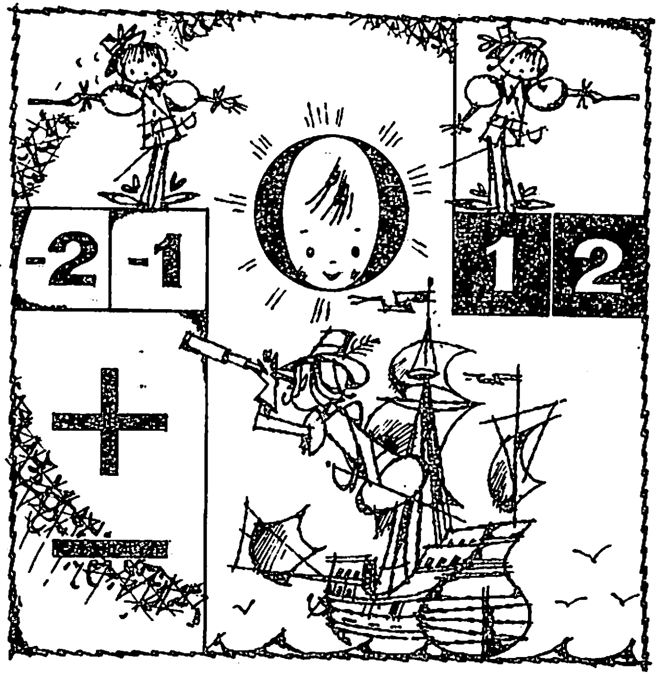
1) теорему Софії Жермен про те, що числа виду $n^4 + 4$ ($n \in N$, $n > 1$) є складеними;

2) що кожне непарне число n ($n > 1$) є різницею двох квадратів;

3) що сума довільної кількості послідовних непарних чисел є точним квадратом;

4) що не існує точних квадратів, які були б послідовними натуральними числами;

5) що коли добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на одиницю, в результаті одержимо точний квадрат.



ПО ТОЙ БІК НУЛІАДІЇ

Іксовців уже чекали нові клієнти. Забачивши Ікса та Ігрека — нульових, вони одразу ж припинили обчислення, які виконували у великих книгах.

— Дуже раді!.. Раді, що нарешті ви повернулися!..— майже хором загукали, усміхаючись, клієнти.

— Що сталося? — запитав Ікс-нульовий.

— Ми не можемо розв'язати однієї задачі. Непорозуміння й з іншою... Звернулися до цифроградців — вони нічого не зарадили.

— Які ж то задачі? — поцікавився Ігрек-нульовий.

— Один вельми поважний громадянин нашого міста хоче урочисто відзначити подію, коли він буде у два рази старший за свого сина. Батькові зараз 52 роки, синові — 27...

— І що ви йому відповіли?

— Спершу ми звернулися за допомогою до вашого колеги Ікса. Адже це мало статися через x років. Батькові тоді буде $52+x$, а синові — $27+x$ років. Оскільки ж шукаємо час, коли батько буде удвічі старший за сина, то легко скласти рівняння: $52+x=2(27+x)$. Спочатку все вийшло добре, але в кінці (хто б міг подумати!) одержали: $x=52—54$.

— Що ж тут вас налякало?

— Як-то що?— гарячкували клієнти.— Хіба можна від меншого відняти більше? Нам і цифроградці сказали, що в задачі щось не так.

— У вашому рівнянні ікс працював бездоганно. А задачу ви склали неправильно. Так би мовити, питання повернули не в тому напрямі.

— Як-то питання задачі можна повернути в тому чи іншому напрямі? Воно ж не машина!..

— Машина-то не машина, а повернути можна. Ви розв'язали задачу в напрямі майбутнього, а ваш земляк так уже ніколи не буде в два рази старший за сина. Він уже був старший. А щоб дізнатися, коли це було, треба рухатися не в майбутнє, а в минуле.

— Може, й справді так. Тільки як тоді скласти задачу?

— Дуже просто. Слід поставити запитання — не через скільки років батько буде удвічі старший за сина, а коли це було?

— Хвилинку!.. Хвилиночку!..— заметушилися клієнти і почали швидко щось писати в книгах.— Тоді одержимо рівняння: $52-x=2(27-x)$ і $x=2$. Виходить, це було два роки тому?!

— Атож. Коли батькові виповнилося 50, а синові 25 років.

— Дивно. Ми ніби рухалися вперед, а задача поверталa назад?

— Правильно.

— Чому ж тоді вона в нас не виходила?

— Бо ви вважали, що ліворуч від Цифрограда є лише Нуліадія, а ще лівіше вже нічого немає. Через те й не зуміли від 52 відняти 54.

— Так вважали не тільки ми, а й цифроградці.

— Що ж, тоді недаремно ми прилетіли до них,— сказав Ігрек-нульовий, звертаючись до Ікса-нульового.— Доведеться заодно відкрити їм ще одну країну. Бо не тільки ця задача, а й багато інших викликатимуть у них ускладнення або й зовсім не матимуть розв'язків.

— Знову ви говорите загадками?— не втрималась Одиниця, яка досі мовчала.— Всі знають, що на західному кордоні нашого міста стоїть знак:

~~ЦИФРОГРАД~~

Отже, далі вже нічого немає.

— Для науки не існує знака кінця. Де б вона сьогодні не зупинилась, завтра буде далі... По Цифрограду можна рухатись у двох протилежних напрямках і як завгодно далеко.

Щоб уточнити своє твердження, Ігрек-нульовий придумав цікаву задачу.

— Ви позичали коли-небудь у знайомих гроші? — запитав він Нуля, який раптом з'явився серед клієнтів і почав був заперечувати Ігреку-нульовому.

— Бувало.

— Так-от, припустимо, що ви позичили у товаришів 110 карбованців. А коли у вас з'явилися гроші, нехай 100 карбованців, ви їх відборгували. Скільки ж грошей у вас лишилося?

— Ви смієтеся... У мене лишилося б ще 10 карбованців боргу,— не на жарт розсердився Нуль.

— Борг теж гроші. І їх можна вважати вашими. Тільки не додатними, а від'ємними.

— Про такі гроші я ніколи не чув. Цікаво, скільки ж їх у мене було б?

— Мінус десять карбованців.

— І що на них можна придбати?

— Нічого. Їх можна лише віддати тому, в кого позичали.

— То навіщо мені такі гроші?

— Від'ємні гроші, як і взагалі числа, дуже корисні. За Нулем уже давно існує ціла область Цифрограда — Від'ємні числа.

— Ви хочете сказати, що, крім мене, є ще якась мінус

Одиниця? — обізвалась наша знайома, яка досі мовчки слухала всю цю розмову.

— Хіба то так погано — мати в протилежному напрямі від Нуля свого майже двійника — протилежне собі число?

— Пробачте, але я його не хочу знати. То був Нуль, тепер від'ємна Одиниця...

— Не тільки — 1, а й —2, —3... —*n*... Рівно стільки, скільки вас усіх у Цифрограді до Нуля.

— Виходить, я майже в центрі Цифрограда?

— Так.

— А та, протилежна мені, далеко від Нуля?

— Точно на такій же відстані, як і ви, тільки не праворуч, а ліворуч. До речі, цю відстань од Нуля до від'ємної Одиниці називають модулем. Отже $|1|=|-1|=1$.

— Навіщо ставити мене між цими відрізками? Тим більше, що вони на мене не впливають. Он ту від'ємну перетворюють у мене, то нехай там і стоять.

— Їм наказано нічого вам не робити. У них інше завдання. Ви ж можете з'явитися в задачі під псевдонімом. Наприклад, коли відстань між точками А і Б рівна якійсь лінійній одиниці. Тоді вони відразу ж про це повідомлять: $|АБ|=1$.

— Ну, з цим можна погодитись.

— Відверто кажучи, ми були переконані, що ви зрозумієте нових співгородян. Тим більше, що з ними ви перетворюєтесь з числового променя на числову пряму... Але даруйте, ми так захопилися, що забули про своїх клієнтів. А в них же непорозуміння із задачею.

Клієнти тут же припинили обчислення, по їхніх радісних усмішках було видно, що результат вийшов цілком утішний.

— Все гаразд!.. Ця задача теж на від'ємні числа... — залементували вони.

— От і добре,— сказав Ікс-нульовий.— Тож учені недаремно відкрили від'ємні числа і стали користуватися ними при обчисленнях.

— Цікаво, а коли це сталося? — запитав Нуль.

— Від'ємні числа знав ще Діофант. Він навіть помножив їх. Проте задачі складав так, що вони мали додатні розв'язки. Якщо ж траплялися від'ємні, відкидав, як недопустимі.

Ікс-нульовий повідав й інші історії. Індійські математики, наприклад, знали від'ємні числа ще в сиву давнину. Додатні вони тлумачили як майно, а від'ємні — як борг. В тих же термінах вони тлумачили й правила дій над числами: $a+b=c$: сума майна і майна є майно, $(-a)+(-b)=-c$: сума двох боргів є борг, $a+(-b)=a-b$: сума майна і боргу дорівнює їх різниці.

Від'ємні числа довго не визнавали, ставилися до них з недовір'ям. У Європі їх називали навіть абсурдними, бо теж довго не розуміли, який реальний зміст має множення від'ємних чисел або додатних на від'ємні.

Дотепними аналогіями керувалися арабські вчені, виводячи правила дій над цілими числами: плюс на плюс дає плюс — приятель мого приятеля — мій приятель; мінус на мінус дає плюс — ворог мого ворога — мій приятель; плюс на мінус дає мінус — приятель мого ворога — мій ворог.

Саме завдяки вченим арабського Сходу математичні знаки «плюс» — «мінус», як і цифри, якими ми тепер користуємося, потрапили до Європи, а звідти розселилися по всьому світу.

Всі вже було зібралися розходитись, коли Нуль, який претендував на відкриття, але ще доопрацьовував його, підбіг до гурту й заволав:

— Знайшов! Я ж казав, що мені треба лише дещо уточнити...

— Що знайшов?

— Я відкрив, що всі цифроградці — нулі! Одиниці, двійки, трійки — все то мана...

Присутні насторожено перезирнулися: не без клопоту з оцими нулями! Знову у якусь халепу чесний цифроградський люд втягнути хочуть...

— Звідки ви це взяли?

— Будь ласка! Доведення вкрай просте і точне. Нехай $a \in N$ і позначимо $\frac{a}{2}$ через x, тоді $2x = a$. Помноживши обидві частини рівності на a, одержимо: $2ax = a^2$, або $a^2 - 2ax = 0$. Якщо до обох частин додати по x^2, то матимемо: $a^2 - 2ax + x^2 = x^2$, або $(a-x)^2 = x^2$, або $x - a = x$. Звідки $x - x = a$ і $a = 0$. І це для будь-якого цифроградця!..

Ледве встиг чванько викласти своє «доведення», як підоспів ще один Нуль. Цей став похвалятися, що він найбільший з усіх чисел і зовсім не збирається лишатись на самому початку натурального ряду.

— Що я більший довільного від'ємного числа, ясніше ясного,— говорив він.— Візьмемо, наприклад, яке завгодно велике число $a > 0$. Погодьтеся, що $a - 1 < a$. А помноживши обидві частини нерівності на $-a$, одержимо $-a^2 + a < -a^2$. Додавши до обох частин нерівності по a^2, матимемо: $-a^2 + a + a^2 < -a^2 + a^2$. Тож очевидно, що $a < 0$.

Іксовці звикли до несподіванок. Але довелося й цього разу пояснювати, що ніяких відкриттів тут немає. Нулі лише продемонстрували своє незнання дуже важливих правил математики, зокрема і тих, що стосуються дій з від'ємними числами. А щоб у майбутньому не виникали між цифроградцями суперечки за місця на числовій осі, щоб не докоряли, бува, один одному, що хтось менший, Ікс-нульовий розповів дещо з передісторії Цифрограда.

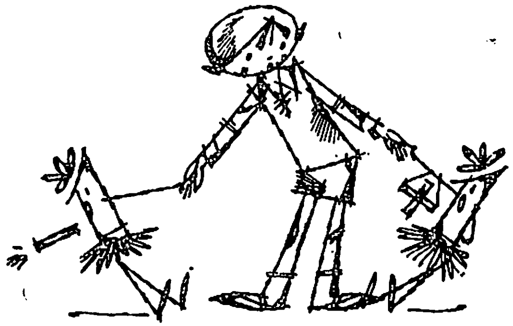
— Може, це й прикро буде почути цифроградцям,— почав він,— але математика народжувалася ще в ті часи, коли вас не було...

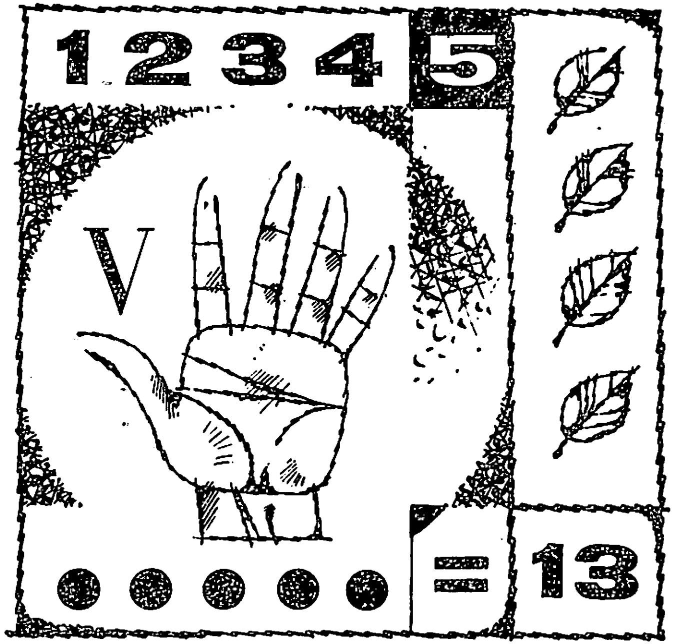
Розповідь одразу ж почали транслювати по всіх радіостанціях і телебаченню Цифрограда. А тим часом...

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Де помилявся Нуль, який доводив, що кожне натуральне число дорівнює нулю?

2. Де помилявся його колега, який доводив, що він більший за будь-яке натуральне число?





ВСЕ ПОЧИНАЛОСЯ З МНОЖИН

...В одній країні було оголошено конкурс на кращі книги про те, як люди жили без заліза, вогню, машин, математики. Та жоден письменник не міг обійти математики. Бо хіба можна уявити людське життя без елементарних математичних знань!

Здається, що може бути простішим від лічби? Це ж так природно і всім доступно: один,

два, три, чотири,.. А от мандрівники не раз зустрічали в джунглях Африки, Австралії, Південної Америки племена, які досі так і не навчилися лічити.

Вже на початку свого існування людина жила в оточенні множин конкретних об'єктів: людей на полюванні і в роботі, дерев, тварин, плодів тощо. Вона певним чином вивчала ці множини і виконувала над ними операції задовго до того, як було відкрито числа.

Спочатку людина винайшла спосіб розпізнавати: всі елементи множини в наявності чи якихось немає. Для такого своєрідного обліку вона зберігала в пам'яті характерні ознаки різних множин. Скажімо, якщо це собаки: білу цятку, рване вухо, довгий хвіст. Коли мисливець-абіпон (плем'я у Південній Америці) збирався на полювання, то, оглядаючи зграю своїх чотириногих друзів, подумки зіставляв множину собак з множиною їх характерних ознак. І коли хоч однієї собаки не було при ньому, то якась з ознак лишалась у пам'яті. Тепер ми кажемо: абіпон встановлював взаємно однозначну відповідність між елементами двох множин — собак і їхніх прикмет. Якщо ж таку відповідність вдавалося встановити, то всі собаки були на місці, якщо ж ні, то одну або кілька собак доводилося розшукувати.

Деякі племена, обмінюючи продукти між собою, розкладали їх у два ряди, а відтак встановлювали взаємно однозначну відповідність між предметами обміну. Отже, людина навчилася оцінювати множини з навіть великою кількістю елементів. Тубілець Центральної Африки, який умів рахувати лише до трьох, вправно обмінював у заморських купців кілька десятків слонових бивнів на пачки тютюну, не боячись, що його обдурять. Для цього він проти кожного бивня клав пачку тютюну і, таким чином, був переконаний, що операція пройде успішно.

Згодом, коли треба було не тільки визначати чисельність множини якихось предметів, а й передати інформацію про чисельність їх іншим, з'явилися множини-еталони, що з ними порівнювали ті множини, чисельність яких належало встановити. Чисел ще не було, і кількість предметів порівнювали саме з такими множинами-еталонами. Тоді говорили, що якихось предметів стільки, скільки місяців на небі (коли їх 1), або скільки крил у птаха (коли їх 2), чи скільки пальців у страуса (4)...

З багатьох множин-еталонів людина зрештою вибрала одну, найпридатнішу для лічби, яка складалася з більш-менш однорідних предметів. Природно, нею стала множина пальців спочатку однієї, потім обох рук, а подекуди рук і ніг людини. Ще пізніше було знайдено й інші замінники конкретних предметів, які належало рахувати: камінці, черепашки, палички, вузлики, зарубки на дереві. У тих самих абіпонів 5 — це була «рука», 10 — «дві руки», 20 — «руки й ноги». Відповідні слова — ще не числівники, вони лише говорять про те, що йдеться про таку-то кількість предметів або, приміром, органів у тварин: лап, очей, ніг.

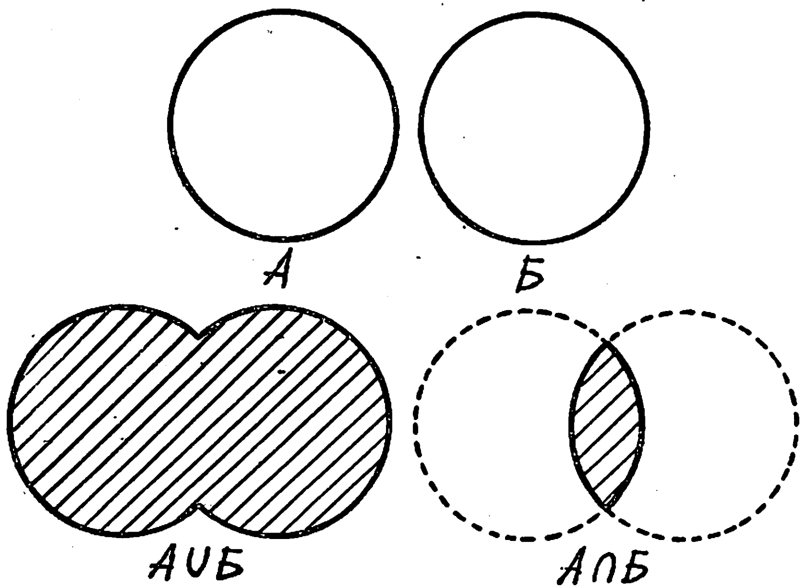
Давним-давно і цифроградці були невід'ємними від певних сукупностей предметів. У туземців Флоріди, наприклад, «на-куа» означає 10 яєць, «на-банар» — 10 кошиків з продуктами. Окремо ж «на», що означало б число 10, немає. Але наявність однієї і тієї ж приставки в усіх рівночисельних множинах різних предметів говорить про те, що туземці вже розуміють наявність чогось спільного в усіх сукупностях і цим спільним виступає чисельність названих множин.

Тільки в результаті тривалого розвитку людина усвідомила: елементи таких множин, як множина очей, крил птаха, рук, вух, ніг людини, можна привести до взаємно однозначної відповідності, і таку спільну властивість їх та багатьох інших рівночисельних з ними множин можна виразити за допомогою числа два. Отоді-то й почали виникати натуральні числа.

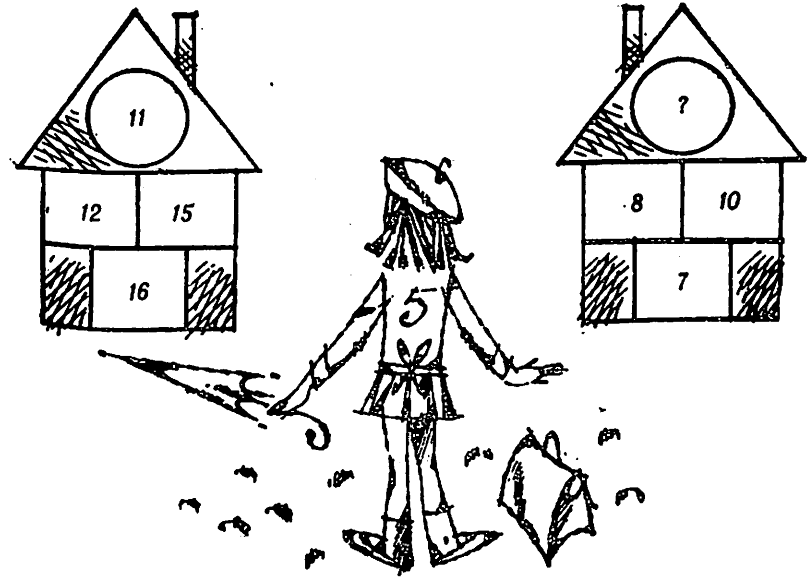
Одначе спочатку людина освоїла лише кілька натуральних чисел. І дуже довго їх ряд був короткий — тільки 1 і 2. Лише через тривалий час — 1, 2, 3. Усі чисельніші множини характеризувалися словом «багато» — багато пальців на руці, дерев у лісі, зірок на небі. Таку ж роль виконували слова «череда», «рій», «табун», «оберемок», «в'язка».

У племен же островів Торресової протоки єдиними числівниками були 1 — урапун і 2 — окоза. Тоді: 3 — окоза-урапун, 4 — окоза-окоза, 5 — окоза-окоза-урапун. Тут ми маємо лічбу в найдавнішій системі числення — двійковій.

Далі, здається, справа пішла швидше. Людина опановувала все нові й нові числа, продовжуючи їх ряд далі від одиниці й двійки. Ми й сьогодні можемо простежити окремі етапи цієї діяльності. Наприклад, в багатьох приказках і прислів'ях число сім виступає як числова характеристика множини з дуже великою кількістю предметів. Пригадаймо: «Сім разів відміряй, а раз відріж», «Семеро одного не ждуть», «На сьомому небі», «Сім потів зійшло»... Це відгомін тих прадавніх часів, коли число сім було граничним, найбільшим у натуральному ряді, за яким уже слідувало — «багато».



Такими граничними за різних часів були числа 12, 13, 40... Числа, які на певному етапі були найбільшими, привертали особливу увагу людини. Вона приписувала їм магічну силу. Одні числа вважала щасливими, інших боялася і ставилась як до лиховісних. Яких тільки вигадок не створено про «чортову дюжину» — число 13. А все через те, що число 12 було колись граничним у натуральному ряді, тобто ніби замикало ряд, завершувало його. До того ж це число ділилося на 2, 3, 4, 6, що теж було зручно. Зрозуміло, наступне за ним число вважалося непотрібним, навіть небезпечним. Адже 13, як число просте, ділиться лише на себе і на одиницю, що спричиняло неабиякі незручності.



Отак і закріпилась за числом 13 недобра слава. Яким живучим виявилося це марновірство, свідчить хоч би й те, що нерідко його побоюються люди і в наші дні...

Про все це розповів цифроградцям Ікс-нульовий.

— Виходить, первісні люди, ніде не вчившись, розумілися на множинах?— запитала оповідача Одиниця.

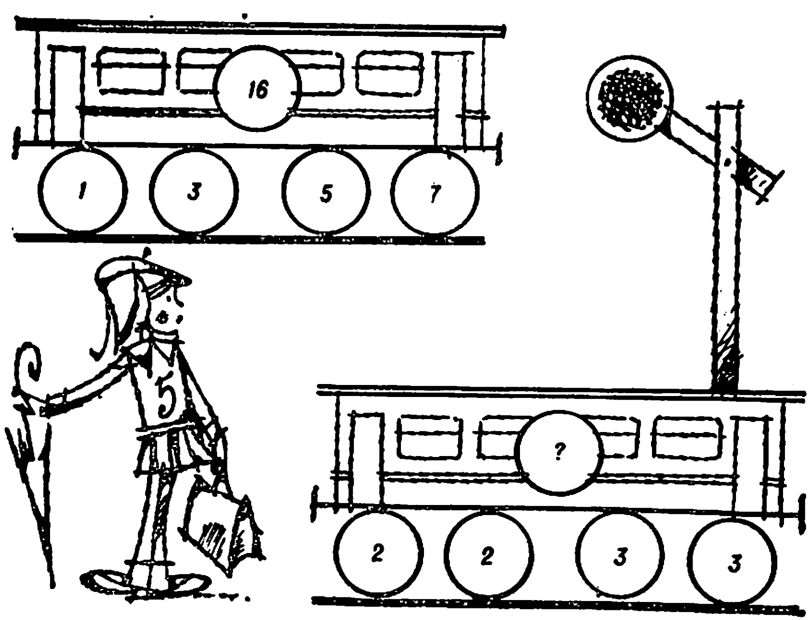
— Цього їх навчило саме життя,— відповів Ікс-нульовий.— Ми й тепер ледь не на кожному кроці вдаємося до операцій над множинами. Вчені розробили навіть математичну дисципліну, яка так і називається — теорія множин.

— А хтось таки був перший у створенні цієї теорії?

— Звичайно, німецький математик Георг Кантор

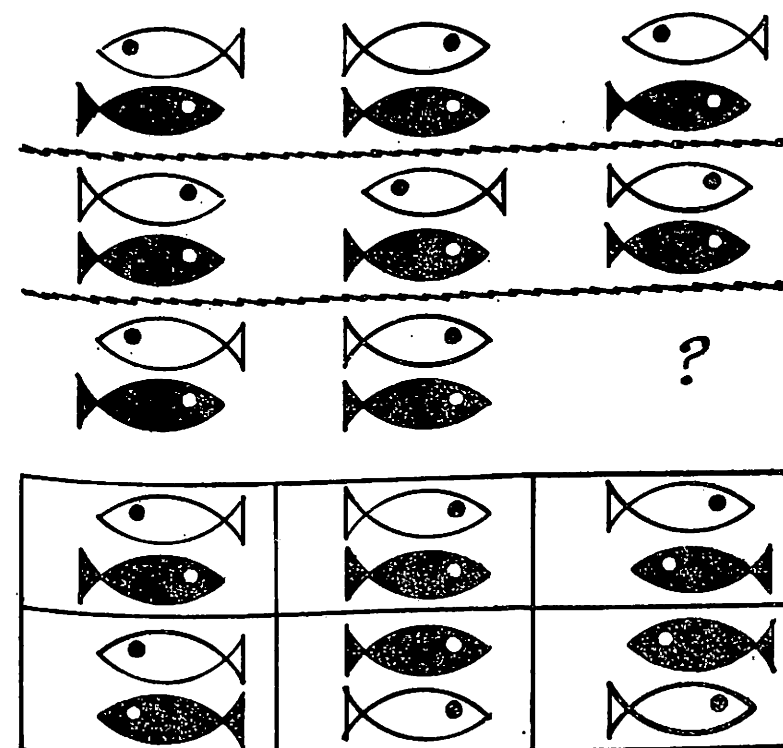
(1845—1918). Якось, ще навчаючись у школі, Георг похвалився вчителеві математики, що відкрив цікаву арифметику множин. «Що ви маєте на увазі?» — запитав здивований учитель. Георг накидав на дошці креслення, які ілюстрували означення об'єднання і переріз множин *А* і *Б*. «А як бути, коли у множин *А* і *Б* не буде спільної частини, власне, спільних елементів?» — знову запитав учитель. «Ми скажемо,— не розгубився Георг,— що $A \cdot Б = 0$...».

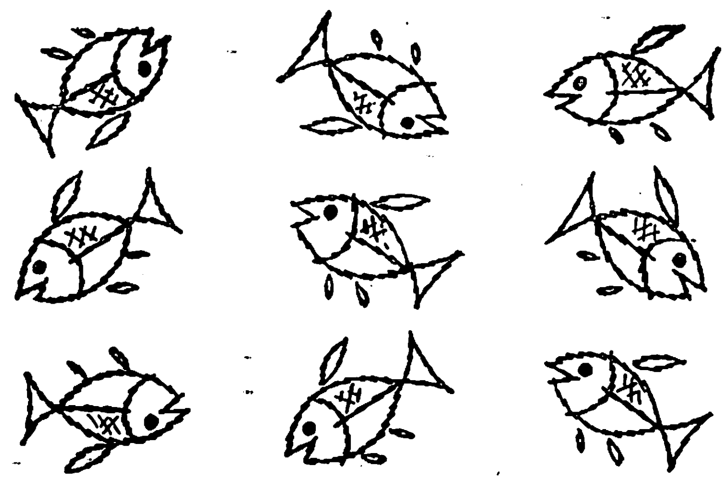
— Дурниці... Як-то може добуток двох чисел дорівнювати нулю, коли жоден із співмножників не є нуль! — вигукнув невдоволений Нуль.— Он навіть Верхоглядько знає, що цього не може бути.



— Але ж тут множення не чисел, а множин,— пояснив Ікс-нульовий.— І щоб не плутати, множення множин назвали перерізом. Результат такої операції теж називають перерізом. А якщо в перерізі немає жодного елемента, він — порожня множина. Такі множини не лише корисні, а й необхідні...

— Множина, множина,— обурився Нуль.— Що то за множина, в якій нічого немає?

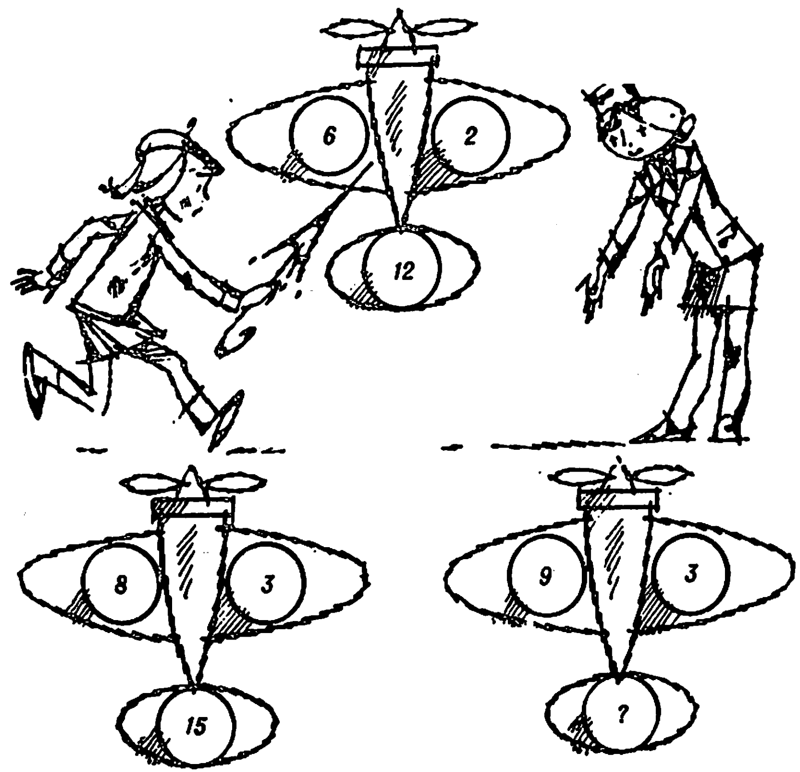




— А ви? — спалахнула Одиниця.— До речі, ви прямий нащадок саме порожньої множини. Власне, подумайте, що означаєте? Може, хтось підкаже?..

— Нуль є кількісною характеристикою саме порожньої множини,— сказав Віктор.

— Авжеж,— вела далі Одиниця.— У них навіть позначення схожі. Адже для порожньої множини використовують знак $\varnothing$. Більше того, в математичних операціях порожня множина поводить себе так само, як і Нуль у діях над числами. Для будь-якої множини A, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$. В останньому прикладі ми записали різницю між множиною А і порожньою множиною... Так що, шановний Нуль, і ви, і порожня множина тому й користуєтесь усіма правами... Тому й потрібні людям, для яких створений безмежний світ математики.



— Знаєте, якось я була у відрядженні, де без знання способів задання множин і операцій над ними нічого робити,— пригадала П'ятірка.— У нас це не так очевидно, а там... При поселенні в готель мені запропонували відшукати число, яке має стояти на фронтоні іншого будинку.

— Ви знайшли його?

— Звичайно. Я ж — П'ятірка... А коли я брала квиток на поїзд до іншого міста, довелося гарненько поміркувати над тим, яке число має стояти на салоні іншого вагона. Навіть у їдальні, щоб посмакувати смаженими коропцями, я шукала, які дві із шести пар риб на нижньому рисунку мають бути на вільному місці верхнього.

— Задачі ці й справді мають пряме відношення до теорії множин. Вам пропонувалися множини, задані характеристичними властивостями, і належало знайти елемент, який задовольнив би ту ж замасковану властивість, тобто який теж належав до даної множини,— похвалив П'ятірку Ікс-нульовий.

— А які ще задачі ви там розв'язували? — поцікавився Нуль.

— Їх було багато. Доводилося не тільки відшукувати елементи, що належать до даної множини, а й знаходити серед інших елементів такий, який хоча й записаний у даній множині, а фактично до неї не належить. Коли я вдруге пішла до їдальні, то перед обідом довелося поміркувати, яка риба не належить до множини із дев'яти риб, хоча й лежить ніби на своєму місці. А потім ще: до мене звернулися тамтешні учні, щоб я допомогла їм розв'язати задачу теж на множини.

— І ти їх виручила? — запитала Одиниця.

— Звичайно.

— А які то були задачі? Пам'ятаєш?..

— Прошу... В піонерському таборі відпочиває 70 учнів. 27 із них відвідують драмгурток, 32 — співають у хорі, 22 — спортсмени. До того ж відомо, що в драмгуртку — 10 учасників хору, в хорі — 6 спортсменів, у драмгуртку — 8 спортсменів; 3 спортсмени відвідують драмгурток і хор. Треба обчислити: скільки учнів не співають у хорі, не захоплюються спортом і не відвідують драмгуртка та скільки учнів захоплюються лише спортом?

— Щось тут багато залежностей. Навряд чи й Ікси впораються,— засумнівався Нуль.

— Чому ж — Ікси можуть впоратись. Але, використавши круги Ейлера, які унаочнюють операції над множинами, я її розплутала швидше,— сказала П'ятірка.— А останню задачу одержала вже перед відльотом, на аеродромі. Мені видали квиток лише після того, як я відгадала число, написане на хвості іншого літака.

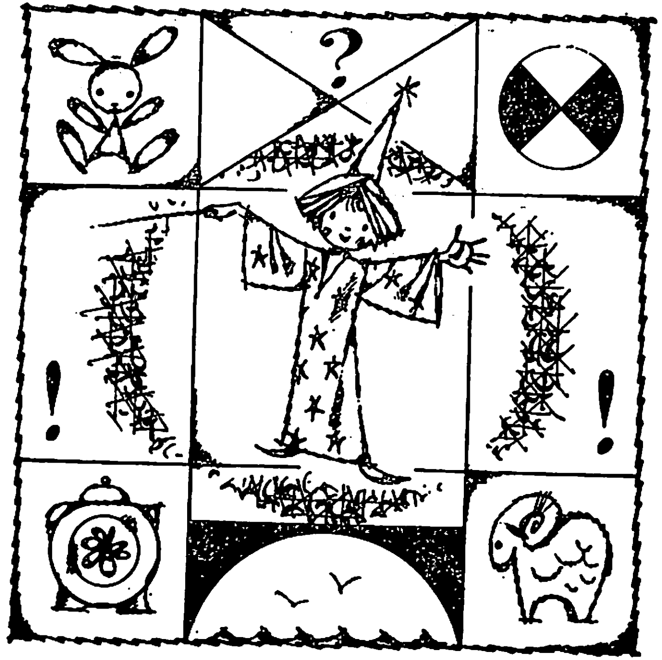
— Ну, годі, мабуть, а то почали лекцію, а закінчили спогадами...— похопився Ікс-нульовий.

— Але спогади цікаві,— зауважила Одиниця.— Я б радила П'ятірці навіть записати їх.

— Що ж, запишу, хоч це й нелегко...

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Яке число має бути на фронтоні іншого будинку?
2. Яке число треба написати на салоні іншого вагона?
3. Яка із шести пар риб нижнього рисунка має лежати на вільному місці верхнього?
4. Яка з дев'яти риб не належить до множини риб?
5. Скільки учнів не співають у хорі, не захоплюються спортом і не відвідують драмгурток? Скільки захоплюються лише спортом?
6. Яке число має бути на хвості третього літака?

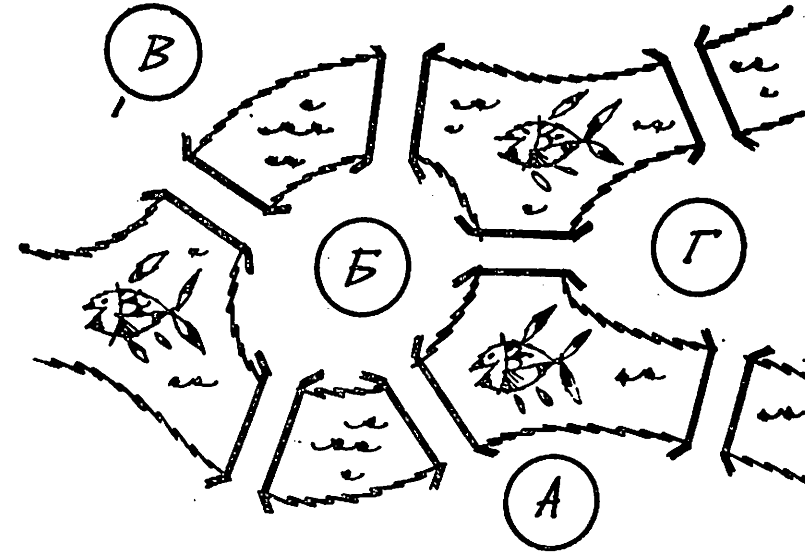


ДОРОГИ УНІКУРСАЛІЇ

Першими зустріли іксовців, цифроградців та юних друзів прикордонники Унікурсалії. Вони завжди раді новим гостям, але все одно дотримувалися давньої традиції.

— Візою до нашої країни,— сказав начальник застави,— буде прогулянка по калінінградських мостах. Так у нас заведено...

Цифроградці, які дуже хотіли побувати в



Унікурсалії, захвилювалися. Про цю задачу вони вже чули: її не кожен міг розв'язати. А що, коли і їм не пощастить?

— Це місто колись називалося Кенігсбергом,— вів далі начальник застави.— Розташоване воно на берегах річки і двох островах. Райони міста сполучаються між собою сімома мостами. Сплануйте, будь ласка, свою прогулянку так, щоб, обійшовши всі райони, пройтися по кожному мосту лише один раз.

— О, ви нас вітаєте знаменитою задачею,— мовив Ікснульовий.— Чули, чули, як ще двісті років тому у мешканців тихого Кенігсберга пропав спокій. А все — задача на мости. Її пробували розв'язати пихаті бюргери, студентство, гімназисти, але... Зрештою, цією задачею зацікавився сам Леонард Ейлер. Це він помітив у ній витоки топології.

— А що, давненько ми не займалися топологією,— втрутився у розмову Ігрек-нульовий.— Доведеться дещо пригадати.

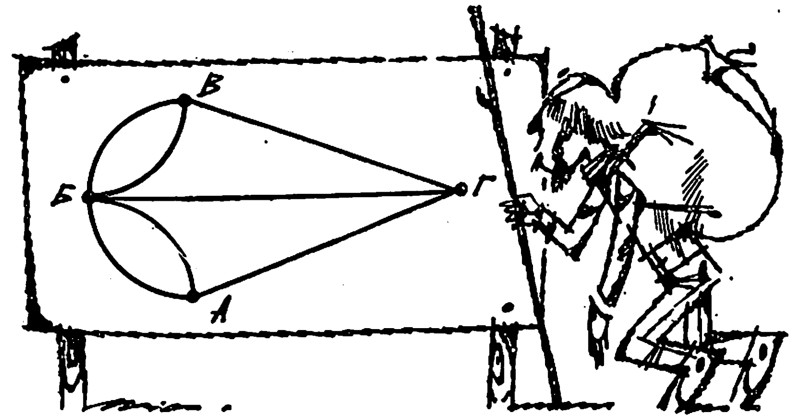
— Топологія — це така наука? — запитала Четвірка.

— Наука,— відповів Ікс-нульовий.— Один із наймолодших розділів геометрії. Що вона вивчає, найпростіше пояснити на такому прикладі. Уявімо собі надувну гумову кулю, зайця і рятівний круг. Погодьтеся, кулю можна так надувати, що одержимо фігури найхимерніших форм, навіть надувного зайця. Але як би ми не старалися, з кулі, якщо її не розрізати і не вдатися до клею, ніяк не вийде рятівного круга. Тому куля і надувний заєць з точки зору топології — фігури однакові, або ще — топологічно однакові, оскільки одну з них можна перетворити на іншу, не розрізаючи і не склеюючи. Куля ж і рятівний круг — топологічно різні. Зате топологічно однаковими будуть рятівний круг і чашка. Адже тільки стискуючи і розтягуючи в окремих місцях гуму, можна одну з цих фігур перетворити на іншу. Такі перетворення називаються топологічними. Вони дуже корисні при розв'язуванні багатьох задач, бо замінюють складні фігури простішими, але топологічно однаковими.

— Отож і скористаємося топологією,— сказав Ігрек-нульовий, почавши щось креслити на аркуші паперу.— Найперше прикинемо граф мостів і районів міста...

— Який ще граф? — обурився Віктор, переглянувшись із товаришами.

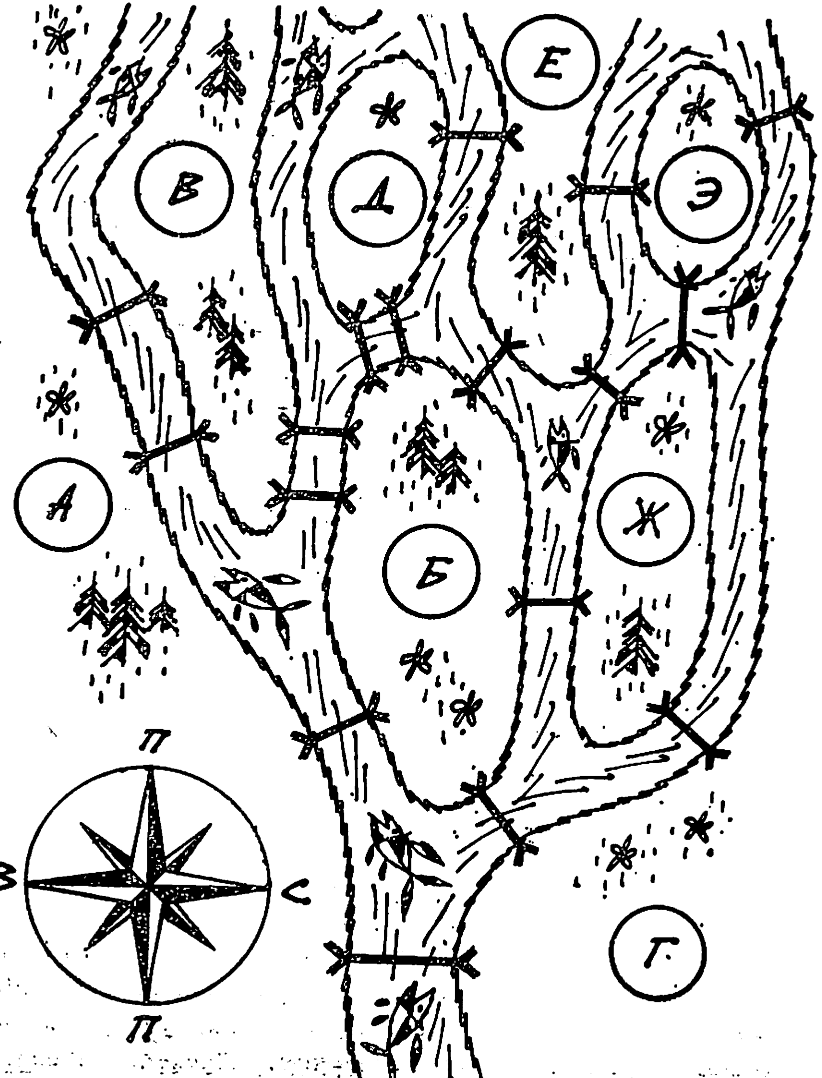
— Заспокойтеся... Наші графи не нащадки якогось там

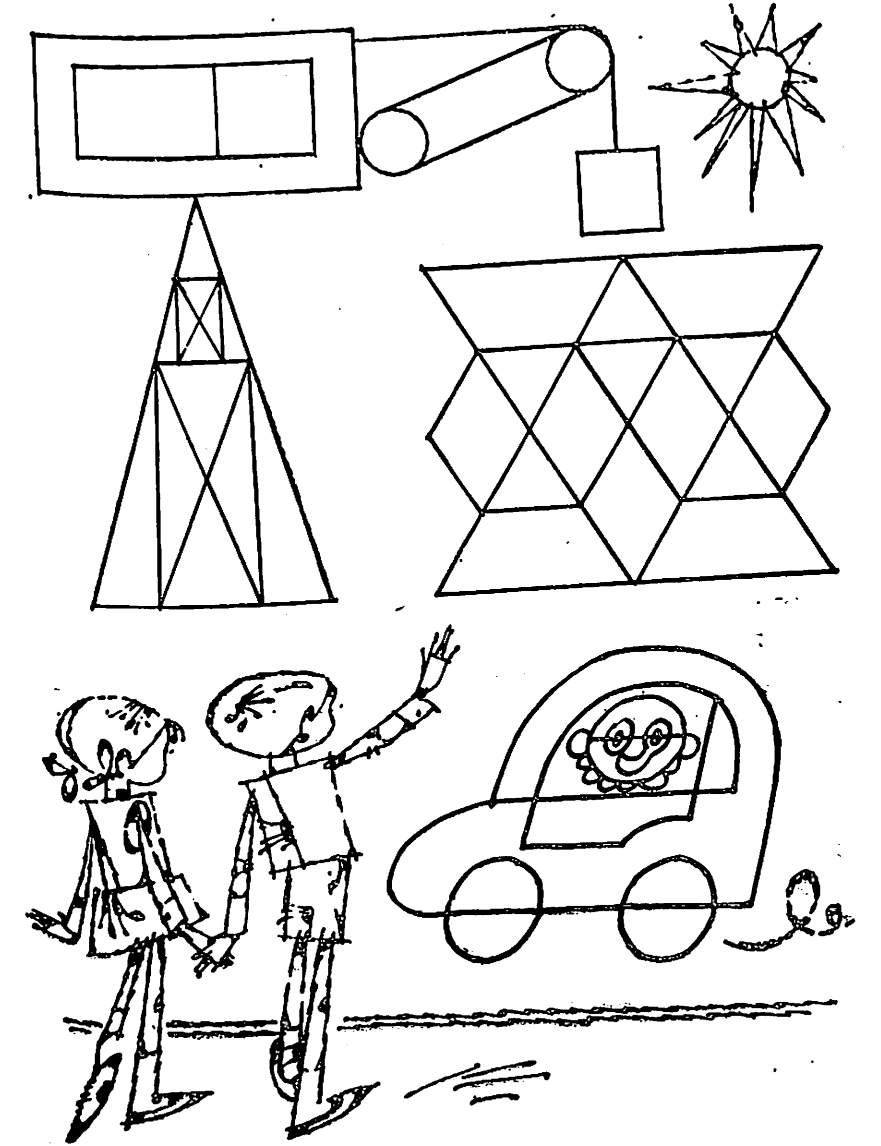


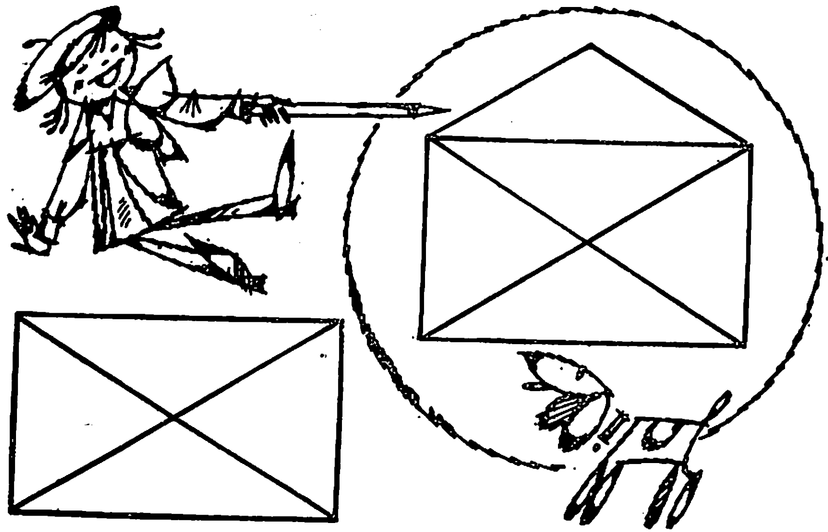
знатного роду, хоча генеалогічне дерево будь-якого роду буде графом. Графи — геометричні фігури, що складаються лише із точок і відрізків прямої чи кривих ліній. Точки називаються вершинами, або вузлами графа...

Іксовці почали підраховувати якісь ребра і вузли. Цифроградцям, котрі також уміли розв'язувати складні задачі, було невтямки те, що робили іксовці. Нарешті розрахунки було зроблено і вони звернулися до начальника застави:

— Ми повторили те, що свого часу довів Леонард Ейлер. Таку прогулянку спланувати, а тим більше здійснити неможливо. І ось чому. Коли в усіх вузлах графа сходиться парне число ребер, вузол називається парним. Тоді, пішовши від будь-якого вузла, можна обійти, або накреслити фігуру одним розчерком пера. Такі фігури називаються унікурсальними. Фігуру, що має два непарних вузли, так само можна накреслити одним розчерком. Початок і кінець об-


Е
В
Д
Э
А
Б
Ж
Г.
П
З
С
П





ходу тепер обов'язково знаходитимуться в непарних вузлах. Якщо ж фігура має непарних вузлів один або більше двох, то накреслити її одним розчерком не вдасться. У графа калінінградських мостів усі чотири вузли А, Б, В, Г непарні, і нам одним розчерком пера його ніяк не накреслити.

Унікурсальці уважно вислухали іксовців і схвально закивали головами. А начальник застави, потискуючи Іксу та Ігреку — нульовим руки, сказав:

— Коли щось старанно вивчиш, то й через багато років пригадаєш. Ейлер розв'язав цю задачу ще в 1750 році... Отже, дайте новоприбулим карту країни! — наказав він одному з прикордонників.

Той подав Іксу-нульовому карту-схему Унікурсалії.

— А тепер,— звернувся начальник застави до всіх новоприбулих,— аби не подорожувати по Унікурсалії не унікурсально, треба скласти план подорожі. Об'їхавши країну, ви мусите пройти по всіх мостах, але по кожному лише один раз.

Іксовці швидко склали граф Унікурсалії і маршрут майбутньої подорожі. Після цього було піднято шлагбаум, і подорожні ступили на землю нової країни. Тут на них уже чекав автобус.

Прямуючи до нього, Олег запитав Ікса-нульового:

— Вам не здається, що цей автобус унікурсальний?

— Може бути. Я вже примітив унікурсальність навіть начальника застави,— засміявся Ікс-нульовий.

— А я прикордонників,— додав Ігрек-нульовий і продовжував: — Очевидно, тут унікурсальність у пошані. Не випадково і країну так названо.

І гості, розглядаючи контури будинків, баштові крани, красиве плетиво огорож, переконалися в цьому. Унікурсальність спостерігається на кожному кроці.

Подорож мала бути тривалою. Тому Ігрек-нульовий запропонував надіслати телеграму до Іксовії, щоб там не хвилювалися.

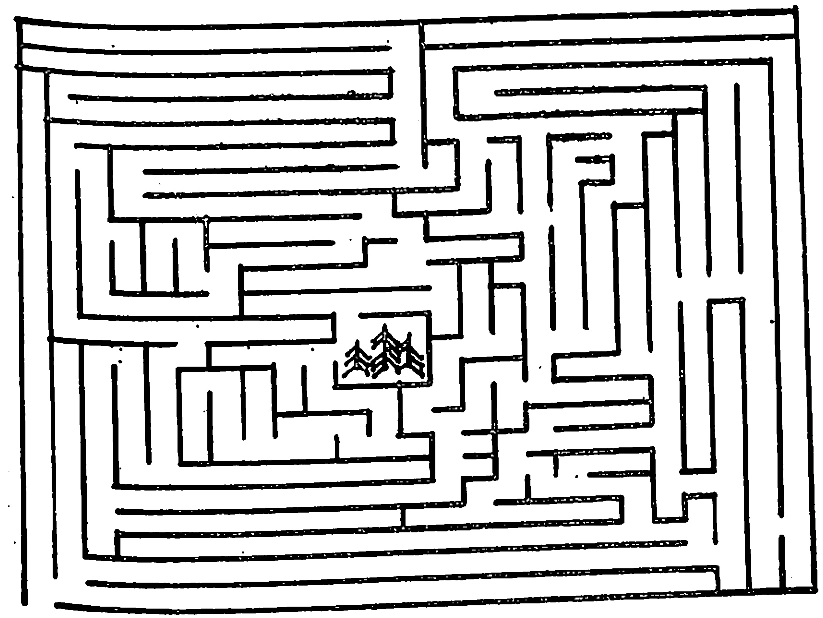
На пошті, куди вони зайшли, велика група туристів щось жваво обговорювала. Як з'ясувалося, вони збиралися посилати листи своїм рідним і знайомим. Але їм за традицією спочатку було запропоновано розв'язати поштову задачу: викреслити «одним розчерком» фігуру конверта або довести, що це не вдасться.

Зібралася чималенька черга. Дехто казав, що цього не можна зробити, інші, проте, шукали розв'язок.

Іксовці відразу впізнали знайому їм задачу. Тут не треба було створювати граф-схему. Сам контур конверта був такою схемою. Задача була легкою, і пошуки розв'язку забрали небагато часу.

— Топології не вивчаєте...— дорікнув туристам Ікс-нульовий.— Через те й не бачите, що «одним розчерком» цю фігуру не накреслити. Один хитрий американець заробив на ній 100 000 доларів. Надрукувавши 100 000 примірників брошурки з цією задачею, він пообіцяв, що сплатить 1 000 доларів тому, хто її розв'яже. Брошурку відразу розкупили по долару за примірник. Але жоден з 100 000 охочих одержати 1000 доларів їх не одержав і не міг одержати, оскільки задача не має розв'язку. Проте, щоб оцю задачу розв'язати, досить відкрити конверт.

Ікс-нульовий докладно пояснив шлях розв'язання зада-



чі. А туристи виявилися тямущими людьми. Черга вмить почала танути і невдовзі розтанула, а зв'язківцям довелося придумувати нову задачу для відвідувачів. Наші ж знайомі подорожували далі.

Тільки тепер вони згадали про обід. Їдальня була недалечко, де виднілися три ялини, але шлях до неї пролягав коридорами лабіринту.

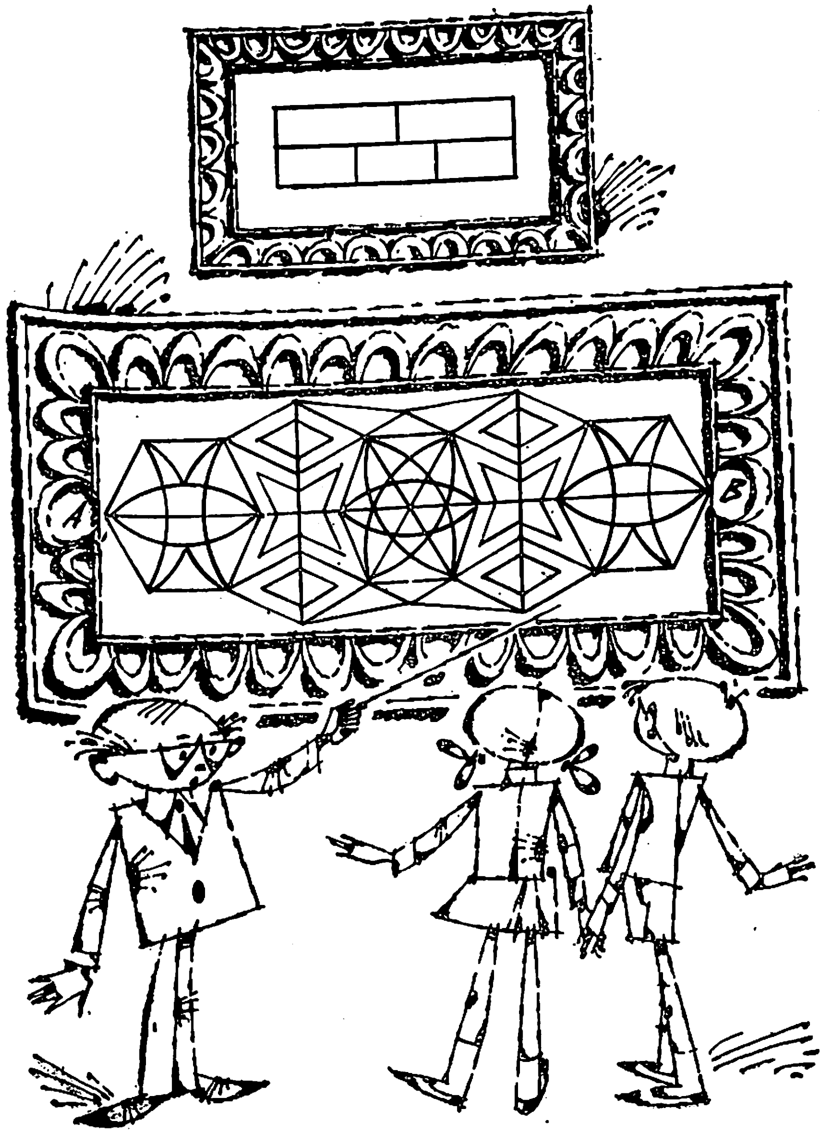
— Лабіринти теж мають якесь відношення до Унікурсалії? — запитала Четвірка.

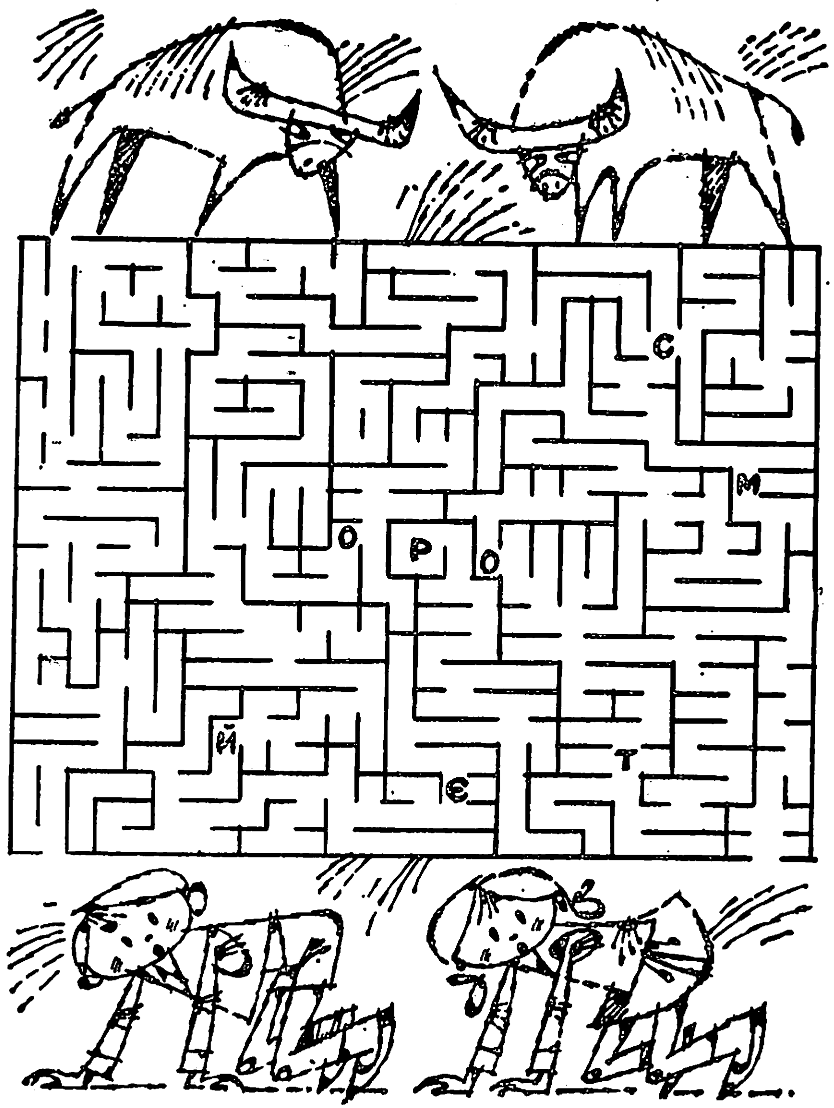
— Звичайно,— пояснив Ікс-нульовий,— адже схема лабіринту завжди є множиною точок, з'єднаних лініями, або лінією, що з'єднує дві точки — початок і кінець шляху. Коли хочете,— продовжував Ікс-нульовий,— лабіринти так само мають свою історію. Є давньогрецька легенда про крітського царя Міноса. Розгнівавшись на афінян за те, що вони вбили його сина, Мінос повелів, щоб кожні дев'ять років Афіни посилали на Кріт сімох юнаків і сімох дівчат, яких у велетенському лабіринті пожирало страхітливе чудовисько з тулубом людини і головою бика.

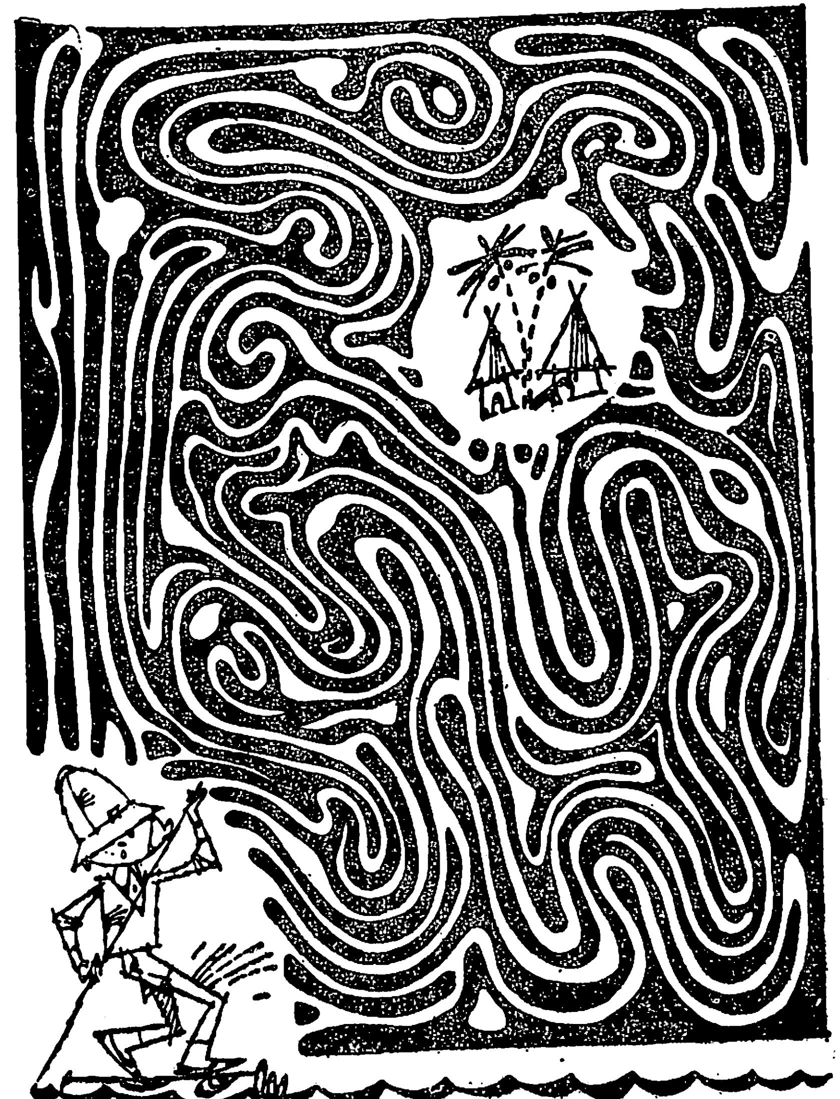
Тесей звільнив Афіни від кривавої данини. І допомогла йому в цьому Міносова дочка Аріадна. Це вона дала героєві гострий меч і клубок ниток. Тесей прив'язав кінець нитки при вході і пішов плутаними ходами-переходами лабіринту. Гострим мечем Тесей убив чудовисько, а по нитці Аріадни знайшов вихід на волю.

— Відтоді нитка Аріадни — це правильний шлях?— поцікавилась Четвірка.

— Звичайно. І — вихід з будь-якого становища...— пожвавішав Ікс-нульовий.— Бо нині лабіринти зустрінеш хіба що в книжках із цікавої математики.




С
М
О
Р
О
Й
Е
Т



— А як же ми без такої нитки втрапимо до їдальні?

— У нас лабіринт значно простіший. А щоб не блукати темними коридорами, прокладемо маршрут на його схемі і — в дорогу.

Разом упоралися і з цим завданням, а невдовзі у затишному залі їдальні, прикрашеному цілою галереєю унікурсальних кривих, усі смакували стравами унікурсальської кухні.

Офіціантка звернула увагу відвідувачів на одну з картин, що висіли на стінах.

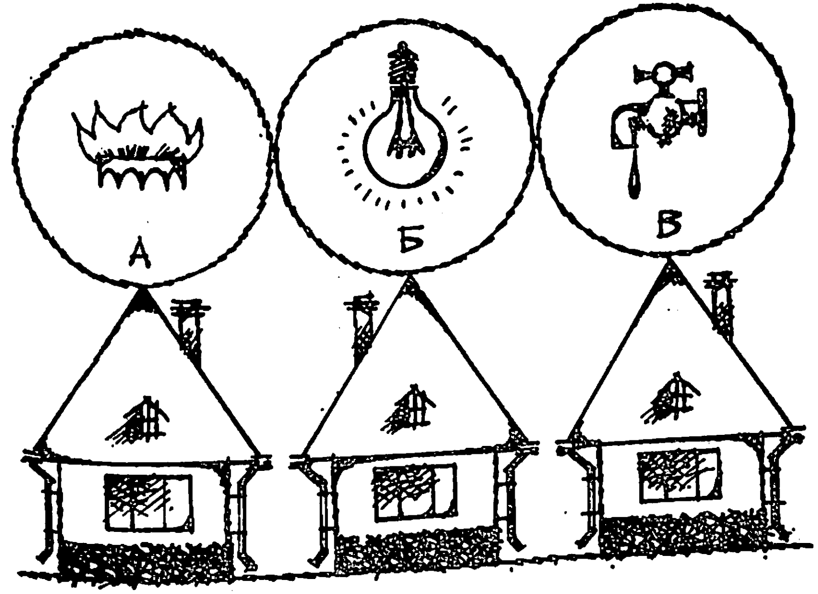
— Це знамениті креслення німецького математика Йоганна Лістінга,— сказала вона.— Перше креслення простеньке, а внизу, як бачите, суцільне плетиво ліній. Між тим, верхня крива не унікурсальна, а нижня — унікурсальна, її можна накреслити, не відриваючи пера від паперу.

Учні самотужки взялися за розрахунки і пересвідчилися, що це справді так. Потім офіціантка порадила гостям відвідати знамениту печеру з наскельними фресками далеких предків унікурсальців. Щоправда, дійти до гроту можна тільки лабіринтом. Вона навіть запропонувала схему печер. А щоб не затримувати гостей, на схемі була й своєрідна нитка Аріадни. Якщо йти правильним шляхом, то літери, повз які треба обов'язково проходити, складуть ім'я одного із героїв дитячих книжок.

Юні друзі не забарилися знайти шлях до неповторних шедеврів стародавніх унікурсальців.

Чутка про подорожніх, які вправно розв'язують унікурсальні задачі, швидко поширилася по Унікурсалії, і при виході з печери на них уже чекала юрба туристів.

Один із них попросив, щоб його вислухали поза чергою.



Збирається він у далеку подорож, до якогось віддаленого племені. Потрапити до нього можна тільки на плоту по одній із річок. Усі погодилися, що в такій дорозі небезпечно помилятися, й іксовці проклали маршрут майбутньої подорожі.

Після цього троє сусідів-унікурсальців попросили допомогти розв'язати їм господарську задачу. Річ у тім, що їхні будинки стояли в одному ряду і до кожного з них від пунктів А, Б і В потрібно було підвести газ, воду і електрику, але так, щоб лінії не перетиналися.

Не встигли друзі покінчити з господарськими клопотами трьох унікурсальців, як до них звернулися з новим проханням. Один унікурсалець потрапив у полон до войовничого племені. Полоненому сказали, що він буде вільний, якщо, увійшовши в одні двері лабіринту, зуміє вийти в інші.

— Ось план лабіринту... Але наш товариш його не знає. До того ж у нього немає ні камінців, ні клубка ниток, щоб якось відмічати свій шлях...

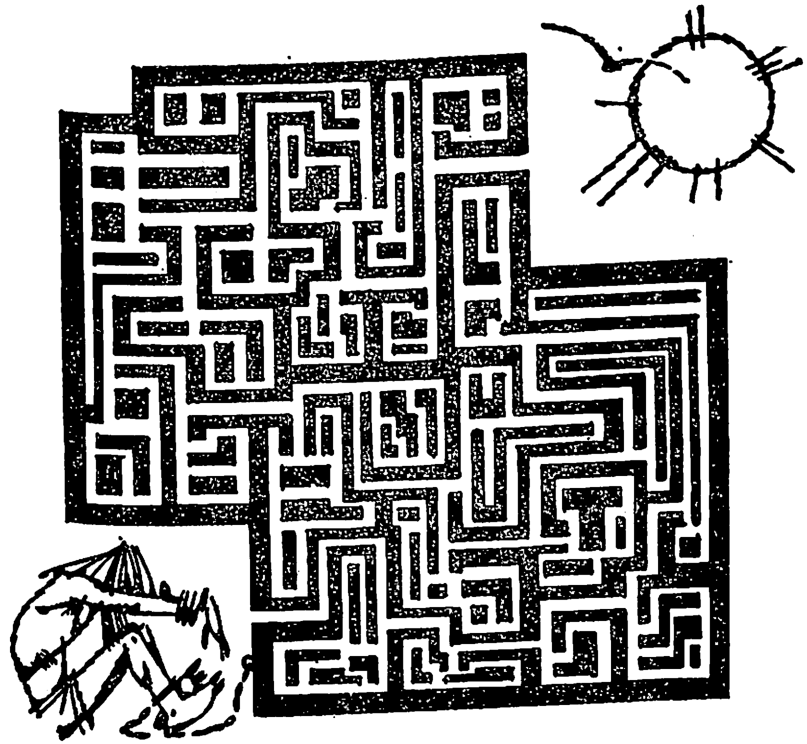
Іксовці схилились над планом і довгенько міркували, чи існує такий шлях на волю, а чи, може, господарі лабіринту тільки потішаються над полоненим і ніякого виходу немає. Це була не поштова задача. І все ж вони дійшли висновку, що шлях на волю існує і навіть не один. Іксовці знайшли й найкоротший. На жаль, скористатися ним полонений не зможе, бо не бачить всього лабіринту. Він може натрапити на нього випадково.

— О, це був би щасливий випадок!..— з надією сказав один із унікурсальців.

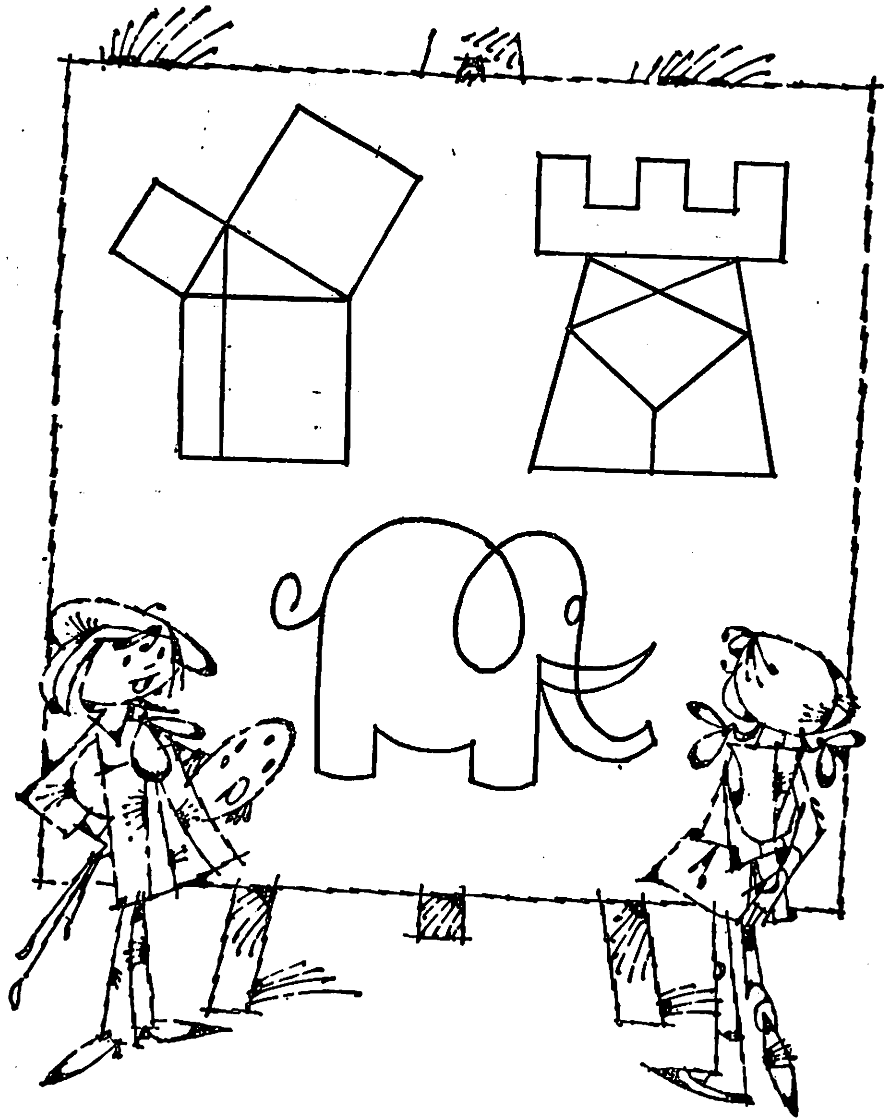
— Так. Це була б справді щаслива випадковість. Та хіба можна розраховувати на неї? Треба діяти так, щоб напевне знайти шлях на волю,— порадили іксовці.

І вони пояснили, як мусить діяти полонений.

Потім подорожні відвідали школу, де всі побачили, що унікурсальці привчають своїх дітей до унікурсальності ще з початкових класів: на уроках малювання першокласники малюють унікурсальних тварин, в шаховий гурток записують лише тих, хто накреслить одним розчерком пера унікурсальну туру. Навіть до теореми Піфагора привчають, користуючись унікурсальною схемою. При цьому фігуру, яка нагадує креслення теореми Піфагора, треба накреслювати, не відриваючи пера від паперу, не креслячи двічі по одній і тій же лінії, не перетинаючи жодної з них.



Гуляючи по місту, друзі звернули увагу на оголошення, яке запрошувало бажаючих на виступ відомого знавця топологічних і унікурсальних несподіванок, учня самого Гео Метра — Гомотета. Подейкували, що цей псевдонім він обрав, коли ще тільки починав свій творчий шлях і обмежував свою програму гомотетичним репертуаром. Та навіть досягши слави, вирішив не змінювати псевдоніма, хоча в його новій програмі гомотетії майже не було. Тепер глядачам



демонструвалися звичайні для математиків і незвичайні для нематематиків геометричні перетворення. Унікурсальська вікторина для туристів — задачі-сувеніри.

Часу залишалось обмаль. Але виступ такої знаменитості і сама програма зацікавили всіх. Оскільки ж до початку сеансу лишалось якихось півгодини, друзі розпитали, де знаходиться Центральний лекторій Унікурсалії, і, не гаючи ні хвилини, поїхали слухати незвичайного лектора.

Проте попасти на виступ Гомотета було нелегко. На віконечках усіх кас висіли таблички: «Квитки продано». Але тут були унікурсальці, яким іксовці свого часу допомогли розв'язати господарську головоломку, та ще туристи, яким завдала клопоту поштова задача. Вони мали час і вирішили подивитися Гомотета на черговому сеансі, а свої квитки запропонували іксовцям і їхнім друзям.

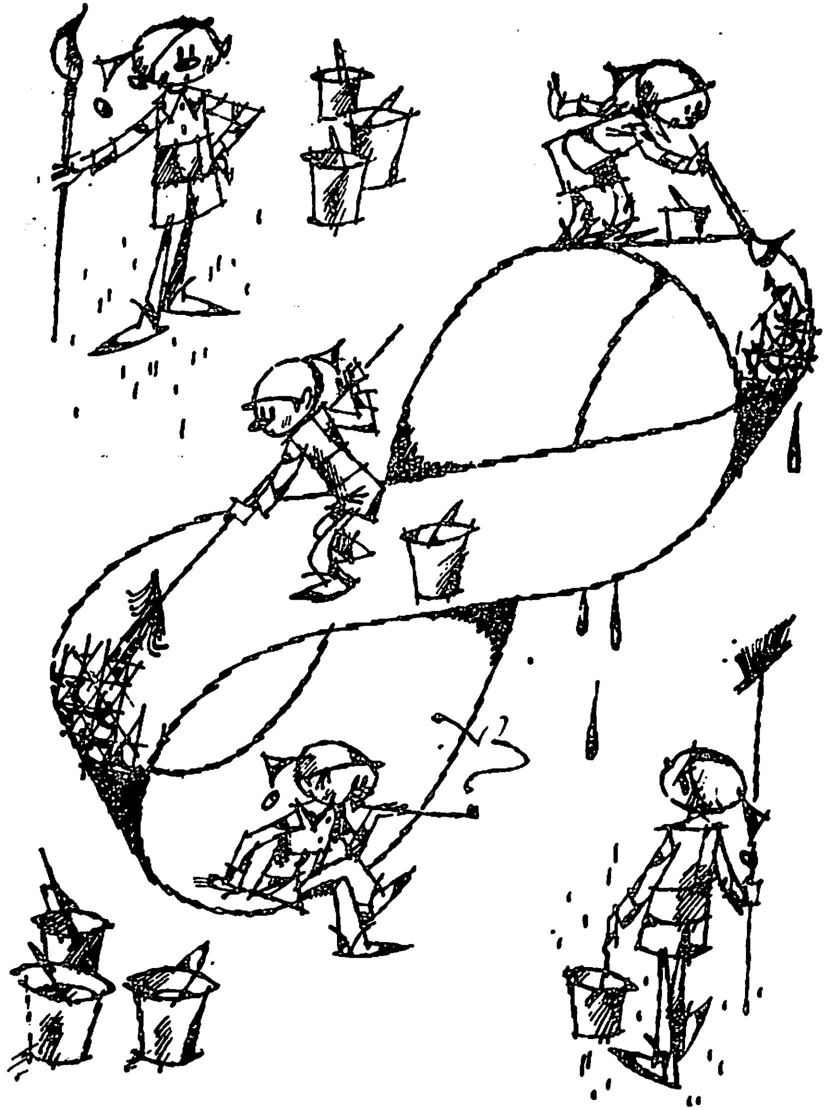
Щиро подякувавши, наші знайомі за кілька хвилин були в залі.

Гомотет вийшов на сцену під бурхливі оплески присутніх. Ведучий оголосив перший номер:

— Односторонні поверхні!..

Асистенти подали Гомотету широку смужку цупкого паперу, і він показав її глядачам. Кути смужки були позначені літерами A, B, C і Д.

— Усі знають, що у вирізаних з паперу геометричних фігур дві сторони? — запитав Гомотет. При цьому він показав обидві сторони смужки — одна була біла, друга — чорна.— От і добре!.. А тепер якби випустити на одну сторону павука, а на другу — муху, то, щоб добратися до мухи, павукові треба перелізти через край смужки. Проте я покажу, як може бути й інакше. Для цього досить прикласти



і склеїти кінці смужки АВ і СД так, щоб А сумістилось з Д, а В з С. Власне, перед склеюванням смужку треба один раз перекрутити. Одержане кільце називається «листок Мебіуса». Характерною рисою його є те, що він — одностороння поверхня. Ось погляньте, мій паперовий солдатик, гуляючи по смужці, побуває в будь-якій її точці, не переповзаючи через її край.

Асистенти підняли смужку і закріпили на двох тонких металевих стержнях, тому здавалося, що вона висить у повітрі. Гомотет поставив на пунктирну лінію, проведену вздовж смужки, паперового солдатика і подав команду: «Вперед!» Солдатик крокував у всіх на очах, то на якийсь час зникав за поворотом і, пройшовши весь шлях, повернувся у вихідну точку, проте вниз головою. Глядачі в залі зашушукали, не розуміючи, як це могло статися. Із залу просили, щоб солдатика поставили на листку як годиться. Виконуючи команду Гомотета, солдатик вирушив по другому кругу і під бурхливі оплески повернувся у вихідну точку вже в нормальному положенні — головою догори.

У залі спалахнули суперечки. Дехто обурювався і говорив, що ніяких односторонніх поверхонь не існує, що Гомотет просто морочить присутнім голови. А чотири гноми взялися довести це, зафарбувавши одну сторону аркуша червоною фарбою, а другу — голубою. Вони все ще не могли заспокоїтися після того, як осоромилися, пообіцявши збудувати за обмежений час терем для Білосніжки, і сподівалися, що тепер покажуть, на що здатні.

Ось вони піднялися на сцену. Асистенти подали їм банки з червоною і голубою фарбами. А Гомотет запропонував, якщо вже гноми наполягають на двосторонності «листка

Мебіуса», зафарбувати спочатку одну сторону, а потім уже другу.

Гноми працювали вправно, і всі з інтересом спостерігали, як аркуш швидко вкривається червоною фарбою. Та чим далі просувалась робота, тим більше було здивування присутніх: для голубої фарби не залишалося місця. Збігло ще кілька хвилин, і аркуш став увесь червоний.

— Ну то що? Подавати голубу?..— глузливо запитав Гомотет.

Гноми знічено перезирнулися, а найупертіший вирішив пробігти по середині смужки уздовж кільця. Опинившись у вихідній точці, він стояв униз головою, як і той паперовий солдатик, і тільки руками розводив:

— Там справді усе зафарбовано. Голубою нічого робити...

Асистенти допомогли гномам злізти з аркуша. Похнюпившись, вони витерли руки і мовчки пішли на свої місця. Треба ж, аби отак не повезло вдруге.

— Вигадують ці математики. Скоро не знатимеш, скільки двічі по два: чотири чи п'ять,— говорив інший.

Тим часом асистенти винесли на сцену кілька нових аркушів. Гомотет продовжував виступ.

— Всі бачать пунктирну лінію, проведену посередині смужки? Гаразд. Що утвориться, якщо розрізати смужку по цій лінії?..

В залі почулися голоси: вийде два однакових кільця і нічого більше.

— Побачимо, побачимо,— сказав Гомотет.— Замість ножиць листок Мебіуса розрізатиме вогонь...

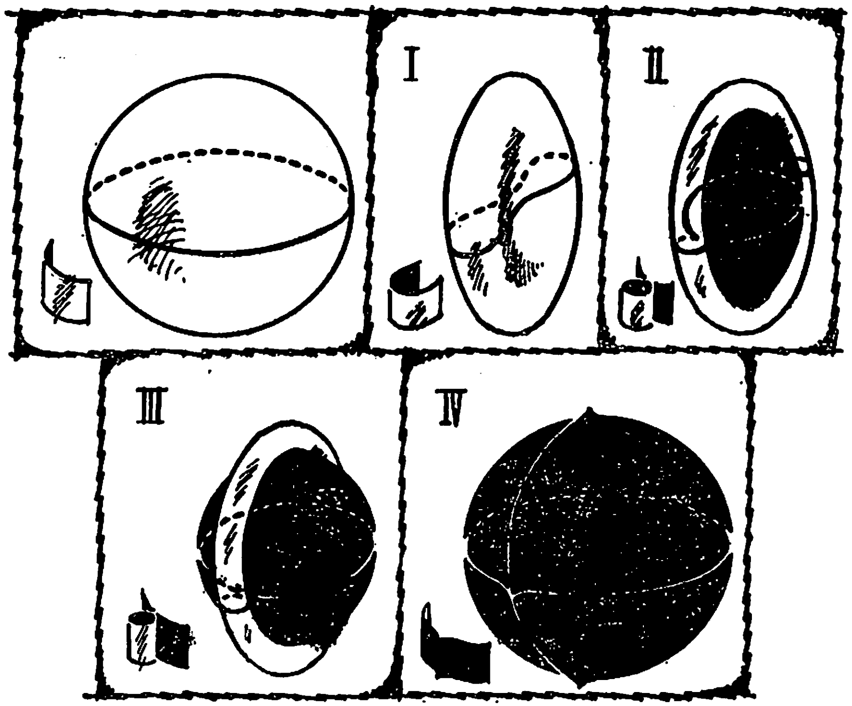
Він підніс до пунктирної лінії сірника, і від нього в оби-

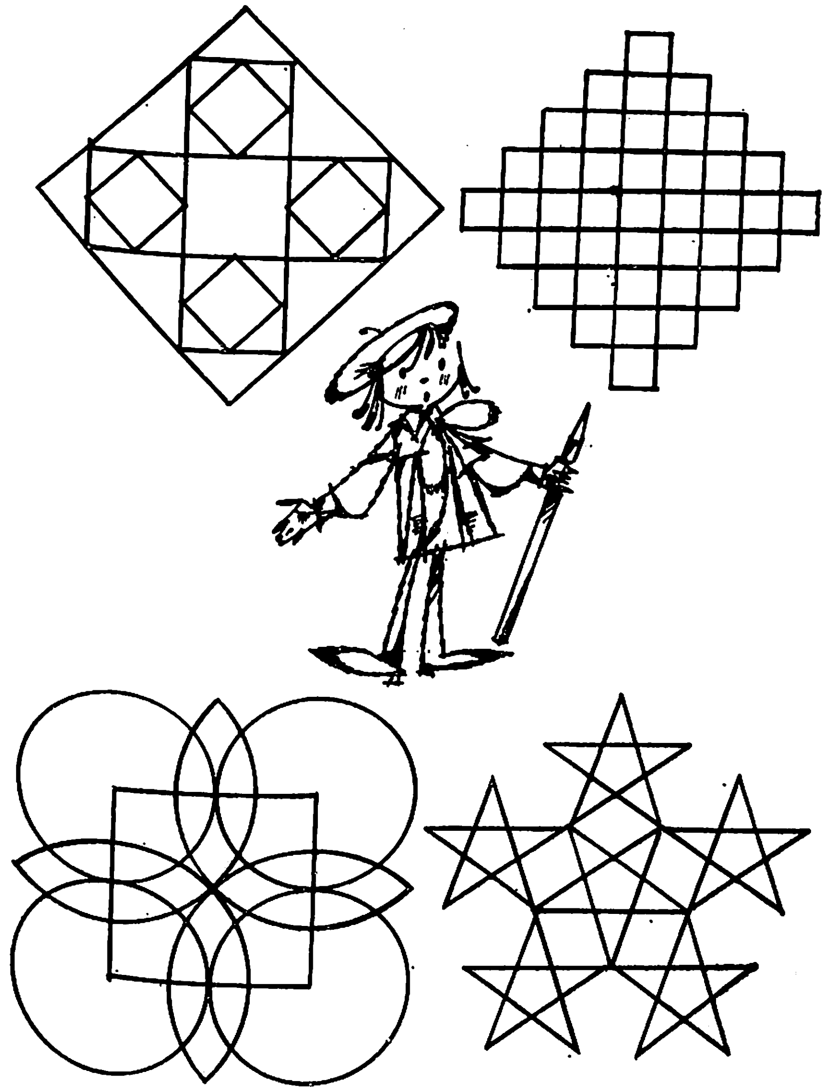
два боки точно по пунктирній лінії побігло два вогники. Вогняне кільце замкнулося, і глядачі вигукнули від здивування. Замість того щоб розпастися на два кільця, аркуш перетворився на одне велике.

Потім Гомотет, теж за допомогою вогню, розрізав точно посередині новоутворене кільце і ще раз, знову посередині, фігуру, яку одержав. Другий аркуш Гомотет розрізав, відступивши на третину від краю, третій — відступивши на четверту частину.

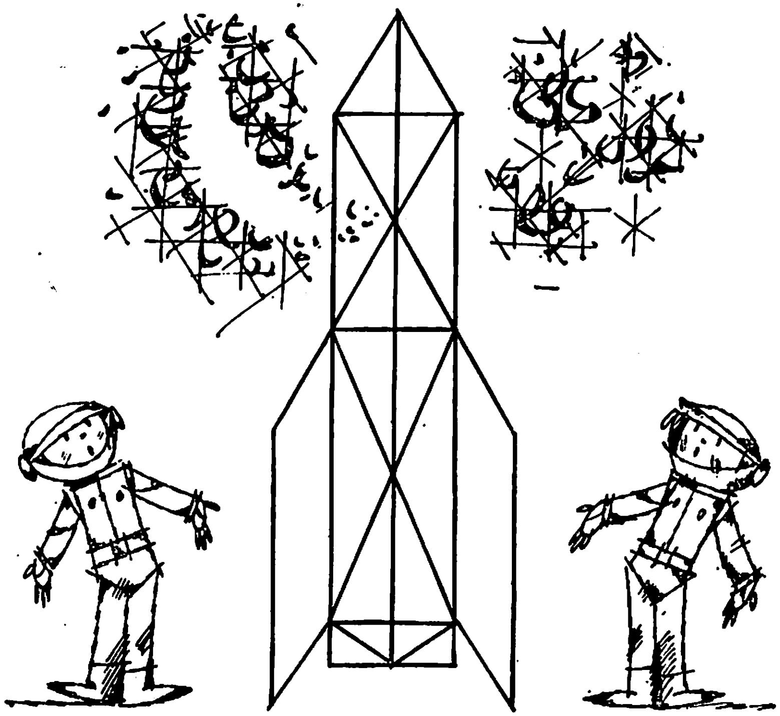
І кожного разу одержував фігури, які перед тим ніхто не міг вгадати.

Та найбільше захоплення викликав заключний номер програми. Гомотет продемонстрував, як з допомогою топології, не розрізаючи, можна вивернути порожнисту кулю. Для цього він узяв великого білого м'яча і попросив повірити на слово, що зсередини м'яч чорного кольору. Вдавлюючи одну з сторін м'яча в іншу, Гомотет швидко перетворив його на великого млинця з потовщеними краями. Млинець все ще залишався білим. Гомотет повернув його до глядачів диском і далі вдавлював одну стінку в іншу. Тут глядачі побачили, як у центрі диска на білому тлі з'явилася ледь помітна сіра плямка. Її видно на малюнку. Така ж пляма виступила і з другого боку диска. Мало-помалу вони збільшувалися, і Гомотет міг уже взяти в руки внутрішню по-





верхню м'яча. Тепер він не стискував кулю, а розтягував. Усі бачили, як, ніби провалюючись, кудись зникала біла частина кулі і, ніби виростаючи з попередньої, збільшувалась внутрішня поверхня — чорного кольору. Невдовзі на поверхні залишилась лише вузька біла смужка. Та Гомотет продовжував розтягувати її — і білі місця зовсім зникли. Гомотет тримав у руках чорного м'яча. Його біла поверхня, яка була зовнішньою, стала внутрішньою.



Потім Гомотет відповів на запитання. Тоді-то й стало відомо, що таємничий «листок Мебіуса» придумав у 1858 році німецький математик і астроном Август Фердінанд Мебіус (1790—1868). Проте ще давньоримські художники знали дивовижні властивості поверхні, яку тепер називають «листком Мебіуса». Вона зображена на одній із мозаїк початку нашої ери. Переказують також, що в середні віки паризькі кравці, беручи на роботу новачків, пропонували їм пришити до подолу спідниці тасьму, зшиту у формі «листка Мебіуса». Очевидно, це робилося заради жарту, бо історія мовчить, чи вдалося комусь із них виконати таке завдання.

Найбільше були здивовані глядачі, коли Гомотет розповів, що «листок Мебіуса» не просто цікава іграшка. В різних країнах зареєстровано багато винаходів, в основу яких покладено односторонню поверхню Мебіуса. Серед них і двосторонній спосіб записування звуку на кінострічку без перемотування плівки та особливі касети для магнітофонних стрічок. А в 1969 році радянський винахідник А. Губайдуллін одержав авторське свідоцтво на нескінченну шліфувальну стрічку, яка працює відразу обома сторонами на основі «листка Мебіуса».

Закінчив Гомотет загальною вікториною.

— Ви багато побачили й почули. А тепер попрацюйте самі,— звернувся він до залу.— Хто швидше накреслить одним розчерком пера лінії, які ви бачите на екрані?..

На екрані з'явилося кілька унікурсальних фігур. Оскільки всі заздалегідь були забезпечені папером і олівцями, кожен з присутніх у залі мав можливість показати свою винахідливість.

Багато чого можна було почути й побачити в Унікурсалії. Та час підганяв: з ракетодрому мала стартувати ракета і взяти курс на Іксовію.

Проте на ракетодромі мандрівників чекала ще одна несподіванка. Місця в ракеті можна було займати, лише розв'язавши ракетодромну задачу: викреслити одним розчерком схему самої ракети. Друзі вже добре освоїлися з такими унікурсальними задачами і вчасно одержали квитки.

На прощання цифроградці побажали щасливого польоту всім гостям і порадили по дорозі відвідати ще одну країну.

— Вона цікава тим,— наполягала Четвірка,— що її населення користується недесятковими системами числення. З першого погляду, це ніби й незручно. Але кібертонці так звикли до них, що й не збираються переходити на позиційну десяткову.

Хоч як поспішали іксовці додому, та вирішили побувати в Кібертонії. Для їхніх друзів — Ігоря, Віктора й Олега — ця мандрівка мала принести користь.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Яким був граф Унікурсалії і маршрут, розроблений Іксом-нульовим?

2. Покажіть, що автобус, начальник застави, секції огорожі і баштовий кран унікурсальні.

3. Чому поштова задача у випадку закритого конверта не має розв'язку, а у випадку відкритого— має?

4. Яким шляхом пройшли подорожні в їдальню?

5. Чому верхня фігура Лістінга не унікурсальна, а нижня унікурсальна?

6. Яке ім'я та прізвище героя дитячих книжок, що допомагає дійти до грота з фресками?

7. Що відповіли іксовці трьом унікурсальцям?

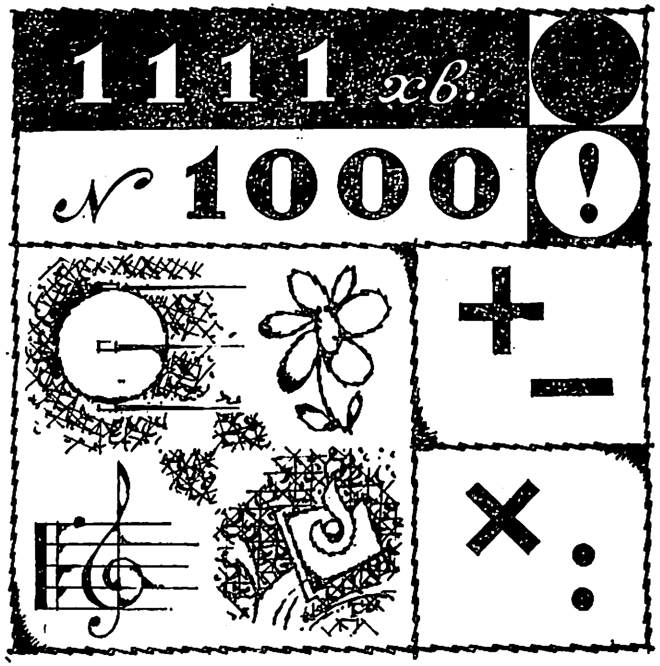
8. Який шлях крізь лабіринт запропонували полоненому? Який найкоротший?

9. Перевірте, що слон, тура і символ теореми Піфагора унікурсальні криві.

10. Повторіть експерименти Гомотета і перевірте, які фігури він одержав.

11. Як розв'язуються задачі з вікторини Гомотета?

12. Як розв'язується ракетодромна задача?



КІБЕРТОНСЬКІ СЮРПРИЗИ

Першим сюрпризом у новій країні, звичайно ж, були роботи, які вправно допомагали виходити з ракети. Коли вже всі вийшли, на стіні одного з будинків ракетодрому засвітилося табло: «Пасажирів, що прибули рейсом з Унікурсалії, просимо пройти до залу № 1000. Через 1111 хвилин відходить автобус до центру міста».

— Ото живуть! — підмітив Ігор.— Де тільки можна розмістити 1000 залів в одному будинку?.. Дивина та й годі!

— А може, вони під землю йдуть,— висловив здогад Віктор.

— Зате автобуса он скільки чекати — аж 18 годин 31 хвилину,— невдоволено буркнув Олег.

Залів виявилось мало, але нумерація їх була якоюсь незвичайною: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111 і 1000.

Не встигли пасажири розсістися по зручних кріслах, як на світловому табло з'явилося нове оголошення: «Автобус подано. Просимо зайняти місця».

— От тобі й 18 годин 31 хвилина...— підморгнув товаришеві Віктор.

Тільки Ікс-нульовий та Ігрек-нульовий не звертали ні на що уваги. Вони гарячково шукали розгадки нумерації залів і таких коротких 1111 хвилин. Тільки-но автобус рушив, іксовці побачили, що й номери будинків були незвичні: 1, 11, 101, 111, 1001, 1011, 1101, 1111...

— Що б це могло означати? — запитав свого товариша Ігрек-нульовий.— Це, певно, якимось чином записаний ряд непарних чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17... Мабуть, при лічбі вони обходяться лише двома цифрами: 0 і 1.

— А в нас аж десять...

— Зажди!— ніби щось пригадавши, зрадів Ігрек-нульовий.— Наша ж система десяткова. А їхня, мабуть, двійкова...

— Хіба таке може бути? — запитав Верхоглядько.

— А чому б і ні? Все залежить від того, яке число взяти за основу системи числення, тобто скільки простих одиниць становлять одну одиницю другого розряду. У нас десять одиниць першого розряду складають одиницю другого розряду — десяток. У кібертонців — лише дві. Ось чому так дивно пронумеровано зали на ракетодромі. Перший був № 1, а другий № 10, бо $1+1=10$...

— Як це так $1+1=10$? — хмикнув Верхоглядько.— І в дитячому садку знають, що $1+1=2$.

— Правильно! А в двійковій системі числення якраз дві одиниці першого розряду становлять одну одиницю другого, тобто 10.

— Як же тоді розпізнати, де наш десяток, а де кібертонська одиниця другого розряду? — перепитав Верхоглядько.

— А ти молодчина!.. Щоб не було плутанини, писатимемо біля чисел, записаних в двійковій системі числення, внизу маленьку цифру 2. Тоді правильним буде запис $1+1=10_2$.

— І який же був номер нашого залу в десятковій системі числення?

— Всього-на-всього восьмий,— відповів Ікс-нульовий.

— Восьмий, а записаний як 1000?

— Не як 1000, а як 1000_2.

— Все одно тут щось не так.

— Ні, правильно, друзі. Що таке 1000_2? Це $10_2 \cdot 10_2 \cdot 10_2$. А ми вже знаємо, що $10_2=2$. Отже $2 \cdot 2 \cdot 2$ справді дає 8.

— Це тому так швидко промайнули 1111 хвилин? — знову обізвався Верхоглядько.

— Так, бо це було тільки 1111_2 хвилин. Власне 1000_2+ $+100_2+10_2+1=8+4+2+1=15$...

— І що, над числами, записаними в цій системі, можна виконувати якісь дії?

— Всі ті самі, що й у звичній нам системі.

— А як це робиться?

— Будь ласка,— заходився пояснювати Ігрек-нульовий.— Припустимо, нам треба скласти два числа:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ +\quad 11011_2 \\ \hline 1001000_2 \end{array}$$

Почнемо, як звичайно, з розряду одиниць $1+1=2=10_2$. Нуль пишемо, а дві одиниці першого розряду — це одиниця другого розряду. Додаємо одиниці другого розряду: $1+$ $+0+1=2=10_2$. У другому розряді пишемо 0, а дві одиниці другого розряду дають одиницю третього розряду. Додаємо одиниці третього розряду: $1+1+0=10_2$. Тепер додамо одиниці четвертого розряду: $1+1+1=3=2+1=10_2+1_2=11_2$. Отже, в четвертому розряді пишемо одиницю, а одна одиниця йде на п'ятий розряд. Виконуємо дії в п'ятому розряді: $1+1+0=10_2$ і, нарешті, в шостому: $1+1=10_2$.

— А як віднімати?

— Прошу...

$$\begin{array}{r} 10110_2 \\ -\quad 1011_2 \\ \hline 1011_2 \end{array}$$

Все робиться майже так, як і в десятковій системі числення. Тільки якщо в якомусь розряді зменшуваного нема одиниці, то при відніманні одиниці відповідного розряду від'ємна одиниця вищого розряду дає нам не десять одиниць нижчого, а лише дві. Система ж двійкова!.. Відтак легко здогадатися, як множити. Ось погляньте:

$$\begin{array}{r} \times\ 1011_2 \\ 101_2 \\ \hline 1011 \\ 1011 \\ \hline 110111_2 \end{array}$$

Так само й ділити... Адже в частці можуть бути лише нулі й одиниці. Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} -\ 110010_2 & 101_2 \\ \cline{2-2} 101 & 1010_2 \\ \hline -\ 101 & \\ 101 & \\ \hline 0_2 & \end{array}$$

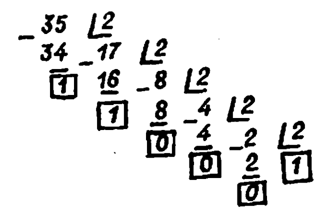
Якщо ж число має дробову частину, теж нічого особливого. Ось два приклади:

$$\begin{array}{r} +\ 1100011{,}011_2 \\ 10011{,}111_2 \\ \hline 1110111{,}010_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1100111{,}1101_2 \\ 11{,}011_2 \\ \hline 11001111101 \\ 11001111101 \\ +\ 11001111101 \\ 11001111101 \\ \hline 101011110{,}0101111_2 \end{array}$$

— А як же переходити від однієї системи числення до іншої?— поцікавився Олег.— Не вміючи робити це, не знатимеш, з якими числами маєш справу.

— А це вже задачі іншого характеру. Та навчимося і їх розв'язувати. Нехай число 35 треба записати в двійковій системі: $35 = x_2$. Розв'язують задачу послідовним діленням:



— Ви, певне зрозуміли,— вів далі Ігрек-нульовий,— чому саме так виконується обчислення? Коли ми 35 поділили на 2, то встановили, що в результаті буде 17 разів по два, сімнадцять двійок, тобто сімнадцять одиниць другого розряду і ще одна одиниця першого. Але ж у двійковій системі в будь-якому розряді може бути лише одна одиниця або й зовсім не бути. А в нас їх аж 17! Отже з них можна виділити одиниці третього розряду. Це знову робимо шляхом ділення 17 на 2 — $17 : 2 = 2 \cdot 8 + 1$. Це означає, що ми одержали 8 одиниць третього розряду і залишилася ще одна одиниця в другому розряді. Далі повторюємо те ж саме. Таке послідовне ділення неповних і повних часток на нову систему числення (число 2) продовжуємо, аж доки в частці не одержимо 1. Вона й буде одиницею найвищого розряду.

В результаті: $x = 100011_2$.

Перехід від двійкової системи до десяткової можна виконувати й послідовним множенням. Наприклад: $100011_2 = x_{10}$

$$
\begin{array}{l}
100011_2 \\
\times 2 \\
\hline
2+0=2 \\
\quad \times 2 \\
\hline
\quad 4+0=4 \\
\qquad \times 2 \\
\hline
\qquad 8+0=8 \\
\qquad\quad \times 2 \\
\hline
\qquad\quad 16+1=17 \\
\qquad\qquad \times 2 \\
\hline
\qquad\qquad 34+1=35
\end{array}
$$

Як бачите, ми множимо одиницю найвищого розряду на 2 (це основа старої системи числення) і до одержаного добутку додаємо (якщо там є) одиницю нижчого розряду. Оскільки в нас її не було, то ми додали нуль. Одержану суму (число 2) знову множимо на 2 і до одержаного добутку (числа 4) додаємо нуль, бо в четвертому розряді теж немає одиниці, і т. д.

А можна перейти від двійкової системи до десяткової, виконавши ті ж самі обчислення, але в дещо іншому порядку. Адже $100011_2 = 1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2+1\cdot2^0 = 1\cdot2^5+1\cdot2+1\cdot1=32+2+1=35$.

Зрештою, можна перейти від двійкової системи до десяткової і третім способом. Теж діленням, але в двійковій системі. Для цього треба лише нову систему числення — число 10 записати в двійковій. Бо не будемо ж ділити числа, з яких одне записане в двійковій, а друге в десятковій. Це все одно, що додати дроби з різними знаменниками, не

звівши їх до спільного. Легко перевірити, що $10=1010_2$. Тому обчислення цим способом матиме такий вигляд:

$$
\begin{array}{r|l}
100011_2 & 1010_2 \\
\cline{2-2}
-\;1010 & 11_2 \leftarrow \text{число одиниць другого розряду} \\
\cline{1-1}
1111 & \\
-\;1010 & \\
\cline{1-1}
101_2 & \leftarrow \text{число одиниць першого розряду.}
\end{array}
$$

Але $101_2=5$, а $11_2=3$. Тому, як і слід було чекати, знову одержимо число 35...

— Дивовижна арифметика! — не втримався Віктор. — Ну я розумію, наша десяткова система числення... Тут уся справа в кількості пальців на наших руках. Іван Федорович розповідав, що коли б людина мала на обох руках 11 пальців, була б прийнята одинадцятична система числення. Але навіщо ж двійкова?

— Щоб поморочити нам голови,— так, аби сказати щось, промовив Верхоглядько.

— Теж придумав! — заперечив Ігор.— Комусь поморочити день, а собі усе життя? Тут щось інше...

Автобус зупинився біля високого будинку, і з гучномовця почулося: «Просимо оглянути Центральний обчислювальний центр Кібертонії!»

— Отут і з'ясується все,— сказав Ікс-нульовий.— Послухаємо екскурсовода.

Екскурсоводом виявився ввічливий і говіркий робот. Він чемно привітався, відрекомендувався, назвавши свій номер 10101_2. Поцікавився першими враженнями від поїздки по Кібертонії.

— Видно, що ви працьовиті й винахідливі,— відповів за всіх Віктор.— От тільки чому відмовилися від зручної і всім зрозумілої десяткової системи числення й придумали двійкову?

— Бо двійкова найпростіша. Подивіться, які куці в ній таблиці додавання і множення:

$$1+0=1_2 \qquad 1\times 0=1_2$$
$$1+1=10_2 \qquad 1\times 1=1_2$$

І придумали її не ми. Може, спочатку у всіх народів була саме така система числення. Потім люди придумали інші: п'ятіркову, десяткову, дванадцяткову... Для вас виявилася найзручнішою десяткова, хоча були математики, які з успіхом користувалися двійковою. Наприклад, середньовічний математик Леонардо Пізанський розв'язував задачі саме завдяки двійковій системі. А шотландський математик Джон Непер (1550—1617), винахідник логарифмів, описав лічильну дошку, за допомогою якої виконуються операції множення, ділення, піднесення до квадрата і добування квадратного кореня також у двійковій системі числення. Нарешті великий німецький математик Готфрід Лейбніц (1646—1716) розробив двійкову арифметику і навіть запропонував проект медалі на її честь. Як бачите, двійкову систему видумали не ми. У нас вона, може, народилася вдруге, щоб працювати на повну потужність...

— Працювати з нулем і одиницею?

— Можу одразу ж пояснити,— сказав робот,— але краще, коли ви спершу оглянете наш обчислювальний центр.

Та ніхто не захотів чекати. Усім кортіло тут же взнати, для чого кібертонці створили таку дивовижну арифметику.

— Гаразд!..— здався екскурсовод.— Але дуже коротко. Двійкова система числення — не примха кібертонців, а поки що найпростіший спосіб кодування чисел для виконання над ними арифметичних дій на ЕОМ.

— І що, повідомляючи ЕОМ числові дані, обов'язково треба від когось їх приховувати?

— Є такі числа, які слід приховувати. Та поки що облишмо їх. Про кодування не можна говорити без слова «інформація», яким користувався ще давньоримський оратор Ціцерон.

До середини нашого століття в це слово вкладався приблизно однаковий зміст: повідомлення про стан речей, якусь подію, ситуацію. Кібернетики ж зробили відкриття: інформаційні процеси існують в усіх живих організмах, починаючи від мікроскопічного віруса. Не даймо можливості черв'якові обмінюватися інформацією з оточуючим середовищем — він швидко загине. З'явився навіть афоризм: «Життя — це інформація!» Звичайно, потоки інформації в людському суспільстві незмірно складніші і мають іншу природу, ніж, наприклад, біологічна інформація, що циркулює в мурашнику. Але в усій живій матерії вона служить одній меті — керуванню. Перш, ніж прийняти якесь рішення, ми обмірковуємо ситуацію, щось вивіряємо, порівнюємо, тобто збираємо і опрацьовуємо інформацію. Нежива матерія не може використовувати її для керування — у неї нема таких процесів. Але різноманітність оточуючого нас світу, хоч би частково, сприймають усі без винятку живі істоти і, зрозуміло, створені людьми прилади.

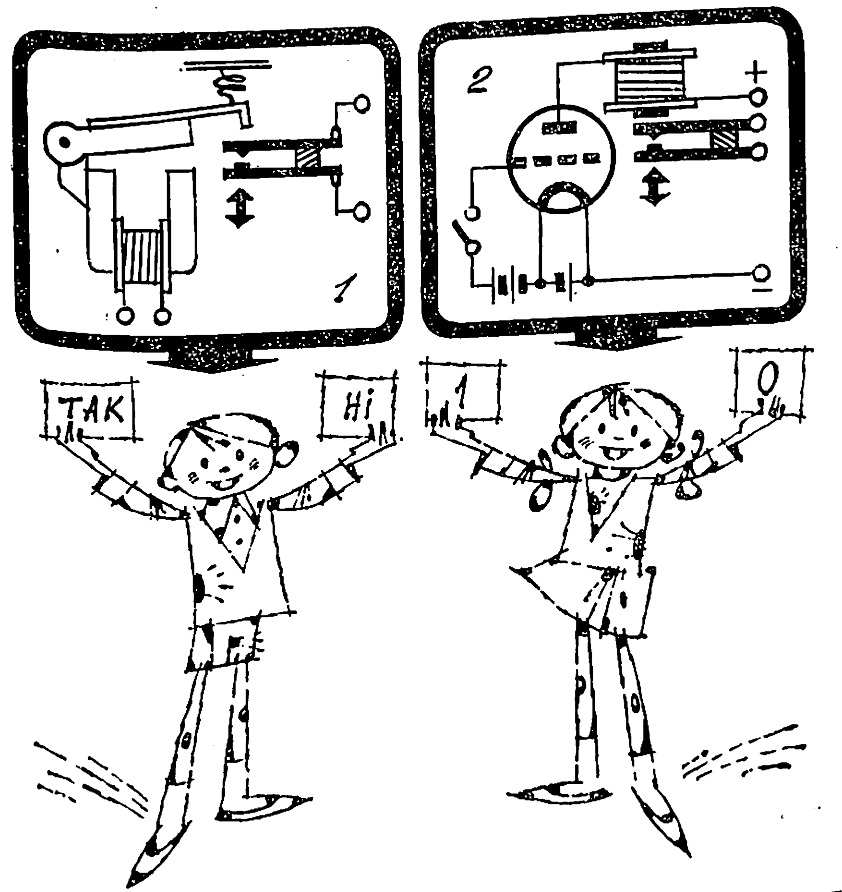
Візьмімо такий приклад: вивчаючи зірку, ми використовуємо інформацію, яку вона нам шле про себе. А Всесвіт при цьому відіграє роль пам'яті.

Зірка може вибухнути, згаснути, а випромінена нею інформація ще мільярди років зберігатиметься в пам'яті Всесвіту для можливих, так би мовити, адресатів.

І в докібернетичну епоху люди знали машини, які не могли працювати без інформаційних процесів. Та особливо яскраво проявилися вони в ЕОМ, які не тільки опрацьовують і зберігають, а й виробляють нову інформацію. І тут без кодів не обійтися. Щоправда, в більшості реальних задач механізми кодування набагато складніші від тих, що розгадав Шерлок Холмс в «Танцюючих чоловічках» чи Легран з оповідання «Золотий жук» Едгара По.

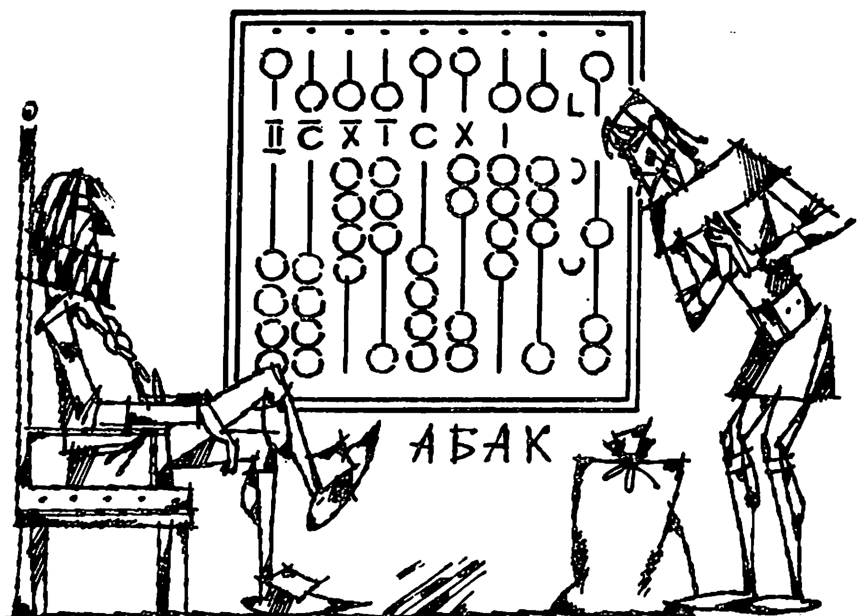
Отож, не в наших інтересах кодувати інформацію для ЕОМ так, щоб її було важко зрозуміти і перетворити. Максимальна простота і швидкодія, економічність і надійність ЕОМ були вже закладені першими конструкторами їх. Найкраще всі ці вимоги задовольняє система двійкового кодування, в якій інформація втілюється послідовностями лише двох символів — цифр 0 і 1. Адже в ЕОМ найкраще забезпечити саме два стійких стани. Власне, чим менше станів, у яких ми перебуваємо, тим стійкіший кожен із них. Ясна річ, ідеальним був би один стан — «абсолютно стійкий». Але така стійкість ні до чого. Менш стійким елементом, з допомогою якого можна вести лічбу, є елемент з двома робочими станами — двопозиційний пристрій. Найпоширенішими такими пристроями є реле. Вони можуть бути механічні, електронні, електромеханічні, фотоелектричні, гравітаційні. Ось схеми двох реле: 1 — електромагнітне, 2 — електронне. Електромагнітне працює в такий спосіб: коли

по котушці, намотаній навколо осердя, протікає струм — залізна платівка (якір) притискується до осердя і замикає один із контактів. Це перший робочий стан реле. Якщо струму в колі немає, платівка відходить і розмикає коло. На такому ж принципі забезпечення двох стійких станів



заснована робота усіх реле. Один із станів може означати лише «так», тоді другий — «ні». Або,— що для нас важливо,— «0» чи «1». Тому в Кібертонії двійкова система і стала загальноприйнятою. Адже електронне реле може за 1 секунду кілька мільярдів разів замкнути і розімкнути струм в електричному колі, і ми можемо з фантастичною швидкістю записувати, зчитувати двійкові числа і, як ви вже здогадалися, виконувати над ними арифметичні операції. Але все по порядку. Прошу, заходьте!..

Всі зайшли до просторої зали. І робот продовжував розповідь:

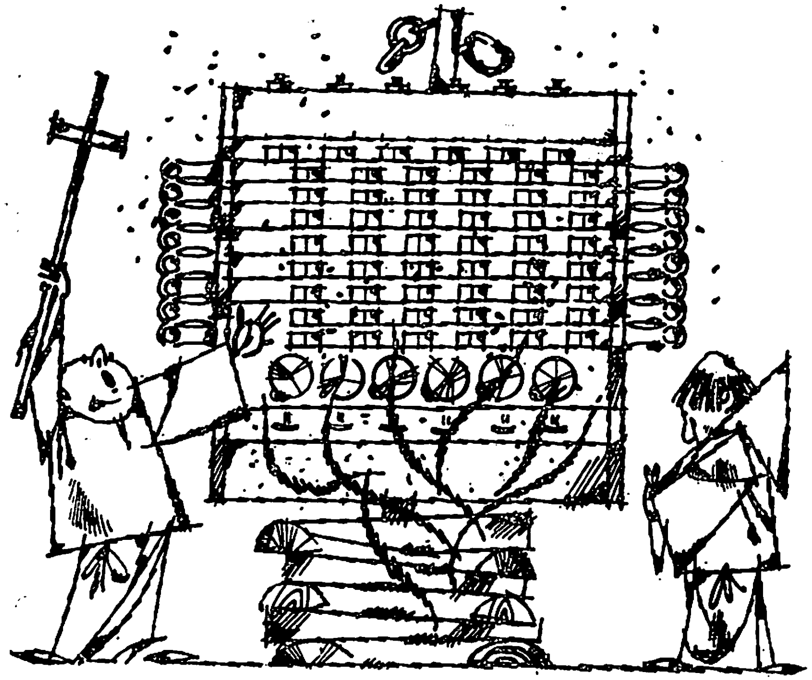


— Мене попередили, що у вас обмаль часу, тому я не зупинятимусь на історії обчислювальної техніки. Обмежусь лише поясненнями до деяких картин, почеплених тут на стінах. Не дивуйтесь, скажімо, оцьому зображенню. Наші ЕОМ не впали з неба. Вони народилися з найпростіших обчислювальних приладів, якими людина користувалася споконвіку. А найпростішим серед них були ті ж самі пальці. Так, так. Вони були не тільки засобом лічби, а й чи не першою обчислювальною машиною...

А тут зображено абак — обчислювальну машину античного світу й середньовічної Західної Європи. Спочатку це була звичайна дошка, посипана піском і розділена на смуги, по яких пересували лічильні марки — камінці, кісточки, монети. Пізніше лічильні марки нанизували на дріт, який натягували на дерев'яну раму, або клали ці марки в заглибини, пороблені в дошці. Можливо, що в античному світі були й складніші обчислювальні машини. В 1901 році вчені підняли з дна Середземного моря уламок загадкового інструмента. Після ретельного вивчення вчені дійшли висновку, що це рештки складної вимірювальної і обчислювальної машини...

Своєрідний засіб лічби та обчислень винайшли й аборигени Південної Америки. Для лічби і обчислень вони використовували лічильні вірьовки або ремінці з вузлами-«кіпос».

Великим кроком у розвитку обчислювальної техніки стала лічильна машина професора Тюбінгенського університету Вільгельма Шіккарда (1592—1635). За вироком інквізиції її було знищено, і до нас дійшли лише авторські рисунки цього дивовижного винаходу.



Через чотири роки після смерті Шіккарда Блез Паскаль (1623—1662) створив лічильну машину нової конструкції.

Але найвиразніше ідея сучасних ЕОМ була закладена в проекті аналітичної машини англійського математика і винахідника Чарлза Беббеджа (1792—1871). Проект, як на той час, був такий незвичайний, що його не вдалося реалізувати. Просто потреби в такій складній машині не було. Машина Беббеджа, хоча й лишилася на папері, але вважається прабабусею наших ЕОМ. А бабуся почала працювати в 1937 році, важила вона понад 4,5 тонни, додавання і від-

німання 23-цифрового числа виконувала за 0,3 секунди, множила за 6. Перша радянська потужна ЕОМ — БЭСМ почала працювати 4 січня 1952 року. А далі розвиток ЕОМ набрав неймовірної швидкості.

На зміну велетням-обчислювачам, які працювали на електронних лампах і споживали багато електроенергії, прийшли комп'ютери на напівпровідниках. В основу ЕОМ третього покоління лягли вже не електронні лампи чи напівпровідники, а інтегральні схеми. В одному кубічному міліметрі таких схем вміщуються мільйони елементів. А на черзі — комп'ютери п'ятого покоління!

Сьогодні навіть важко назвати галузь промисловості чи господарської діяльності людини, де б не допомагали їй електронні помічники. Вони варять сталь, шукають найкращі траси для залізниць, керують польотами міжпланетних станцій, доводять теореми, малюють. Понад 3 000 професій! Мікро-ЕОМ ближчим часом знайдуть застосування в 200 000 всіляких пристроїв і установок.

У 1986 році радянські спеціалісти створили ЕОМ, яка виконує 125 мільйонів операцій за секунду! А в планах — мільярд, десять мільярдів операцій...

— Оцей малюнок,— показав робот-екскурсовод,— створила радянська ЕОМ БЭСМ-6. Вона працює в Дубні під Москвою. Цей напівпровідниковий «математик» виконує мільйон операцій за секунду. Результати, які людина могла б одержати за десять років, працюючи по 24 години на добу, БЭСМ-6 видає за кілька хвилин... Дивлячись на сучасну ЕОМ,— розповідав робот,— ви майже не побачите рухомих деталей. У провідниках біжить струм. Як ви знаєте, надзвичайно швидко — 300 тисяч кілометрів за секунду.

Ніхто не може вгледіти, коли відбувається та або інша арифметична операція. Як це робиться, можна побачити лише на моделях. Але щоб зрозуміти це, треба навчитися розмовляти з машиною. Та це краще зробити в лекційному залі. Прошу на кілька хвилин стати учнями, а вже потім спостерігачами роботи електронного математика.

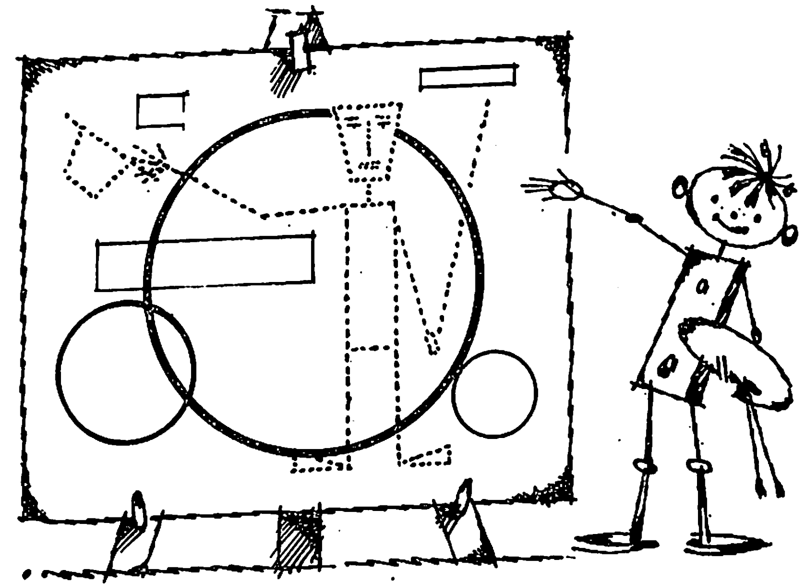
— Почнемо із одного дуже важливого математичного поняття. Латинізована форма імені узбецького математика Мухаммеда аль-Хорезмі (787 — бл. 850) — Algorithmus спершу означала десяткову систему числення і засновану на ній арифметику. Тепер алгоритмом називають будь-яке точно сформульоване правило, як із довільних вихідних даних одержати якийсь цілком визначений результат. Звичайно, це не означення, а лише пояснення складного наукового поняття, але формування його не завершено й нині. Окрім всього, можна навести безліч алгоритмів, якими користуємося ми в математиці й повсякденному житті.

Ледве народившись, людина потрапляє в оточення алгоритмів. Скажімо, у книзі по дитячому харчуванню читаємо: «Перед годуванням дитини в пляшечку з кефіром влийте пастеризований прохолодний відвар рису або іншої крупи і цукровий сироп; одержану суміш збовтайте і підігрійте.

Кефір — 5 г, відвар — 45 г, цукровий сироп — 5 г. Суміш вживається за призначенням лікаря...»

Зрозуміло, це — алгоритм.

На телефонах-автоматах можна прочитати інструкцію, яка є алгоритмом користування цим автоматичним пристроєм. Подібних прикладів багато. Дехто вважає, що ми живемо в алгоритмічних джунглях. Але це не так. Алгоритми — дороговкази, які допомагають нам не загубитися.



За певними алгоритмами виконують арифметичні операції над числами у десятковій позиційній системі числення, розв'язують рівняння, нерівності та їх системи, переводять числа, записані в одній системі числення, в іншу. Інструкції на телефонах-автоматах — також алгоритми. Зрештою, ми користуємося певним алгоритмом дій, коли переходимо міську вулицю; алгоритмами є рецепти, за якими в аптеках виготовляють ліки. Отже, без перебільшення можна сказати: вся наша діяльність є пошуки і виконання якихось алгоритмів.

Розв'язування задачі ЕОМ так само полягає у виконанні нею певного алгоритму, тобто цілком визначеної послідовності операцій. При цьому під операцією розуміють не тільки арифметичні та алгебраїчні дії, а й такі, як порівнювання чисел, перехід від виконання однієї операції до виконання іншої тощо.

Запис алгоритму може бути більш або менш детальним — у залежності від того, які операції вважати елементами алгоритму.

Щоб скористатися послугами ЕОМ, доручити їй здійснення певного алгоритму, його потрібно представити у формі програми, в якій правильно, чітко і однозначно сформульовано завдання. ЕОМ, звичайно, не людина, вона не може домислювати те, що не договорено. Тому програма має бути послідовністю конструктивних команд, які містять інформацію про кожну елементарну операцію і числа, над якими здійснюється операція.

Алгоритми для розв'язування математичних задач здебільшого подаються у вигляді формул, де коротко вказується, які операції, над якими числами і в якій послідовності слід виконувати. Мова формул така ж зрозуміла для нас, як і природна. А це означає, що нам відомі основи однієї з найважливіших алгоритмічних мов, переваги якої — стислість і значна інформаційна ємність.

Наведімо приклади алгоритмів розв'язання деяких задач і уточнімо вимоги до них, щоб ці алгоритми можна було доручити виконати ЕОМ.

Приклад 1.

Обчислити значення $y = \frac{2x+3}{3x-4}$ (1) при $x = 1$.

Цю задачу можна розв'язати, користуючись формулою (1).

Все ж її не можна вважати алгоритмом розв'язування

поставленої задачі, бо порядок виконання окремих операцій до деякої міри невизначений. Наприклад, можна спочатку обчислити чисельник виразу $(2x+3)$, а потім знаменник $(3x-4)$, а можна і навпаки.

Така зміна порядку дій не впливає на остаточний результат.

Отже формула (1) не є точною інструкцією процесу розв'язування задачі, який ми пов'язуємо з поняттям алгоритму. Щоб зробити формулу (1) такою інструкцією, необхідно прийняти деякі додаткові погодження про порядок виконання окремих операцій. Скажімо, домовитися виконувати обчислювальні операції з урахуванням загальноприйнятих правил порядку виконання арифметичних дій — послідовно зліва направо і спершу в чисельнику, а потім у знаменнику. При виконанні цих умов формулу (1) уже можна розглядати як запис алгоритму розв'язування поставленої задачі.

Алгоритми розв'язування тієї ж задачі можна подати в іншій — розгорнутій формі.

Таблиця 1.

Опис дій

1. Помножити x на число 2.
2. До результату дії 1 додати число 3.
3. Помножити x на число 3.
4. Від результату дії 3 відняти число 4.
5. Результат дії 2 розділити на результат дії 4.

Недоліком таблиці 1 є її багатослів'я, хоча в ній вказується порядок виконання дій і вона достатньо універсальна. Адже словами можна записати набагато більше, ніж формулою.

Увівши деякі умовні позначення для проміжних обчислень, таблицю 1 можна записати в лаконічній формі. Позначимо результат дії 1 через a, а саму дію опишемо так: «покласти a рівним $x\cdot 2$» і позначимо символом: $x\cdot 2\to a$. По-іншому цей запис можна прочитати ще так: «присвоїти a значення $x\cdot 2$» і потім значення величини a вважати число $x\cdot 2$. Позначивши результати другої, третьої і четвертої дій відповідно через b, c, і d, таблицю 1 можна записати так:

Таблиця 2.

1. $x\cdot 2\to a$
2. $x+3\to b$
3. $x\cdot 3\to c$
4. $c-4\to d$
5. $b:d\to y$

Приклад 2.

Означення степеня додатного числа a з цілим показником n, $y=a^n$:

$$y=\begin{cases}\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ разів}}, & \text{якщо } n>0\\ 1, & \text{якщо } n=0\\ \dfrac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ разів}}}, & \text{якщо } n<0\end{cases}\qquad(2)$$

теж можна розглядати як запис алгоритму обчислення степеня a^n за заданою основою a і показником n, бо вона є, по суті, точною інструкцією, як обчислити a^n. Але у формулі (2) не визначено не тільки порядку дій, а й самих дій. Так, для обчислення a^2 ми маємо керуватися першим рядком формули (2), для обчислення ж a^{-2} — третім рядком.

Ось розгорнута форма алгоритму обчислення a^n:

Таблиця 3.

Опис дій

1. Якщо $n<0$, перейти до дії 4; в протилежному випадку перейти до дії 2.
2. Якщо $n=0$, перейти до дії 5; в протилежному випадку перейти до дії 3.
3. $\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ разів}}\to y$
4. $\dfrac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ разів}}}\to y$
5. $1\to y$

В алгоритмі прикладу 1 дії виконуються в тому порядку, в якому вони були записані в таблицях 1, 2. У другому прикладі появилися дії (1 і 2), в яких не обчислюється значення якоїсь величини, а визначається (в залежності від певних умов: $n<0$, чи $n=0$) наступна дія. Так з'являється ще одна елементарна операція алгоритму — «передача керування».

Після операції 1 і 4 в алгоритмі-таблиці 3, тобто після обчислення, наприклад, $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ або $3^{-3}=\frac{1}{3\cdot3\cdot3}=$

$=\frac{1}{27}$, постає запитання: «А які дії виконувати далі?» Але ми не ставимо його тільки тому, що нам очевидно: робота алгоритму закінчена, задача розв'язана. Тільки алгоритм не може апелювати до очевидності. Він має сам повідати, що мусить бути виконано в процесі реалізації. Тому, щоб зняти неточність, невизначеність таблиці 3, необхідно ввести ще одну операцію, яка описується словом «кінець». Виконати її означає закінчити виконання всього алгоритму. Тоді алгоритм обчислення $y=a^n$ матиме форму:

Таблиця 4.

Опис дій

1. Якщо $n<0$, перейти до дії 4; в протилежному випадку перейти до дії 2.
2. Якщо $n=0$, перейти до дії 5; в протилежному випадку перейти до дії 3.
3. $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{разів}}\rightarrow y$, перейти до дії 6.
4. $\dfrac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{разів}}}\rightarrow y$, перейти до дії 6.
5. $1\rightarrow y$, перейти до дії 6.
6. Кінець.

Або — в компактнішій формі, без вказівки на наступну дію, якщо ця дія записана безпосередньо після розглядуваної:

Таблиця 5.

Опис дій

1. Якщо $n<0$, перейти до дії 4.
2. Якщо $n=0$, перейти до дії 5.
3. $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{разів}}\rightarrow y$, перейти до дії 6.
4. $\dfrac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{разів}}}\rightarrow y$, перейти до дії 6.
5. $1\rightarrow y$, перейти до дії 6.
6. Кінець.

Наведені приклади показують, що процес, описаний алгоритмом, поділяється на окремі кроки, кожен із яких є командою певної дії, зокрема, й однієї арифметичної операції. Дія, задана кожним кроком, має бути настільки елементарна, щоб кожен виконавець алгоритму умів цю дію правильно виконати і в усіх випадках було одержано однакові результати. Послідовність виконання дій алгоритму, «траєкторія» виконання його підпорядкована правилам: а) виконання розпочинається з дії, яка є першою у запису; б) в описі будь-якої чергової дії може бути вказана наступна; якщо в запису така не вказана, то після виконання її мусить виконуватися та, яка записана безпосередньо після виконуваної в даний момент. Єдиним винятком із двох попередніх правил є дія «кінець», що не має наступної; виконання останньої означає виконання всього алгоритму.

Отже, алгоритм має бути настільки точною інструкцією, аби виконавець міг здійснити її, уміючи провести кожну елементарну операцію, не проявляючи таких своїх якостей, як винахідливість, уява, розуміння суті задачі, кмітливість тощо. Саме завдяки цим характеристичним рисам поняття алгоритму відіграє визначальну роль в усіх питаннях, пов'язаних з використанням ЕОМ. Йдеться про створення такої форми запису, яку могли б «розуміти» і виконувати ЕОМ — феноменальні обчислювачі поки що позбавлені рис, притаманних творчій діяльності людини.

Така форма називається програмою, а галузь математики, що вивчає закони і правила побудови «машинних» алгоритмів — програмуванням.

Розгорнуті записи алгоритмів практично використовуються не в формі словесних або лаконічно записаних таблиць, а в більш наочних, образних формах, що називаються схемами. Так, схема алгоритму обчислення значення $y = \frac{2x+3}{3x-4}$ (див. стор. 122) матиме вигляд, який ми бачимо на стор. 129.

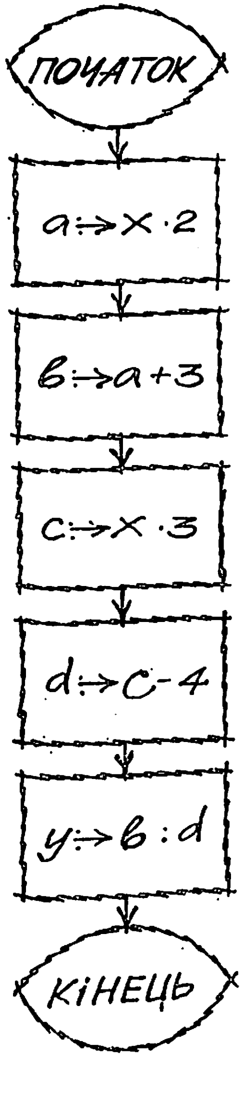
Приклад 3. Заповнити порожні місця в таблиці.

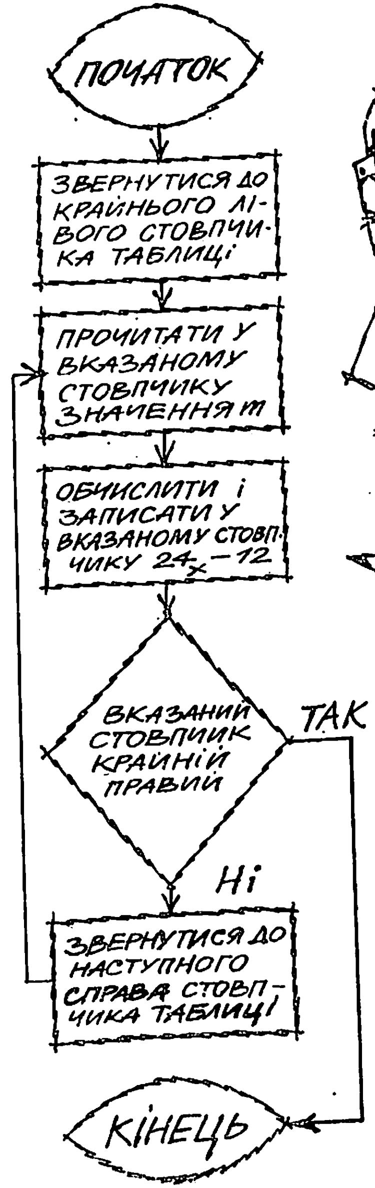
Таблиця 6.

x	1	2	3	4	5
24x — 12					

При якому значенні x вираз 24x—12 дорівнює 84?

Опишемо розв'язування першої частини цієї задачі мовою схеми. На ній записи в фігурах виражають певні дії, стрілки вказують на послідовність виконання їх. На схемі в овалах записано фіктивні «дії» — «початок» і «кінець» роботи алгоритму. З блоку «початок» стрілка лише виходить,

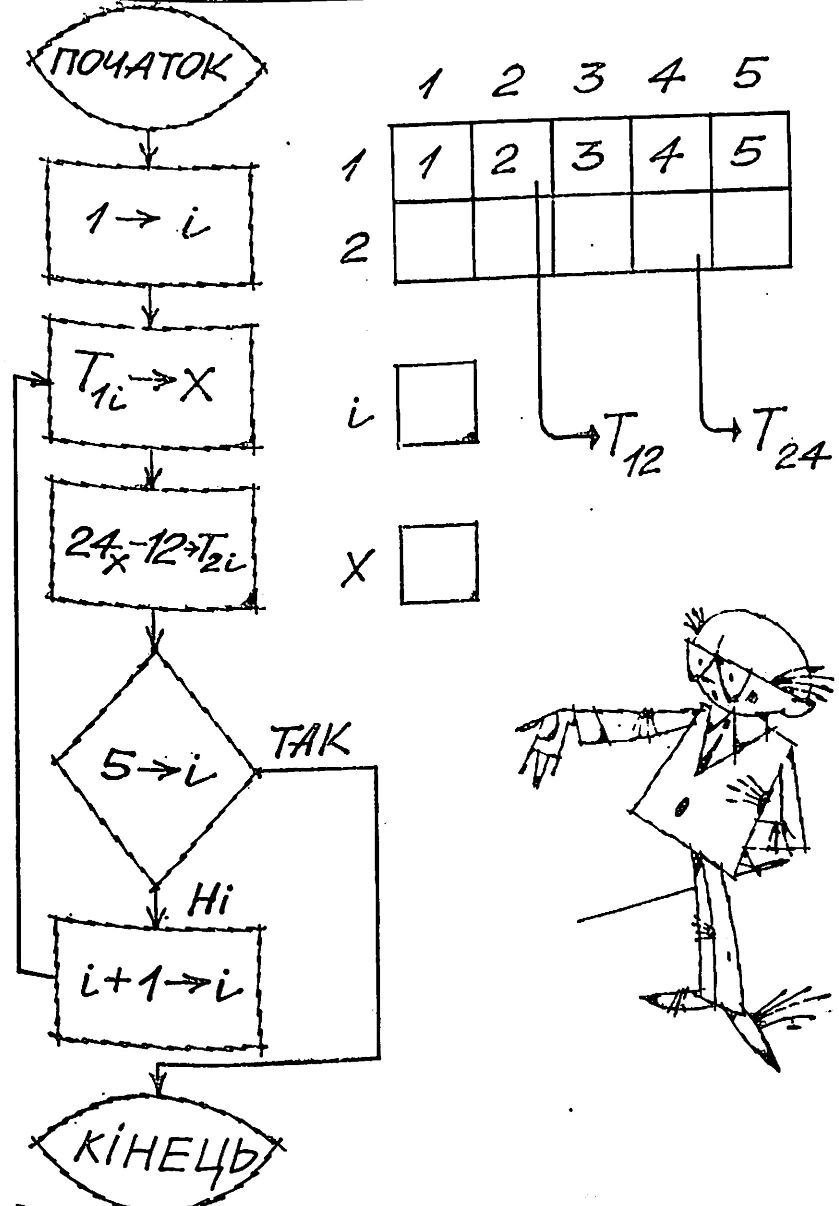




а в блок «кінець» лише входить. У будь-якій схемі може бути лише один «початок» і лише один «кінець». У прямокутниках записано виконувані дії — обчислення за формулою, словесні вказівки. В прямокутник може входити кілька стрілок, але виходити лише одна, що вказує на наступну по порядку дію. У ромб записана операція перевірки виконання умови. В нашому прикладі — перевірка: чи є крайнім правим одержаний стовпець. Результатом цієї операції може бути відповідь: «так» (якщо умова виконана), або — «ні» (якщо умова не виконана). Тому в ромб, як і в прямокутник, може входити кілька стрілок, а виходити лише дві — з результатом «так» або «ні».

Особливістю роботи з побудованою схемою є формально-механічне виконання передбачених нею дій, починаючи від блоку «початок». Все ж виконання такої схеми (назвемо її першою) ще не можна доручити ЕОМ. У побудованій схемі вказівки на виконання певних операцій записані українською мовою, якої ЕОМ «не знає»; без додаткових пояснень важко встановити, про яку таблицю йдеться в схемі, як побудована таблиця 6.

Щоб усунути ці вади, дамо формальний опис таблиці 6. Дамо їй ім'я Т, а окремі клітинки позначимо індексованими літерами Т. Наприклад, T_{12} буде ім'ям клітинки з першого рядка другого стовпчика таблиці Т. Окремим ізольованим клітинкам дамо імена *i*, *k* і т. д. Саму таблицю Т називатимемо далі масивом, а її клітинки —комірками або змінними. Тоді вміст окремих комірок або змінних доцільно назвати значенням змінної з відповідним іменем, а сукупність усіх комірок, над якими працює даний алгоритм,— його пам'яттю.



5*

Якщо a і $в$ імена двох комірок пам'яті, то операцію переписування вмісту комірки $в$ в комірку a позначимо «$в \to a$». Цей запис можна прочитати кількома способами: 1) значення змінної a покласти рівним значенню змінної $в$; 2) змінний a присвоїти значення змінної $в$. Тоді запис $a+в \to c$ означатиме: 1) «присвоїти змінній c значення, рівне сумі значень двох змінних a і $в$»; або 2) «в комірку з іменем c записати суму вмісту двох комірок з іменами a і $в$», або 3) «c покласти рівним $a+в$». Запис «$5 \to i$» означатиме «присвоїти i значення 5», «покласти i рівним 5», «в комірку з іменем i записати число 5».

Введена символізація дає можливість модифікувати першу схему, перетворити її у формальний алгоритм зміни заданого стану масиву пам'яті. До кожної з комірок її тепер звертаються тільки по імені і внаслідок одержуємо якийсь інший стан масиву пам'яті. Модифікована перша схема матиме простішу форму.

Розглянемо детальніше кожен її крок.

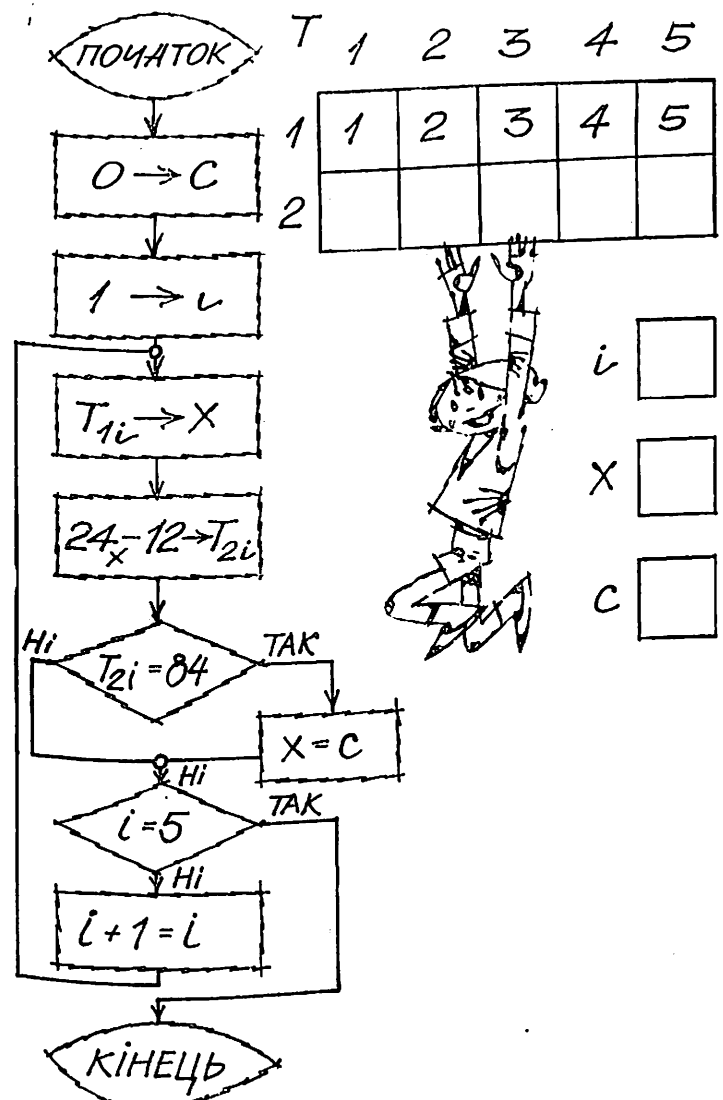
Крок 1. Формальний початок роботи алгоритму.

Крок 2. $1 \to i$. В комірку з номером i записати одиницю або в комірку з номером i заслати одиницю.

Останні слова робота не сподобалися Одиниці.

— Як це, заслати мене? А як я не хочу! Мало що може статися в тій комірці...

— Ніяких неприємностей,— спокійно відповів 10101_2-й.— Перед вашим прибуттям у комірку i, все, що було там записано, автоматично стирається. Отже, продовжимо нашу бесіду,— сказав 10101_2-й — на відміну від першої схеми в модифікованій при формулюванні другого кроку або другої команди немає мови ні про яку таблицю.



Крок 3.

Внаслідок виконання попередньої операції i стало рівним 1, ця операція в комірку з іменем x переписує вміст комірки T_1 таблиці T, тобто число 1. Модифікована схема чітко вказує, де записати прочитане значення змінної x.

Крок 4. $24x - 12 \to T_2$.

По цій команді виконується обчислення за формулою $24x - 12$ і результат його записується у другий рядок, i-й стовпчик таблиці T.

Крок 5. $5 \to i$.

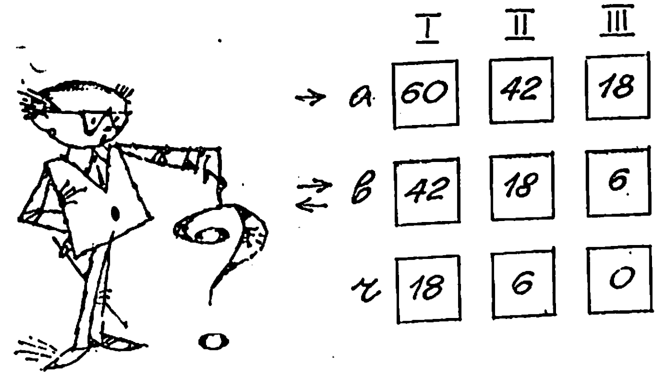
Напрошується перевірка: чи дорівнює вміст комірки i числу 5. У нашому прикладі — відповідь негативна, і дальша робота алгоритму йде за стрілкою «Ні».

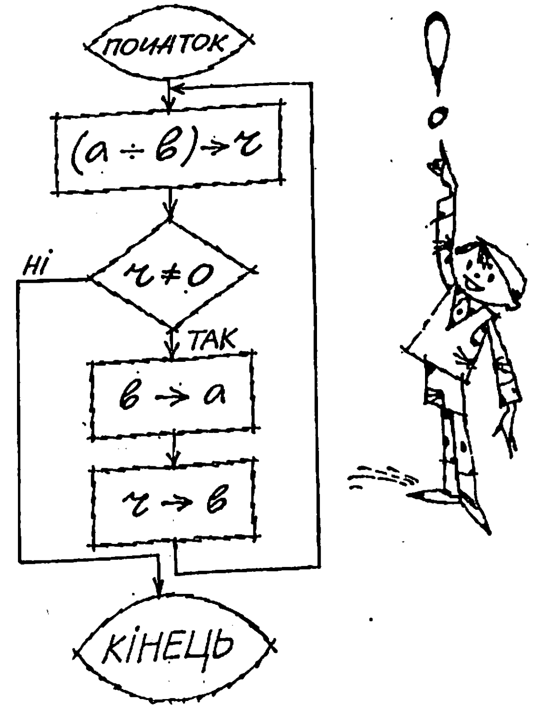
Крок 6. $i+1 \to i$.

Внаслідок виконання цієї команди вміст комірки i збільшується на 1 і стає рівним $1+1=2$. На модифікованій схемі фактично виконується операція $T_{12} \to x$. Тобто починається аналогічна робота з другим стовпчиком таблиці T.

Різниця між першою і модифікованою схемами очевидна. На першій виконавцеві лише з аналізу таблиці 6 вдасться помітити, що більше правих стовпчиків у ній немає, в другій уже явно задано номер останнього правого стовпчика, досягнення якого фіксується без будь-якого звертання до самої таблиці 6. Друга схема значно лаконічніша, записи в ній формалізовані.

Тепер можна скласти повний алгоритм розв'язування задачі з прикладу 3. Новими елементами в ньому, в порівнянні з розглянутим алгоритмом, є комірка з ім'ям c, у яку ми в кінці роботи алгоритму записуємо шуканий ко-





рінь рівняння $24x-12=84$, якщо він є, або ж 0, якщо кореня не існує.

Розглянуті схеми ще не є програмами, виконання яких можна доручити ЕОМ. Але залишається зробити буквально один крок — і вони стануть справжніми програмами для електронних обчислювачів.

На прикладі алгоритму Евкліда розглянемо програму, виконання якої можна доручити ЕОМ. Щоб знайти НСД $(a, в)$, де $a>в$, ділимо a на $в$ і якщо $a \vdots в$, то НСД $(a, в)=в$. Якщо при діленні a на $в$ одержуємо остачу r, $0<r<в$, то ділимо $в$ на r. Послідовне застосування розглянутого прийому, зрештою, приведе до шуканої відповіді.

Позначимо дію одержання остачі r при діленні a на $в$ символом $(a \div в)=r$. Тоді при $a=60$ і $в=40$, обчислення НСД $(a, в)$ можна записати в такий спосіб:

1. $(60 \div 42)=18$.
2. $(42 \div 18)=6$.
3. $(18 \div 6)=0$. НСД $(60, 42)=6$.

Як видно із запису, всі дії однакові і відрізняються лише числами, над якими виконуються операції. Це дає можливість значно спростити алгоритм відшукання НСД $(a, в)$, якщо доручити розв'язання задачі ЕОМ.

У загальному вигляді виконання дії можна записати в такій формі: $(a \div в) \rightarrow r$ (1).

Тут r, a і $в$ імена пам'яті алгоритму, а «$\rightarrow$» — відомий нам знак присвоєння імені.

Ми вже знаємо, що в кожній комірці число може бути прочитане довільне скінчене число разів. Але коли ми в якусь комірку записуємо якесь нове число, то те, яке там

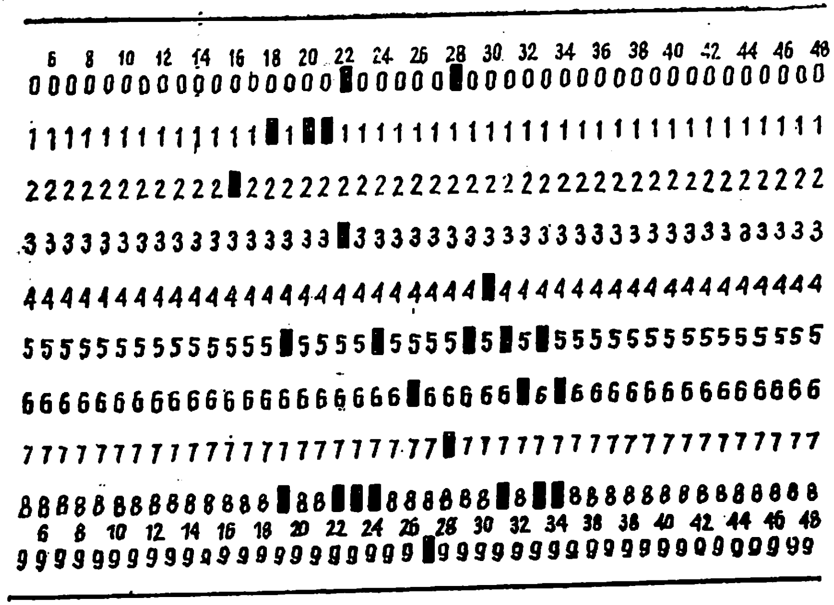
було записане раніше, автоматично стирається. Якщо після виконання першої дії за формулою (1) одержимо $r \neq 0$, то (щоб виконати його вдруге, тобто продовжити обчислення НСД $(a, в)$, досить переписати $в$ в комірку a, а r_1 у комірку $в$, тобто виконати дії:

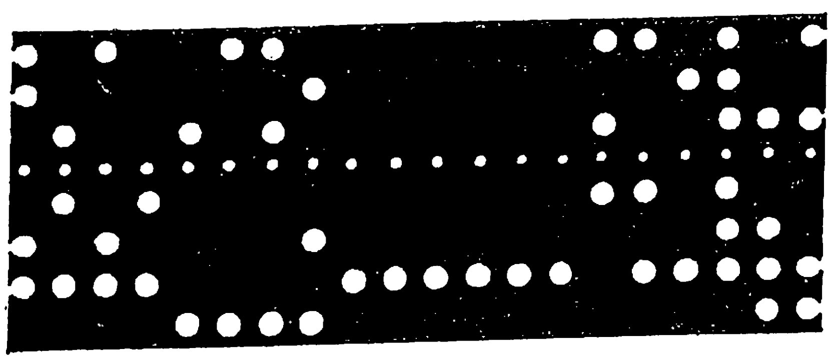
$$в \rightarrow a$$

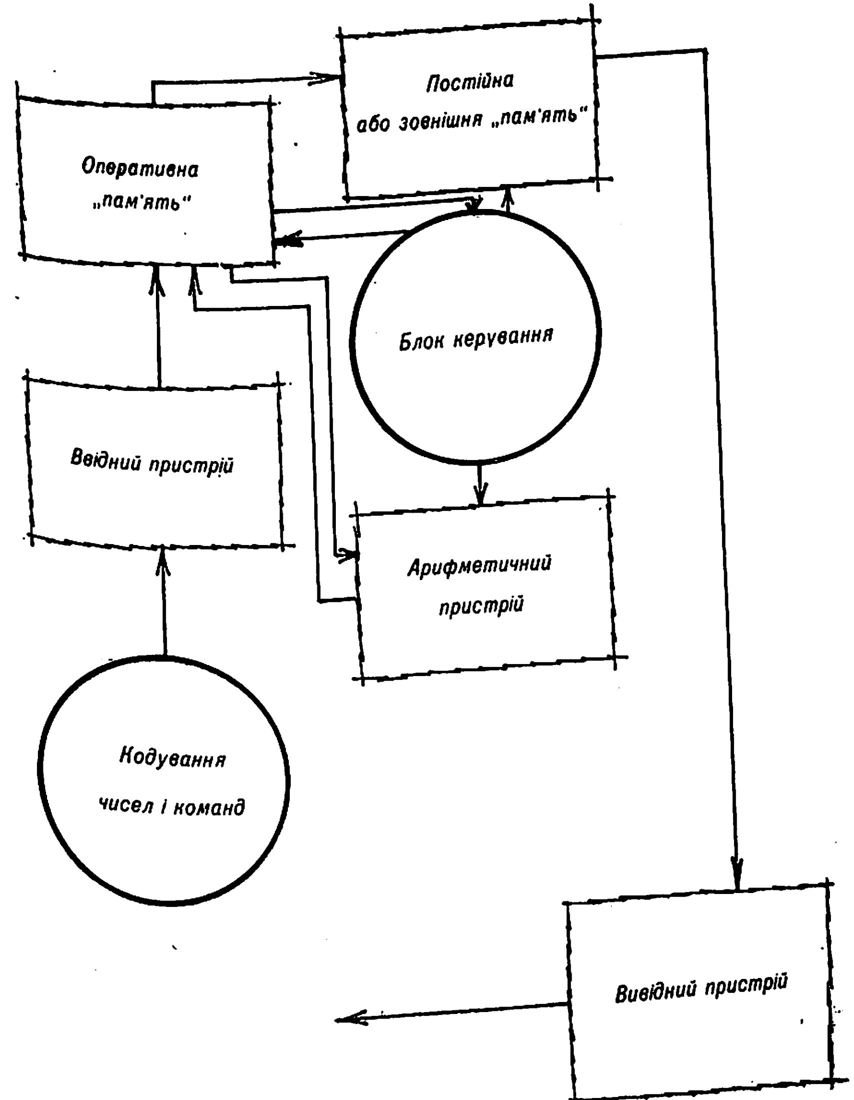
$$r_1 \rightarrow в$$

Відповідний алгоритм матиме схему. Пам'ять його складається лише з трьох комірок a, $в$, r. Стрілки, які входять у комірки a і $в$, говорять про те, що в ці комірки перед початком роботи алгоритму записали вихідні дані (дані умови задачі), а стрілки, які виходять з комірок,— що після закінчення роботи алгоритму в ній можна прочитати відповідь. Справа від алгоритму подано три послідовні стани пам'яті (I, II, III). В дійсності ж II і III записуються на місце першого. «Програвши» алгоритм для кількох пар чисел, легко переконатися, що це дійсно універсальна програма, застосовувана для обчислення найбільшого спільного дільника будь-якої пари натуральних чисел.

...Тепер ви вже знаєте, що говорити з ЕОМ означає скласти для неї програму, команди, які вона виконує одну за одною. Програми набивають на перфострічці або перфокартці разом із вихідними числовими даними. Але тепер лишається все менше машин, для яких потрібні перфокартки і перфострічки. Персональні мікрокомп'ютери (МК) мають інші пристрої введення і виведення інформації. До того ж різні ЕОМ говорять на різних мовах. Мовна розмаїтість програмування виправдана тим, що кожна мова призначається для розв'язування певного класу задач або для роботи на відповідному типі ЕОМ.






Постійна
або зовнішня „пам'ять"
Оперативна
„пам'ять"
Блок керування
Ввідний пристрій
Арифметичний
пристрій
Кодування
чисел і команд
Вивідний пристрій

Так, «Фортран» — формульний транслятор — перекладає формули на машинні команди, але не зовсім зручний, коли доводиться розв'язувати задачі, пов'язані не лише з формальними обчисленнями. Тому для розв'язування економічних задач створена спеціальна мова програмування «Кобол». Майже всі дії, які вимагаються від машини, «Кобол» описує словами.

Мова «Аналітик» користується, насамперед, формулами, оскільки призначена для розв'язування математичних задач. Усі формули при цьому висвітлюються на екрані комп'ютера. Кібернетичне мовознавство сьогодні — розгалужена галузь знань: число мов програмування уже наближається до 5 000.

Цифроградці попадають в ЕОМ через кодуючий пристрій, який готує їх до роботи в машині, автоматично переводячи у двійкову систему числення. Через ввідний пристрій цифроградці переходять в оперативну пам'ять. Це — голова ЕОМ. У ній зберігається інформація про числа, команди, що теж записані у вигляді різних чисел. Така інформація раз у раз потрібна машині. Числа, команди і проміжні наслідки обчислень, які до часу машині й нам не потрібні, зберігаються у зовнішній пам'яті машини. Цю пам'ять можна порівняти з блокнотом, до якого ми заносимо відомості, що їх не обов'язково пам'ятати, але мати про всяк випадок треба.

По команді з блоку керування цифроградці потрапляють в арифметичний пристрій, де й відбуваються потрібні нам математичні операції. Результати обчислень, якщо вони є остаточною метою нашого пошуку, через вивідний пристрій видаються як готова продукція машини. Може

статися, що і результати обчислень, і числа, якими ми оперували, ще будуть нам потрібні. Тоді арифметичний пристрій надсилає їх до оперативної, або зовнішньої, пам'яті.

Готова продукція ЕОМ — результати розв'язання задач, які вивідний пристрій друкує на паперовій стрічці, або бланку встановленої форми, або висвітлює на екрані. Не забувайте, тисячами провідників в ЕОМ мчать трудівники кібернетики — біти — «так» (1), «ні» (0). Вони повідомляють команди, переносять інформацію з комірок пам'яті в арифметичний пристрій, результати обчислень пересилають в іншу комірку. Їх існування в ЕОМ далеко не безтурботне. Якось в одному театрі керування сценою повністю довірили ЕОМ. Глядачі були ошелешені: завіса то піднімалася, то опускалася, сцена оберталася то за годинниковою стрілкою, то проти... Все це — через перешкоди, які випромінював рентгенівський апарат у сусідній клініці.

— Отже,— сказав 10101_2-й,— ви вже достатньо підготовлені, щоб складати алгоритми розв'язання деяких задач. Папір, олівці і навіть креслярські інструменти,— на столах. Тож перевіримо: як ви зрозуміли мене. Будь ласка, складіть розгорнутий алгоритм побудови трикутника ABC за трьома сторонами *a, в, c*.

Тепер робот відпочивав. Він ходив між рядами, робив короткі зауваження своїм слухачам і, побачивши, що Олег виконав завдання, поздоровив переможця.

— Молодчина! Вчитель математики поставив би тобі за це п'ятірку. Поясни, як ти розв'язав мою задачу.

Олег написав на дошці алгоритм, а 10101_2-й уже пропонував нову задачу:

— Є дев'ять пластинок і шалькові терези. Одна з пластинок легша від інших. Як за допомогою двох зважувань знайти легшу пластинку? Попрошу побудувати алгоритм розв'язування у формі схеми.

Потім присутні склали алгоритми у формі схем доведення теорем:

1) коли $a \leqslant в$, то $в \geqslant a$;

2) якщо $a \leqslant в$ і $в \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Переконавшись, що всі оволоділи азбукою програмування, 10101_2-й перевірив ще раз їхні навички біля моделі ЕОМ.

— Ось у цієї моделі ЕОМ,— пояснив він,— пам'ять коротка — лише 32 комірки. В перших двадцяти вона пам'ятає команди (ми їх позначатимемо так: 1), 2)... 20), в решті — числа. Самі комірки позначають «1», «2»... «32». Отже, 22) — це двадцять друга команда, а «22» — число, записане в двадцять другій комірці пам'яті. Наказ ЕОМ додати числа, які зберігаються в «23» і «27» комірках її пам'яті, і результат записати в комірку «27» має таку форму: «23»+«27» → «27».

Якщо в тій комірці до цього зберігалось якесь число, то, виконуючи нашу команду, ЕОМ його автоматично витре. Тому потрібно бути уважним і стежити, чи не зайнята потрібним нам числом комірка, в яку ми хочемо записати інше. Ну, наприклад, хто скаже, що відбудеться по команді: «25»+«25» → «25»?

— Число, записане в двадцять п'ятій комірці, подвоїться,— одразу ж відповів Ігор.

— Люблю швидкодію. Особливо, коли в результаті одержуємо правильну відповідь. А як записати наказ ЕОМ:

додати числа в «25» і «26» і результат записати, тобто ввести в комірку «25»?

Віктор вирішив не відставати від товариша і тут же подав роботові аркуш паперу, на якому було написано: «25»+«26» → «25».

— Теж правильно. А хто скаже, як записати команду «піднести число до квадрата»?

— Тут, здається нема нічого нового,— вголос міркував Віктор.— Просто ми беремо число з якоїсь комірки, множимо на те ж саме число і записуємо у ту ж комірку. Наприклад, команду піднести до квадрата число з «28» комірки запишемо:

«28»×«28» → «28».

— Чудово! Тепер я познайомлю вас ще з однією командою, і ви зможете скласти справжню програму. Команда: «Запиши число 5 в комірку «29» мовою машини» записується так:

Ввід 5 → «29».

Тепер можна перевірити, як ви все це засвоїли. Прошу ще раз за столи. На них є папір і олівці. Складіть для ЕОМ програму завдання:

$$35 \times 71 + 44 \times 83.$$

Робот присів на стілець і з цікавістю спостерігав, як гості схилилися над задачею. Для нього вона була такою ж простою, як $1+1=2$. А вони, бач, замислилися. Про щось радяться, сперечаються.

Першим підійшов до робота Олег. Робот уважно вивчав складену ним програму. Тим часом й інші склали програми, подали на перевірку. Більшість виконали завдання правильно, щоправда, і числа і команди посилали в різні комірки. Дехто, забувши, в зайняті комірки ввів нові числа або команди і в такий спосіб розгубив ще потрібні дані.

Олег запропонував таку програму:

1) Ввід 35→«21»
2) Ввід 71→«22»
3) Ввід 44→«23»
4) Ввід 83→«24»
5) «21»×«22»→«21»
6) «23»×«24»→«23»
7) «21»+«23»→«21»
8) Вивід «21».

Аж коли всі обчислення були виконані, почулися докори:

— Яка ж користь від ЕОМ, коли за час, поки складається для неї програма, можна й самому все обчислити?..

— А якщо тисячу чисел додати або перемножити, тоді й тиждень розписувати програми?

— Маєте рацію,— сказав робот.— Коли б наші потреби обмежувалися лише задачами, які я вам запропонував, ЕОМ були б непотрібні. Їх сила в тому, що вони можуть виконувати важливу команду «передачі керування». Сподіваюся, ви не забули про неї? Для програми нашої моделі запишемо цю команду так:

«25»>0→5),

що означатиме: якщо число, записане в 25 комірці, більше нуля, то, порушуючи звичайний порядок, треба перейти до

виконання команди 5); якщо ж воно рівне нулю (або менше нуля), тоді перейти і виконувати наступну команду. Наприклад, виберемо найбільше число з «21» і «22» і запишемо його в «23»:

1) Ввід 0→«30»
2) «21»—«22»→«24»
3) «24»>0→5)
4) «30»+«30»→«24»
5) «22»+«24»→«23».

— Виходить, машина ніби й справді думає. Адже залежно від того, більше число в «21» чи «22», вона вже виконує відповідну роботу! — висловив свій здогад, ніби важливе відкриття, унікурсалець.

— Головне, що ви зрозуміли, як вона це робить. А склавши програму для обчислення суми 1×2+2×3+3×4+... 1975×1976+1976×1977, ще в більшій мірі відчуєте силу ЕОМ і мудрість програм для неї. Без електронного помічника вам довелося б виконувати 1976 множень і 1975 додавань. Програма ж тут зовсім коротка. Я тільки підкажу, що обчислення треба починати з множення найбільших чисел...

Завдання виявилось нелегким.

Довелося всім добряче поміркувати, як його запрограмувати.

Складання програм для ЕОМ сподобалося гостям Кібертонії, і вони попросили у робота ще кілька завдань для електронного обчислювача. Робот запропонував їм скласти програми для обчислення двох сум: 1×1+2×2+...+1977×1977 і $1^1+2^2+3^3 ... +9^9$ та добутку 51×53×55×...×67×69.

10101_2-й знав: не всі гості Кібертонії стануть програмістами, але кожному з них доведеться мати справу з персональним комп'ютером. Тому вважав, що туристам корисно ознайомитися з популярною алгоритмічною мовою — БЕЙСИК. Саме цією мовою реалізується математичне забезпечення більшості персональних комп'ютерів.

Робот розповів, як в минулому столітті один англійський місіонер, аби залучити туземців до цивілізації, відібрав з англійської мови 300 найпоширеніших і найпростіших слів. У цій куценькій мові, яку він назвав «Basic English», тобто «основна англійська» (російською транскрипцією: бейсик инглиш), практично не було граматики. Така елементарна мова зацікавила багатьох саме своєю простотою і швидко завоювала популярність не тільки серед туземців.

У 1965 році вчені розробили новий бейсик, але вже для людей, які не володіють традиційними мовами спілкування з ЕОМ. Її також назвали BASIC — абревіатурою англійської фрази: Beginner's Allpurpose Simbolic Instruction Code, що означає — багатонаціональна мова символічних інструкцій для початківців. Назва дещо надумана, але річ не в назві. Справді вдалося створити чудову алгоритмічну мову програмування для початківців, можна сказати,— кібернетичного лікбезу. Тому, як і перший бейсик, другий швидко набув популярності серед абонентів ЕОМ через простоту і доступність. До того ж він дав можливість розв'язувати задачі в режимі діалогу з ЕОМ, що теж дуже важливо для початківців.

До середини 60-х років конструктори навчилися підключати до ЕОМ так звані термінали — віддалені пульти для тих людей, які хотіли працювати на машині. Стало

звичним, що центральну ЕОМ — досить швидкодіючу та зі значною пам'яттю — використовують водночас кілька спеціалістів. Обчислювальна техніка стала дуже потрібною інженерам, економістам, хімікам, біологам, соціологам.

Саме тоді й розробили зручну для широкого кола користувачів ЕОМ мову БЕЙСИК.

— Вивчити БЕЙСИК,— продовжував 10101_2-й,— означає: засвоїти її алфавіт, словник, граматику (синтаксис) і на основі цих знань навчитися оформляти алгоритми у вигляді текстів програм для ЕОМ.

Почнемо з алфавіту...

— Отак відразу?— перепитав Ігор.

— А що тут дивного? — відповів 10101_2-й.— В алфавіті, який ви бачите на світловому табло, багато символів для вас уже відомі.

Алфавіт БЕЙСИКа виявився простим, хоча й мав чимало символів:

26 великих латинських літер — від A до Z;

10 арабських цифр — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

знаки арифметичних операцій: додавання (+), віднімання (—), множення (×), ділення (:), піднесення до степеня (∧);

знаки відношень: менше (<), не більше (<=), рівно (=), не рівно (<>), більше (>), не менше (>=);

розділові знаки: дужка, яка відкривається (( ), дужка, яка закривається ( )), десяткова крапка (.), кома (,); крапка з комою (;), лапки («), повернення каретки (↓).

Щоб ввести якийсь знак у пам'ять ЕОМ, необхідно натиснути відповідну клавішу на пульті, адже алфавіт єдиний як для програміста, який дає завдання для ЕОМ, так і для машини, яка повідомляє результати своєї роботи.

Як і в кожній мові, в БЕЙСИКу із символів алфавіту за правилами відповідної граматики складаються слова. Які саме? Зараз дізнаєтесь.

Почнемо з чисел. Їх в будь-якій мові програмування теж називають словами і записують у двох формах:

1. В основній або звичайній (з фіксованою комою), наприклад: —3; 17.8; 0.21; —395.48 і т. д. Зверніть увагу: говорять «з фіксованою комою», а в зображенні чисел використовується десяткова крапка.

2. В показниковій формі (іноді кажуть: у формі з плаваючою комою) число записують у вигляді добутку двох співмножників. Перший (q) називається мантисою і записується в звичайній формі. Показник степеня (p) називають порядком числа. Якщо при цьому $1 \leqslant q \leqslant 10$, то така форма запису називається стандартною. Мантису відділяють від порядку символом Е.

Робот продемонстрував кілька прикладів. Спершу він давав загальноприйнятий запис числа, а в дужках один або кілька варіантів показникової форми запису того ж числа: $6{,}27 \times 10^2$ (6.27E2), $15{,}06 \times 10^4$ (15.06E4), $0{,}021 \times 10^3$ (0.021E3), 30 (30E0, 3E1, 300E—1), —0,0027 (—2.7E—3), 0,0021988 (0.21988E—2; 21.988E—4).

Прості змінні мовою БЕЙСИК позначають однією буквою, або буквою і цифрою, яка пишеться за нею. Це вже зовсім просто: A; B2; C9, 4.

Наступним важливим типом слів є арифметичні вирази. Застосування граматики БЕЙСИКа забезпечує взаємно однозначну відповідність арифметичних виразів і слів у цій

мові. Ось три такі пари: $4а - в^2$, (4×A — B∧2); $8в - \frac{5}{(c - d^3)^2}$, (8×B— (5/(C—D∧3)∧2; $(a+b)^2 - (c^2 - d^2)^3$, (A+B)∧2—(C∧2—D∧2)∧3.

— Тепер ви й самі запишете серію арифметичних виразів мовою БЕЙСИК.

І робот запропонував гостям вправи:

$\frac{2x - 5}{3 + X}$, $a^3 - b^{-3}$ $ax + b + 0{,}3$, $\frac{ax^2 + bx + c}{d - 2{,}5}$, $(a^b)^c$, a^{b^c}, $a + \sqrt{a}$.

Переконавшись, що слухачі правильно розв'язали запропоновані вправи, робот розкривав інші секрети популярної алгоритмічної мови.

— Дати вказівку ЕОМ про виконання обчислень можна за допомогою пронумерованих операторів. Найменший можливий номер оператора — 1, найбільший — 9999. Як правило, номери сусідніх операторів відрізняються на кілька одиниць. Це роблять для того, щоб у разі потреби можна було між двома операторами вставити третій або й ще кілька, не змінюючи нумерацію записаних раніше операторів. Номери операторів в програмі називають ще мітками.

Оператор Початок у мові БЕЙСИК не має запису. І так зрозуміло, що реалізовувати програму слід з першої команди. А ось оператор Кінець потрібний, і його записують так: N0 END, де 0 — номер (мітка) оператора. Зрозуміло, цей номер має бути більшим від номера будь-якого іншого оператора в програмі. Слово END в перекладі означає «кінець».

Дуже працьовитий оператор Присвоювання, за допомогою якого надають змінним величинам потрібні значення. Його записують так: NO LET У=А. Тут NO— мітка, знак= означає «присвоїти значення». А саме: змінній, ім'я якої вказано зліва від знака= (У), присвоюється значення, що дорівнює числу, записаному праворуч від =(А). Ви вже здогадалися, що слово LET в перекладі означає «нехай», або «приймемо».

Ось так працює цей оператор:

```
5 LET A=24.6
15 LET B(3)=17
20 LET C=2.05E—I
```

Складнішу роботу ЕОМ виконує, якщо оператор LET записаний в такій формі:

```
10 LET P=(5×B—C∧2)∧3
20 LET C=2+P/(A—B)∧3.
```

У цих випадках ЕОМ повинна спочатку обчислити значення виразу, який записаний праворуч від=, і одержаний результат вважати значенням тієї змінної, ім'я якої записане праворуч від =.

Досить ввести ще одного оператора — PRINT («друкувати»), щоб запрограмувати для ЕОМ дві давніх і популярних задачі — обчислення довжини кола і площі круга. Оператор PRINT — оператор висновку — використовується для подання числової і символічної інформації. Після слова PRINT іде список елементів виведення, відокремлених один від одного крапкою з комою або комою.

Числові константи і взяті в лапки набори символів за

командою PRINT друкуються на друкарській машинці без змін. Якщо елементи списку виведення розділені між собою крапкою з комою, то після друкування кожного числового значення робиться один проміжок, а якщо комою, то для друкування кожного числового значення на папері відводиться 15 позицій. За кожною командою PRINT друкування починається з нового рядка.

В програмі оператор PRINT діє в такий спосіб, що після виконання команди 15 PRINT «ЗНАЧЕННЯ КОРЕНЯ» на друкарській машинці буде видрукуваний текст — ЗНАЧЕННЯ КОРЕНЯ. А після виконання команди

```
15 PRINT 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
```

вказані числа буде надруковано так:

```
0    1    2    3
4    5    6    7
8    9.
```

Після команди

```
15 PRINT 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
```

ті ж числа буде надруковано так:

```
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Все ж повернемося до задач. Обчислити довжину кола і площу круга з радіусом R.

Коротка програма може бути такою:

```
10 LET P=10.0 : LET π=3.1459
20 LET 2π+P
30 LET S=π+P∧2
```

```
35 PRINT C, S
40 END.
```

Одержавши команду 35 PRINT C, S, ЕОМ виведе на екрані дисплея або надрукує на папері два числа — довжину кола і площу круга.

За допомогою оператора PRINT можна давати команди ЕОМ для обчислення арифметичного виразу:

```
10 PRINT 5×A—C
15 PRINT C∧2+B/3—A.
```

Тоді ЕОМ обчислить значення виразу, записаного праворуч і виведе його на екрані, але результат не запам'ятовуватиме.

Уміле використання оператора PRINT дає можливість виводити на екрані найрізноманітніші тексти і таблиці. ЕОМ оформляє документи не менш старанно, ніж досвідчена друкарка.

Розв'язування задач — не маршрут на трасі з одностороннім рухом. Тому й ЕОМ часто доводиться порушувати природний порядок виконання операторами програми і переходити до певного оператора незалежно від виконання якихось умов. У мові БЕЙСИК для реалізації таких переходів використовується оператор безумовного переходу: NO GOTON1.

Слова GO TO означають «перейти до»; N1 — номер оператора, який треба виконати після реалізації оператора NO.

Оператор безумовного переходу не така вже й складна ситуація в роботі. Наказали робити — роби. А в житті здебільшого не можна прийняти рішення, не проаналізувавши інформацію про обстановку, в якій доводиться діяти. Якщо дискримінант квадратного рівняння — від'ємне число, то розв'язувати його не треба — дійсних коренів воно не має. Якщо швидкість ракети більша, ніж 11,2 км/с, ракета покине навколоземний простір. В умовах, схожих до наведених, людина дуже часто приймає рішення за правилом: якщо A, то B, інакше C.

Конструктори перших ЕОМ робили їх здатними приймати рішення саме за цим правилом. У мові БЕЙСИК програміст задає ЕОМ ситуацію для оцінки і вказує, яке рішення треба прийняти за допомогою оператора галуження або умовного переходу:

IF команда THE N команда ELSA команда.

В ньому використовується англійське слово, якому відповідають російські слова «якщо», «то». Зрозуміло, відповідальність за рішення несе не машина, а програміст.

Ми вже складали схему алгоритму обчислення НСД (M, K). Тепер ви зможете скласти програму того ж алгоритму мовою БЕЙСИК.

Робот був задоволений, що майже всі гості Кібертонії правильно склали програму, яка мала такий вигляд:

```
5 LET X=M
7LET Y=K
9 IF X=Y THE N17
11 IF X>Y THE N LET X=X—Y; GOTO 9
13 LET Y=Y—X
15 GOTO 9
17 PRINT X
19 END.
```

Аби переконатися, що кібернетичне мовознавство засвоюється на належному рівні, 10101_2-й дещо ускладнив завдання — запропонував побудувати схему алгоритму і вказати на ній відповідні команди мовою БЕЙСИК для розв'язання ЕОМ такої задачі: скласти таблицю квадратів чисел, перше з яких — 12,0, кожне наступне — на 5,6 більше від попереднього, а останнє — 40,0.

Гості Кібертонії старанно виконували чергове завдання, та робот помітив: люди притомилися. Тому для відпочинку запропонував невеличкий відеосюжет з історії ЕОМ.

Всі одразу впізнали на екрані Шерлока Холмса і доктора Уотсона. Доктор Уотсон протягував руки до каміна, говорив:

— Ні, Холмсе, це не людина, це сам сатана! Людина не може не залишати слідів і не робити помилок.

Холмс нічого не відповів. Стуливши повіки, він ніби дрімав. Але пальці його нервово барабанили по бильцю крісла: кращий розум Лондона напружено працював над новою задачею.

Нараз він підхопився. Очі його гарячково блищали.

— Ідемо, Уотсон! Не гаймо ні хвилини...

— Але куди?

— Поясню в дорозі. Ей, кеб! Кебмен, нам конче треба в Сохо не пізніш опівночі. Ось соверен, жени! Уотсон, вам доводилося чути про леді Лавлейс?

— Ада Лавлейс? Дочка великого Байрона! Чи не хочете ви сказати, що вона причетна до цієї серії зухвалих злочинів? Грабіжниця-аристократка, дочка поета? Я правильно міркую, Холмс?

— Зовсім ні, дорогий друже. Ада Лавлейс причетна до цієї справи, але не так, як ви думаєте.

— А як? Ви говорите загадками.

— Терпіння, мій друже, терпіння. Ось ми й приїхали. Цей брудний провулок Сохо відрізняється від інших одним: тут рівно опівночі, тобто через тридцять п'ять секунд, відбудеться передача крадених цінностей. А ось і...— Холмс відкинувся в глибину кеба, потягнув за собою Уотсона. Виринувши з туману, до них наближався чорний екіпаж. Почулися удари Біг-Бена, і в будинку напроти розчинилося вікно. З нього на брук полетів пакунок. Із екіпажа висунулася рука, але Холмс виявився спритнішим.

— Ні з місця, Моріарті!— заволав він громовим голосом, осаджуючи коней.

А Уотсон уже приставляв револьвер до грудей невловимого професора Моріарті — короля лондонського злочинного світу...

— І все-таки, Холмс, я не можу збагнути, при чому тут леді Лавлейс?— запитав Уотсон, влаштовуючись зручніше біля каміна.— Ви ж знали: це Моріарті. Чи не так?

— Навпаки, про це я навіть і не підозрював. Мої думки йшли іншим шляхом. До речі, на нього наштовхнули мене ви.

— Я?

— А пам'ятаєте, ви сказали, що людина не може не помилятися? Мали рацію, Уотсон. Навіть славнозвісний Моріарті не зміг би так точно працювати, як машина Беббеджа.

— Машина Беббеджа? Того дивака, який насмішив лондонську громадськість років тридцять тому? Безглузда машина: додавала числа довше, ніж це зробив би найтупіший сищик із Скотленд-Ярда? Тепер зрозуміло, чому ви згадали про леді Лавлейс. Вона намагалася підтримати бідолаху винахідника, навіть написала трактат про мислячі машини. Але той трактат швидко забули.

— Леді Лавлейс була розумною жінкою, Уотсон.— Холмс помішав коцюбкою жар у каміні і додав з гіркою іронією:— Навіть надто розумною для нашого зашкарублого Лондона. Вона років на сто випередила свій час, і не її вина, що прекрасними ідеями скористався негідник. У Моріарті вистачило уяви зрозуміти, які перспективи відкриваються перед злочинцем, котрий може розрахувати до секунди свої дії. Він вклав немалі кошти у розвиток думаючих машин, і наслідки ми з вами бачили в Сохо.

— Все-таки, Холмс, як же ви здогадалися, де і коли відбудеться передача цінностей?

— Саме бездоганна логіка і точність машини виявилися фатальними для Моріарті. Адже те, що розраховано на одній машині, можна розрахувати на іншій!— І Холмс, усміхаючись, постукав себе по лобі чубуком люльки.

Екран згас, а глядачі все ще залишалися під владою чар великого аналітика.

— Про Беббеджа ви нам говорили,— звернувся Ігор до 10101_2-го,— а про Аду Лавлейс ми чуємо вперше.

— Дочка великого Байрона справді написала трактат про думаючі машини Беббеджа. Тепер на її честь одна з кращих алгоритмічних мов так і називається «Ада». Щоправда, леді Лавлейс так і не довелося перевірити, як працюють її програми: перші комп'ютери побудували аж через сто років.

— І що, злочинці можуть користуватися ЕОМ, обдумуючи свої наміри?

— Зрозуміло. Але й ті, хто бореться із злочинцями, ви-

користовують ЕОМ. Уявіть собі: в Скотленд-Ярді стоїть ЕОМ, у пам'яті якої зберігається інформація про всіх правопорушників, а інспектору Лейстреду потрібно знайти Моріарті, котрий переховується під чужим ім'ям. Інспектор знає, що Моріарті худий, лисий, високий, йому за п'ятдесят років. Окрім того, злочинця добре знає в обличчя сищик Шерлок Холмс. Як при цьому скласти програму для комп'ютера?

Туристи активно включилися в складання такої програми:

— Нехай комп'ютер відбере всіх злочинців з такими ознаками і покаже Холмсу їхні фотографії...

— У пам'яті комп'ютера є зріст, вага, вік кожного злочинця. Припустимо, по фото він може розрізняти лисину. Але що таке дуже худий і високий на зріст, комп'ютер не розуміє. Потрібно пояснити машині ці ознаки...

— Про зріст можна сказати так: вищий середнього. Адже середній зріст машина може обчислити? Нехай відбирає тільки лисих, яким понад п'ятдесят років, вище середнього росту...

— А дуже худих як відібрати? Так само — нижче середньої ваги?..

— Ні, якщо відбирати нижче середньої ваги, то зберуться просто худі, а нам потрібні дуже худі...— міркував Віктор.— Отож нехай машина знайде найхудішого і покаже Холмсу. Якщо це не Моріарті, його можна викреслити із списку, знову відшукати найхудішого і так далі...

— Поздоровляю з першим детективним алгоритмом! — не втримався 10101_2-й.— Тепер запишемо у вигляді програми.

Програма «Пошук Моріарті»:

1. Взяти із пам'яті ознаки чергового злочинця.

2. Якщо він худий, лисий, вище середнього зросту, нижче середньої ваги, старший 50 років, то занести його в список кандидатів і дати йому по 1 очку за кожний фунт ваги, якого не вистачає в порівнянні із середньою вагою для його зросту.

3. Якщо в пам'яті ще лишилися злочинці, ТО: повернутися до команди 1.

4. Показати Холмсу кандидата з найбільшим числом очків.

5. ЯКЩО це Моріарті, ТО: впіймати його і припинити пошук.

6. ІНАКШЕ: викреслити його із списку кандидатів і повернутися до команди 4.

7. ЯКЩО кандидатів більше не лишилося, ТО: Моріарті виявився хитрішим і слід думати далі.

8. КІНЕЦЬ.

Потім програму записали у формі схеми і мовою БЕЙСИК.

Робот збирався запропонувати ще якесь завдання, але його випередив один з унікурсальців:

— Ясно, алгоритмічні мови слід вивчати, якщо збираєшся тривалий час працювати з ЕОМ. А в мене мікрокалькулятор (МК). Що з нього можна видобути?

— Ваш МК,— переключився на нову тему 10101_2-й,— це своєрідний збірник різноманітних задач та ігор. На ньому можна розв'язувати задачі і грати без кібернетичного мовознавства. Кожен хід в таких іграх полягає в тому, щоб набрати на цифрових клавішах якесь число і натиснути ще

одну-дві клавіші для виконання тих або інших математичних операцій.

У багатьох розвагах з МК ця кишенькова ЕОМ подібна до кубика Рубика, або, скажімо, коробочки для гри в «п'ятнадцять».

Пригадуєте, в плоскій коробочці розміщено 15 пронумерованих квадратних шашок. Задача полягає в тому, щоб за допомогою послідовних пересувань шашок на вільні поля, перевести будь-яке початкове розміщення шашок в нормальне, тобто в таке, при якому шашки розміщені в порядку своїх номерів.

Ідея гри з кубиком Рубика за своєю суттю така сама. З довільної початкової мозаїки за допомогою послідовних поворотів треба одержати кубик з однокольоровими гранями.

За таким же принципом легко розробляти ігри й для МК. В кожній із них задаються два числа — початкове і кінцеве. Шляхом послідовних математичних дій, які виконуються на МК, з початкового числа слід одержати кінцеве. В залежності від того, які дії дозволяється виконувати за правилами гри (тільки додавання і віднімання, множення і ділення тощо) можна створювати все нові ігри.

Наприклад, конструювання чисел додаванням і відніманням.

Конструюємо з початкового числа 17 кінцеве 117. До початкового 17 додамо 98. Для чого виконуємо дію:

$17+98=$ на індикаторі 115.

Потім виконуємо додавання:

$115+14=$ на індикаторі 129.

Нарешті віднімання:

129—12= на індикаторі 117.

Число 117 можна було б сконструювати і за 2 ходи, а взагалі задача має багато розв'язків і в ній можуть брати участь кілька гравців.

Як і в будь-якій грі, кожен учасник повинен дотримуватися певних правил. Якщо знехтувати ними, можна взяти довільне число, наприклад, 78, обчислити на МК 17+78= =95, потім 117—95=22 і сконструювати 117 у вигляді 17+78+22. Але це вже не гра.

Якщо з коробки для гри в «п'ятнадцять» висипати всі шашки, а потім їх просто розкласти на свої місця, то це також не гра. Саме застосування при конструюванні чисел кмітливості робить гру цікавою, а заодно й розвиває навики усних обчислювань.

Ви й самі переконаєтеся в цьому, якщо за допомогою операцій додавання і віднімання двоцифрових чисел сконструюєте:

1. Із числа днів у тижні (7) — число днів у році (365).
2. Із року Великої Жовтневої соціалістичної революції (1917) — рік початку освоєння людиною космічного простору (1961).
3. Із середнього зросту дитини при народженні (50 см) — свій теперішній зріст.

Заміна додавання і віднімання множенням ускладнює конструювання чисел. Тому в такій грі замість одного числа краще вказувати інтервал чисел. Наприклад, із числа 12 треба сконструювати число від 137 до 139. Одним із можливих розв'язків може бути такий:

12×12= на індикаторі 144,
144×0,8= на індикаторі 115,2,
115,2×1,1= на індикаторі 126,72.

Далі продовжте самі, поки не з'явиться число з інтервалу [137, 139].

Чим більше початкове число і чим вужчий кінцевий інтервал, тим більше ходів доведеться зробити для конструювання заданого. В цьому переконаєтеся, якщо за допомогою подібного конструювання, виходячи із числа 19, захочете потрапити в інтервали [94, 95], із 23 — в [171, 173], із 937 — в [402, 404], із 71 — в [555, 556].

Числові клавіші МК можна розглядати як коридори лабіринту, і тоді складеться цікава задача мандрівки по філіалу Цифроград:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Домовимося, що:

а) маршрут починається в точці 1 і закінчується в 9;

б) в кожній точці маршруту можна побувати лише раз;

в) наступною точкою маршруту можна вибирати тільки одну з найближчих точок. Наприклад, з «1» можна перейти на «4», «5» або «2», але не можна переходити на «7» або «6».

Припустимо, що ви, як ведучий гри, задаєте маршрут: 1—2—3—5—9. Підготуйте МК до гри:

С12359 — 12359= на індикаторі 0 для БЗ—36 або

С12359 — — = на індикаторі 0 для МК—51.

Учасникові гри треба відгадати ваш маршрут. Припустимо, що він набирає 14859= на індикаторі 2500.

Поява на індикаторі не нульового числа означає, що маршрут не відгадано. Але з індикатора видно: передостання точка маршруту «5» визначена правильно. Тепер можна випробовувати другий маршрут, з урахуванням нової інформації:

12659= на індикаторі 300.

Результат лише трицифровий. Отже, відгадана ще одна точка маршруту — клавіша «2». Тепер можливі лише два маршрути: 12459 або 12359. Набрано 12359, і на індикаторі з'являється 0. Маршрут відгадано, і можна вийти з клавішного лабіринту.

Переконавшись, що гості зрозуміли мову машин, робот підвів їх до нової моделі ЕОМ, щоб показати, як вона працює.

— Головні блоки тут показано не на малюнках, а виготовлено з різних матеріалів. Але це тільки, щоб показати, як рахує електронний помічник. Ще раз звертаю увагу: на моделі і цифроградців, і команди, які має виконати ЕОМ, возитиме невеличкий поїзд. У справжній машині, як ви вже знаєте, їх переносить електричний струм. Ось подивіться, як механічна модель ЕОМ обчислюватиме суму 2+3.

У залі погасло світло, і замість однієї із стін перед глядачами розгорнулася панорама дивовижних споруд, з'єднаних між собою плетивом залізничних колій. Дехто зауважив, що це вже бачена схема вузлів ЕОМ, кожен з яких має свою особливу архітектуру, і ця особливість підкреслює функціональне призначення вузла.

— Отже, увага!..

І модель ожила. По ескалатору в блок кодування (1) швидко піднялися Двійка і Трійка і тієї ж миті вийшли з нього перекодованими в двійкову систему числення. По другому ескалатору вони спустилися на землю і, сівши кожна в свою машину, рушили до ввідного пристрою. Тут вийшли з машини і піднялися на платформу залізничної колії, стали чекати вказівок, куди вирушати далі.

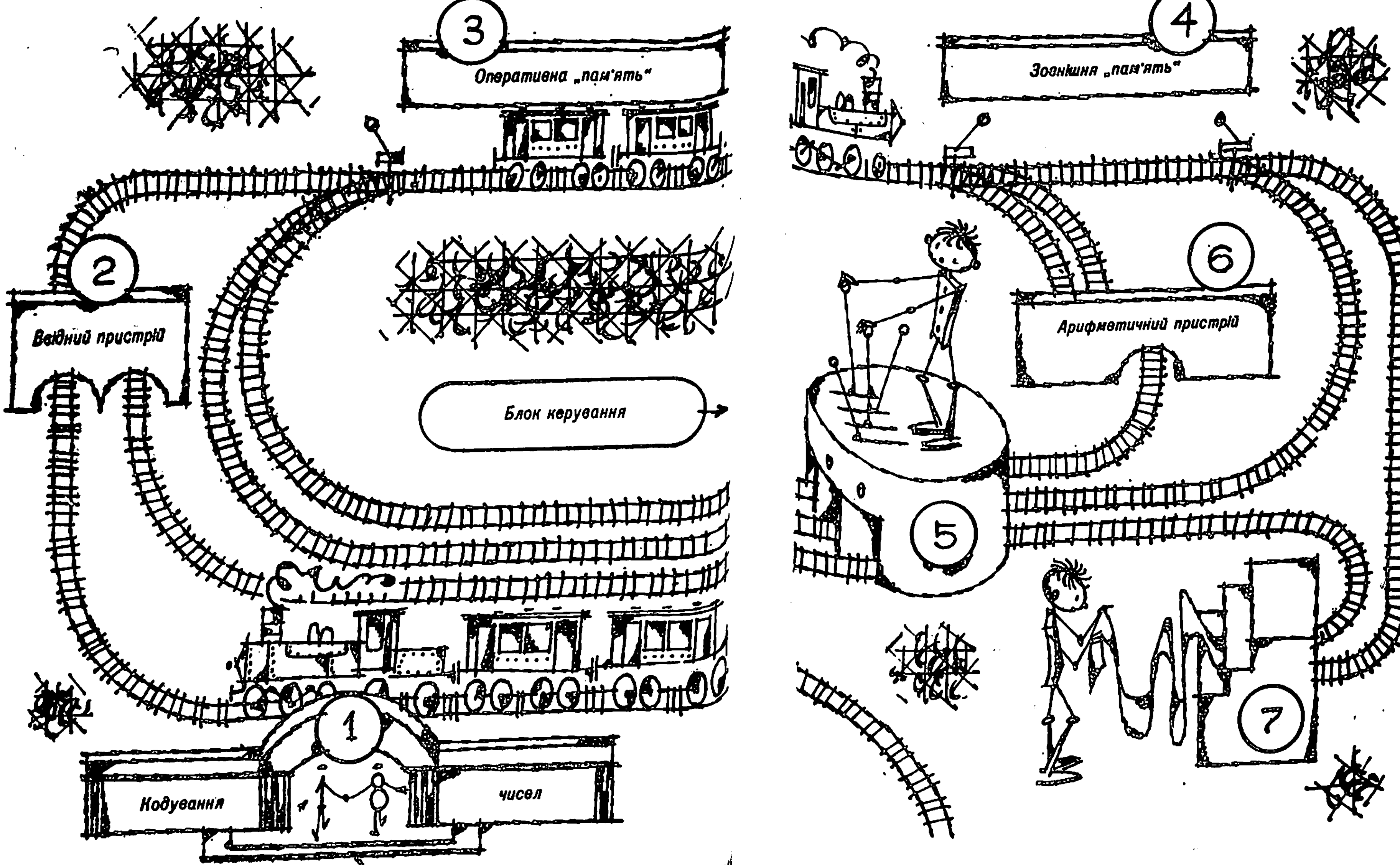
В цей час робот у блоці керування (5) повернув один з численних важелів і таким чином подав команду переслати Двійку і Трійку в оперативну пам'ять машини (3). Ця команда виконувалась так: на платформу поїзда, що стояв біля блока, завантажили чотири кольорові диски, і він вирушив до ввідного пристрою. Диски вказували, що Двійку і Трійку треба доставити і вмістити у певні комірки оперативної пам'яті. Коли поїзд повернувся назад, диски розвантажили. Це означало, що відповідний механізм ввідного пристрою прочитав команди і почав виконувати їх. На платформу поїзда швидко посадили цифроградок, і поїзд заспішив до оперативної пам'яті, де кожну з них зсадили в окрему комірку.

Після цього поїзд повернувся до блока керування і на платформу завантажили чотири нові диски.

Це була нова команда: забрати Двійку і Трійку з оперативної пам'яті, відправити їх в арифметичний пристрій (6) і додати. З цими командами поїзд знову вирушив у напрямку оперативної пам'яті. Там він залишив чотири диски: відповідний механізм прочитав, з яких комірок забрати числа і куди їх відправити.

На поїзд посадили цифроградок, і він вийшов з пасажирами у напрямку арифметичного пристрою.

Тут з нього зняли диски, тобто механізм арифметичного пристрою прочитав команду про те, що прибулі числа тре-



Оперативна „пам'ять"
Зовнішня „пам'ять"
Вхідний пристрій
Арифметичний пристрій
Блок керування
Кодування
чисел

ба додати. З платформи поїзда зсадили ще Двійку і Трійку: вони подалися в оперативний зал арифметичного пристрою. А поки їх там додавали, поїзд з порожньою платформою повернувся до блока керування й одержав новий вантаж: два кольорові диски. Це була команда взяти одержану арифметичним пристроєм суму і через вивідний пристрій видати її замовнику. З цим вантажем поїзд повернувся до арифметичного пристрою, вивантажив диски-команди і прийняв нову пасажирку — П'ятірку. З нею він вирушив до вивідного пристрою. Увійшовши в зал вивідного пристрою, записана в двійковій системі числення (101_2), П'ятірка тут же з'явилася записаною на паперовій стрічці у добре відомій усім нам формі: 5. А поїзд з порожньою платформою повернувся до блока керування і зупинився, чекаючи нових команд.

— Ось, приміром, так, тільки в мільйони разів швидше ЕОМ виконує різні дії з будь-якими числами.

— Це краще, ніж послухати найцікавішу лекцію про те, як працює ЕОМ,— висловив своє захоплення Віктор.

— Тільки важко уявити, як усе те, що ми бачили протягом кількох хвилин, може відбутися за якусь мільйонну частку секунди? — запитав ніби самого себе Олег.

Та робот зрозумів: це питання до нього.

— Там нема платформ і дисків. По провідниках мчать імпульси електричного струму. Ними передаються і самі числа, і команди: що з цими числами робити, куди переслати.

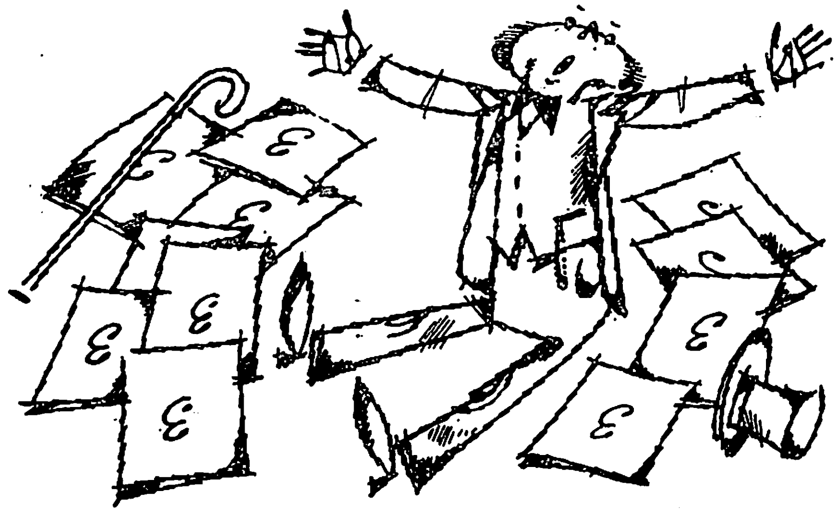
— Це ми вже чули. А от уявити...

— А ваш помічник не може помилитися?— запитав унікурсалець.

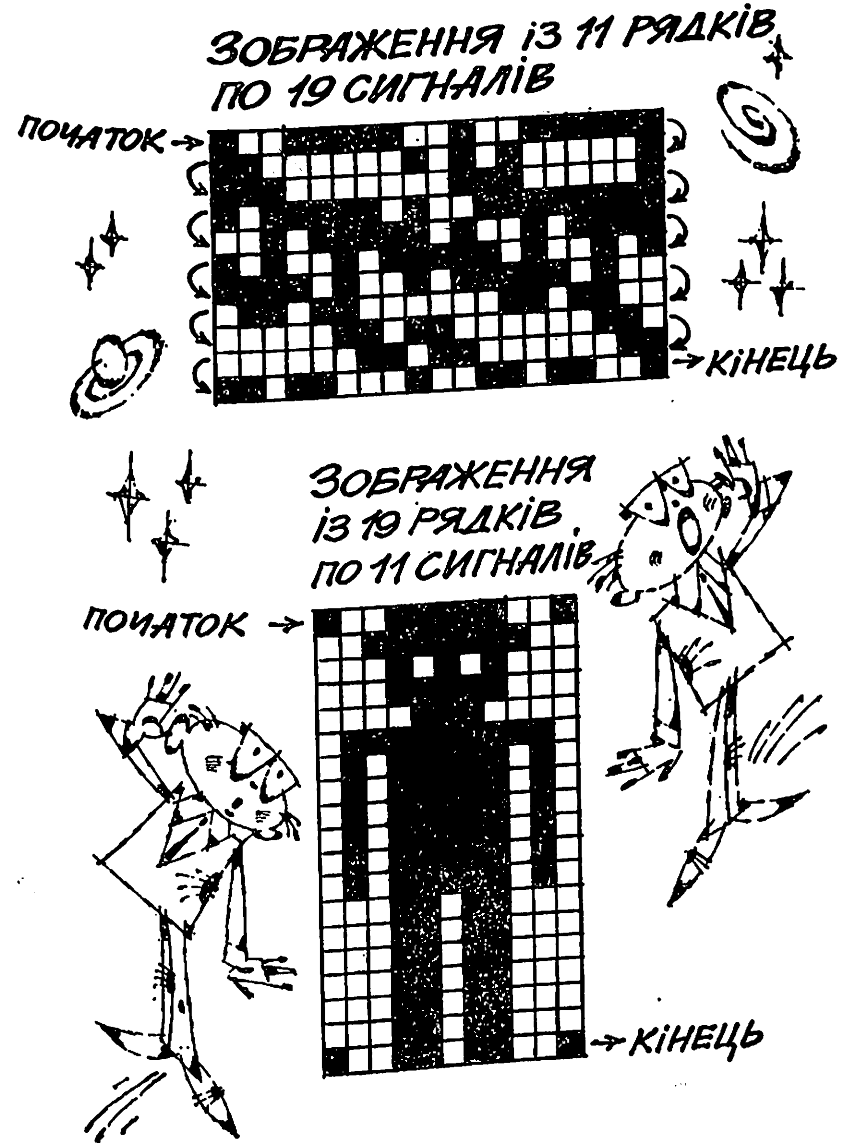
— Не помилиться за умови, якщо всі команди набрано правильно. Сучасні ЕОМ самі стежать, чи не припустилися помилок. І якщо помітять, негайно ж повідомлять і припинять роботу. Проте не обходиться й без казусів. Це — коли неправильно накажеш або машина «не дочує»... Так, у листопаді 1962 року через пропуск дефіса в програмі американці змушені були висадити в повітря ракету, яка стартувала до Венери. Маленький дефіс обійшовся в 18 млн. доларів. Через помилку ЕОМ у США один передплатник одержав 15 тисяч номерів одного і того ж журналу. А буває, що машина навіть скаржиться, коли з нею неправильно поводяться. Так, один службовець з Сан-Франціско незаконно отримав від машини важливу інформацію. Цей злодій був заарештований лише після того, як ЕОМ подала сигнал... що її обкрадають.

— Цікаво було б почути, як ЕОМ справді допомагає розв'язувати складні й важливі задачі? — попросив Ігор.

— Таких прикладів багато. БАМ тільки-но починали будувати, а ЕОМ вже кілька років «обкочували» гігантську магістраль. У пам'ять машин ввели дані про топографію траси, швидкість і вагу майбутніх ешелонів, типи локомотивів, розклад руху поїздів. Розшифровуючи відповіді ЕОМ, спеціалісти вибрали найкращі варіанти для майбутньої траси, і не тільки її прокладання, а й експлуатації. ЕОМ, наприклад, підказала, що для гірської ділянки БАМу найкраще підходять тепловози ТЕ-116 і електровози ВЛ-60Р та ВЛ-80Р, вона дослідила роботу двигунів на високогірних ділянках і встановила, що тут дизелям не вистачатиме кисню. А потім інженери розробили методи подолання тепловозами «гірської» хвороби.



А чи треба нагадувати, яка важлива роль у підвищенні життєдіяльності людей, їх працездатності й емоційного настрою відводиться правильному харчуванню? Тепер при складанні меню в їдальнях, кафе і ресторанах формування раціону «вручну» — дуже складна справа. Тож і тут на допомогу приходить ЕОМ, яка формує страви з необхідною кількістю калорій, місткістю білків, жирів, вуглеводів, незамінних амінокислот, мінеральних речовин, вітамінів... ЕОМ застосовують для розвідки надр. Досліджуючи склад, щільність, пористість, пружність, магнітні та інші властивості мінералів, вона опрацьовує одержану інформацію і дає точні відомості для прогнозування покладів корисних копалин...



А тепер прошу пройти в обчислювальний зал. Подивитесь, як працюють електронні математики.

І робот повів гостей до головного машинного залу обчислювального центру. Тут уздовж стін стояли металеві шафи — вузли обчислювальної машини. За пультом керування — також робот. Він вводив у пам'ять машини програму розв'язання якоїсь задачі. Машина по-своєму жила, підморгуючи численними різноколірними лампочками.

— А яку задачу зараз розв'язує машина? — поцікавився Ікс-нульовий.

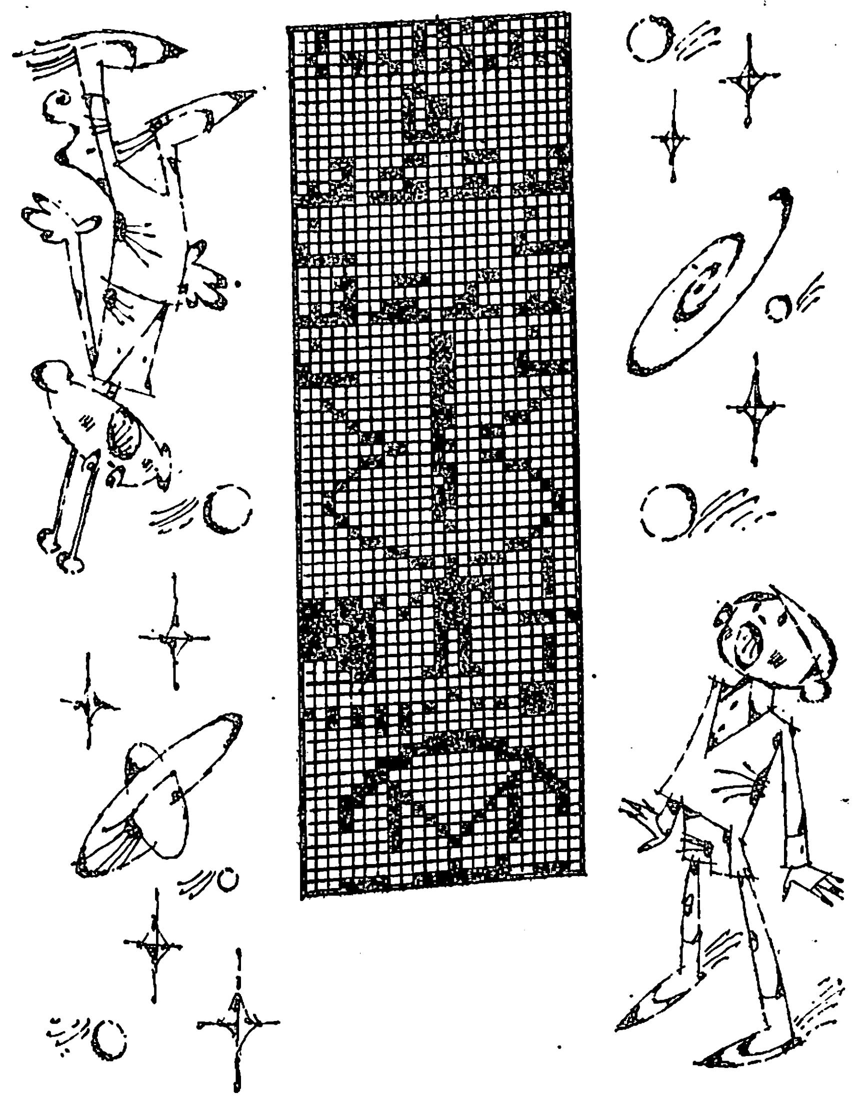
— Добирає найраціональніший варіант використання водних ресурсів моря.

— Цілого моря?..

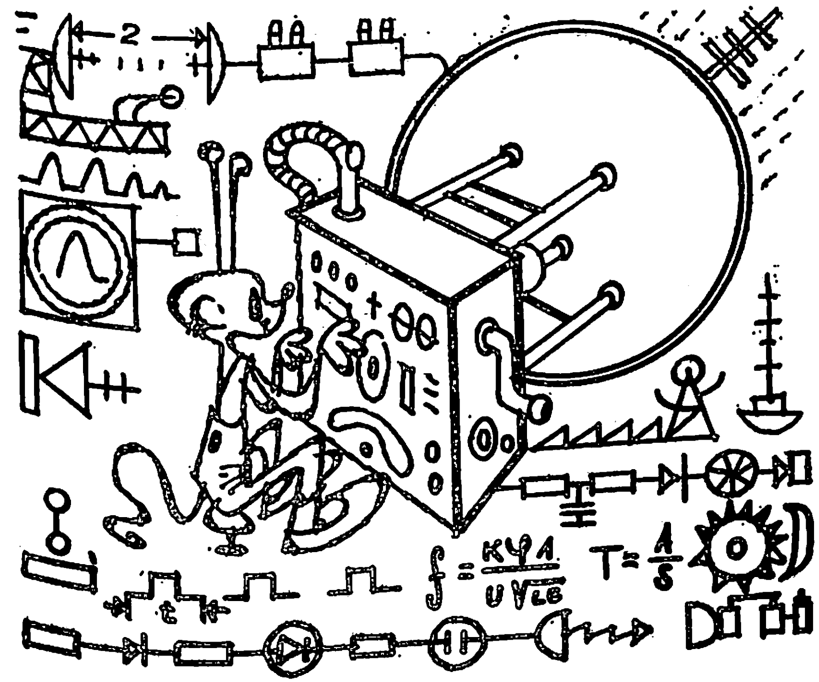
— Так. Учені розробили математичну модель моря. Тепер у ЕОМ вводять дані про явища природи, які регулюють життєдіяльність цього моря. Машина має показати, як природа відгукнеться на наші втручання. Вивчивши одержані дані, ми розробимо такі рекомендації для працівників промисловості і сільського господарства, які допоможуть найкраще використати природні багатства цього басейну... А в цьому відділі розробляють мову для спілкування з інопланетними цивілізаціями.

— Це теж має відношення до Кібертонії? — подивувався такій новині унікурсалець.

— Коли хочете, безпосереднє. Розроблено кілька варіантів мови для міжзоряного діалогу. В кожній з них не обійшлося без математики і здебільшого використано двійкову систему. Одиницю зображають довгим імпульсом, нуль — коротким. Пропонувалося використати число двійкових знаків, рівне добутку двох простих чисел, наприклад,



209. Тут розрахунок на те, що наш космічний сусід так само користується десятковою системою числення. Одержавши наші сигнали, він розмістить їх в 11 рядків по 19 у кожному. Але тут нічого не проглядається. Тоді він переставить сигнали в 19 рядків по 11 сигналів (третього не дано, бо $209=11\times19=19\times11$) і одержить інформацію про нашу зовнішність. Цей принцип використали земляни 16 листопада 1974 року, коли найбільший радіотелескоп послав поклик у бік зоряного скупчення Месьє-13. На відстані 24000 світлових років від Землі обертається навколо центра Галактики згусток матерії — понад 30000 зірок. Сподіваються, що, може, одна з них утримує навколо себе планету, на якій існує високорозвинена цивілізація. Якщо ланцюг цих припущень справедливий, то десь через 24000 років там, на Месьє-13, зафіксують 1679 сигналів ($1679=23\times73=73\times23$) і здогадаються розмістити їх у 73 ряди по 23 в кожному. Закодований у двійковій системі поклик землян багато чого розповість адресату. Перший рядок містить запис перших десяти послідовних цифроградців, далі йдуть порядкові номери найпоширеніших хімічних елементів, структура матеріальної субстанції живих організмів Землі — молекула ДНК і схема подвійної генетичної спіралі, затим на повний зріст сам землянин. Поряд із силуетом людини — число 14. Прийнявши за одиницю виміру довжину хвилі, на якій послано сигнал — 12,6 см, там одержать наш середній зріст, а число 4 млрд. ліворуч розповість, скільки нас. Передостанній рядок сигналів — наша космічна адреса. Третя від світила планета дещо піднята вгору, і зрозуміло чому — там мешкаємо ми. Останні сигнали закодували схему антен телескопа, який послав космограму.



Здається, земляни все передбачили. І якщо припущення справдиться, якщо землян почують, зрозуміють і негайно відгукнуться, відповіді все одно доведеться чекати довго. З далекої околиці Галактики вона прийде щонайменше через 48 000 років. Її одержать прапрапра... (префікс пра- повториться 1600 разів) правнуки тих, хто сьогодні читає «Дорогами Унікурсалії». Саме так довго чекати дня сенсації...

І все ж у вільний від досліджень час з велетенської чаші радіотелескопа з потужністю, яка перевищує потужність усіх електростанцій планети, летять у чорну безодню космосу поклики далеким сусідам.

Між іншим, пропонують послати як попередню звістку для позаземних розумних істот сигнали, що виражають відношення довжини круга до діаметра, тобто число π. У своїй традиційній формі — десятковій системі числення — воно записується нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Але такий сигнал навряд чи зрозуміє хто, крім людей, у яких десять пальців. Наші космічні сусіди, якщо такі є, найкраще зрозуміють послання, передане у двійковій системі числення — $\pi = 11{,}001\ 001\ 000\ 011\ 111\ 101\ 011...$

— А де можна докладніше прочитати про все побачене і почуте? — запитав Ігор.

— Книг із кібернетики багато. Коли ви у бібліотеці попросите щось, запевняю, вам не відмовлять. А тепер на вас чекає мій колега з бюро екскурсій. Він має запропонувати маршрут дальшої подорожі.

Робота з екскурсійного бюро застали в розпачі. Було видно, що він бився над розв'язанням задачі, важкої навіть для його електронно-транзисторної голови.

— Що сталося? — запитав його робот-екскурсовод.

— Параметри маршруту такі складні, що не знаю, як з ними й бути...

— Чим це ми так збентежили вас? — співчутливо запитав Віктор.

— Тут квадратура круга та й годі... А може, ще й складніше. Судіть самі. Часу на екскурсію залишається мало. А в нас сьогодні концерт ансамблю «Залізні хлопці». В програмі роботів твори вже добре відомих електронних

композиторів, таких як «БЭСМ-2» та «Урал», і початківців. Цікаво?

— Безумовно!

— А в літературному салоні — вечір, де можна буде познайомитися з прозою і поетичним доробком ЕОМ різних поколінь. Окремі твори можна буде почути навіть у виконанні самих авторів. Цікаво?..

Відповідь була схвальною.

Потім бідолаха розповів, що тільки вчора відкрилася міжнародна виставка картин і графіки ЕОМ... Що в школі № 10101011 сьогодні математичний вечір... І як-то всюди встигнути?

— Не так це й складно,— втішав його Ікс-нульовий.— Звичайно, цікаво було б побувати всюди, та з часом треба рахуватися. То ж ми надіємося на ваших колег. До речі, ми ще не познайомились. Як ваше ім'я, точніше — номер?

— 10111-й.

— Дуже приємно... Я — Ікс-нульовий. А хто вам допомагатиме?..

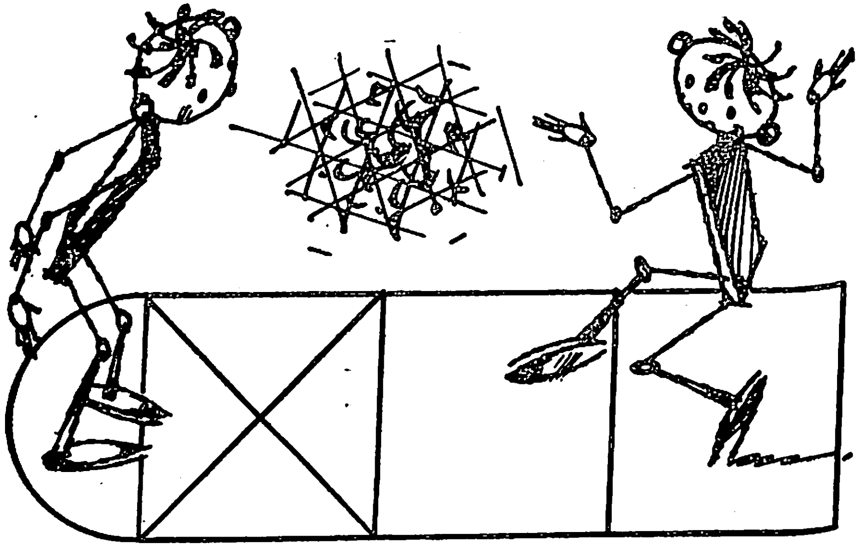
— 10110-й і 11000-й.

— Отож ми й поділимося на кілька груп, так би мовити, за інтересами. Одні підуть на концерт, інші — в літературний салон, ще інші — на виставку... Вашим колегам доведеться лише супроводжувати групи.

— Цікава думка! — зрадів 10111-й.— Залишається встановити: хто куди бажає?..

Іксовці підтримали пропозицію Віктора побувати на математичному вечорі. До них приєдналися й унікурсальці. Групу супроводжував 10111-й.

Школа зустріла гостей галасливою метушнею. З'ясува-



лося, що малі кібертонці теж люблять грати в шахи і класи. Щоправда, фігуру класу вони креслили на свій лад.

І було в них ще одне дивне правило: у гру приймати лише тих, хто може накреслити класи, не відриваючи крейди від асфальту і не прокреслюючи жодної лінії двічі в будь-якому напрямку.

— Чудова гра!— захопився Ікс-нульовий.

— Дивно,— сказав унікурсалець.— Як це наші унікурсалята не додумалися до неї? Адже ці класи мають пряме відношення до Унікурсалії.

— От і добре, привезете з подорожі нову гру, до того ж гру унікурсальну,— мовив Віктор.

Усі з цікавістю дивилися, як одні кібертонці викреслювали фігури, а інші, накресливши, включались у гру.

Аж ось до гостей підійшли директор школи, вчителі. Привітавшись і подякувавши за увагу, директор запросив усіх присутніх оглянути класи й кабінети кібертонської школи.

У вестибюлі на видному місці висіло оголошення про тематичний вечір: «Від лічби на пальцях — до ЕОМ». Вечір мав відбутися о 10000-й годині в залі № 101. Але нікого вже не дивували такі числа. Всі розуміли: вони записані в двійковій системі, і не такі й великі, якими здаються невтаємниченим.

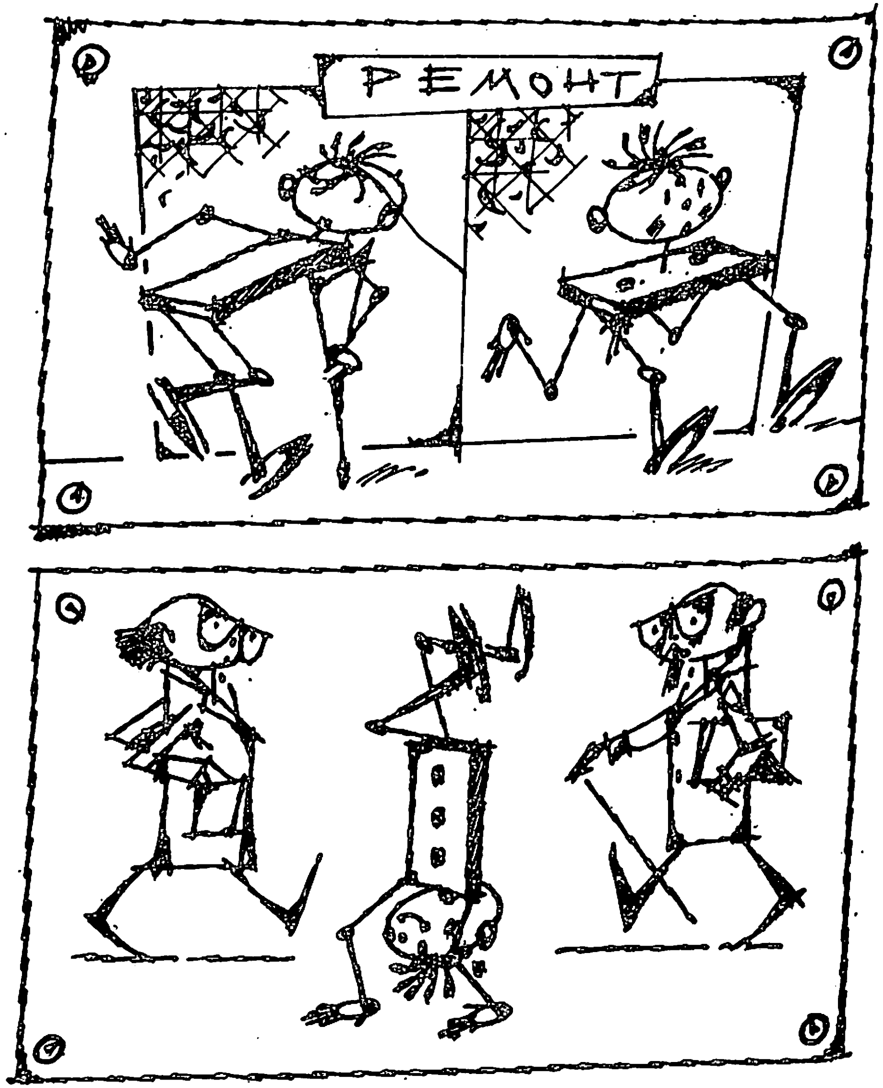
Класи й справді справили приємне враження. До послуг учителів і учнів тут були навчаючі машини. Вони допомагали вчителеві перевіряти в учнів домашні завдання, стежити за тим, хто як засвоює новий матеріал, проводити індивідуальні заняття з учнями.

До настання вечора залишилося кілька хвилин, коли гостей запросили до залу. З усього було видно, що організатори доклали багато зусиль і винахідливості, щоб розкрити довгий і нелегкий шлях математичної науки від лічби на пальцях до електронних математиків.

На окремому стенді були показані зразки художньої творчості ЕОМ: графіка, ноти, тексти машинної поезії, прози. Гостям сподобалися дотепні малюнки з життя і побуту роботів.

— Оце так відремонтували!..— сміялися всі з невдало відремонтованого робота.

— А ось що робитиме робот, коли його неправильно запрограмувати,— додав пояснення директор школи.— Правда, догори ногами він не піде, як на цьому малюнку, але від нього можна всього чекати...



— А це що, роботи розв'язали задачу створення вічного двигуна?! — радісно вигукнув Ігор, розглядаючи черговий малюнок.

— На жаль, то лише картинка,— заспішив розчарувати його Ікс-нульовий.

— А чому?..— втрутився Ігрек-нульовий.— Чому такий двигун неможливий?

— Воно й справді цікаво, тільки це вже фізика...— згодився Ікс-нульовий.

— А он, диви, який шелепа! — Ігор підвів Олега до веселої сценки «Відгадай хто?»

— Довго бідоласі доведеться рахувати! Так діяли лише перші роботи,— ніби виправдуючись, пояснив 10111-й.— Це старовинний рисунок. Коли ще кібертонці користувалися десятковою системою числення. Зверніть увагу: роботи, звичайно, рахують у двійковій системі числення, а кібертонці ще до неї не звикли, і написи художник зробив у десятковій.

— А скільки треба було б поставити запитань, щоб відгадати, хто затулив очі, коли б це зробив робот з отаким номером, як на цьому рисунку?

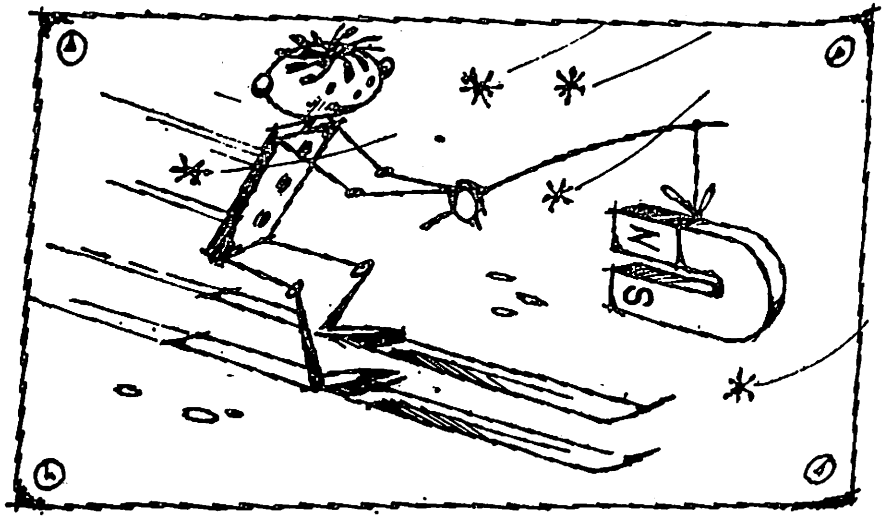
— Зовсім мало.

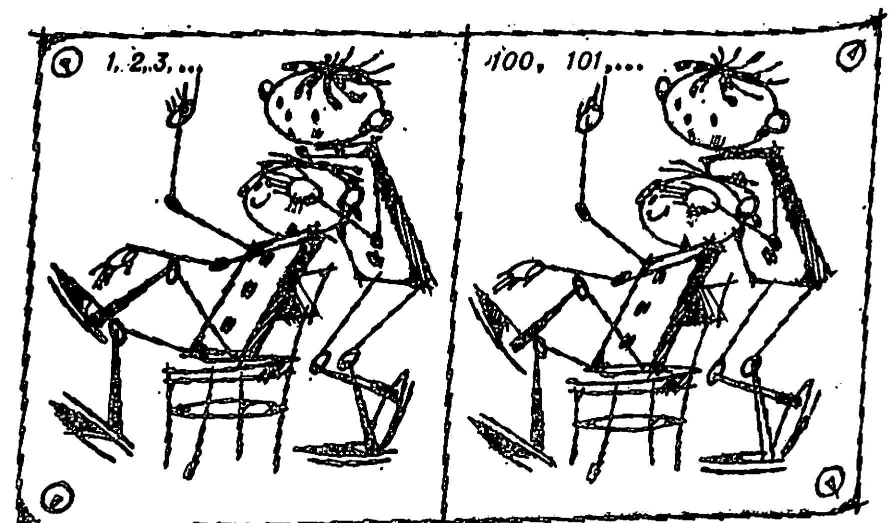
— А все-таки?

— Це ви легко можете встановити самі...

Тим часом до залу заходили учні, вчителі. Рівно о 10000.00 вечір розпочався.

Виступаючі зі знанням справи розповідали, як вдосконалювалася техніка лічби, засоби обчислень. Розповіді супроводжувалися демонстрацією картин, кінофрагментів, які унаочнювали і ніби наближали події далекого минулого.





повідомлення про винайдення і розвиток ЕОМ зробив робот, спеціально запрошений на вечір з обчислювального центру.

Потім розпочалася друга, розважальна частина вечора. Присутні з інтересом спостерігали, як сконструйований учнями робот «Веселун» успішно вибирався з будь-якого лабіринту. Причому рятувальною ниткою йому служив не подарунок Аріадни, як Тесею, а його пам'ять.

Потім відбулися дивовижні події з таємничими числовими таблицями мудрого Бакабона.

...Правитель однієї східної країни дуже любив математику і так вправно розв'язував складні задачі, що вже не знаходив нічого цікавого в головоломках, які пропонували йому придворні. Зрештою, він покликав десять мудреців і сказав:

— Ви тільки час забираєте в мене, пропонуючи задачі, які не варті, аби я ними займався. Наказую придумати таку задачу, щоб умова її була проста і зрозуміла, а сама задача така складна, щоб я розв'язав її не раніше вечора наступного дня. Хто таку задачу придумає, одержить царський дарунок. А хто не придумає...

Довго думали мудреці. А в призначений день прийшли до володаря. Та тільки котрийсь починав викладати свою головоломку, цар тут же розв'язував її. Охоронці геть проганяли невдаху з царського двору. Так сталося з першим, другим, дев'ятим. Нарешті дійшла черга до останнього — десятого мудреця. Це був старий-престарий Бакабон. Цар наготувався послухати й цього. А той, не кваплячись, дістав з кишені шість таблиць, списаних різними числами, одібрав з них три, подав цареві.

№ 1

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

№ 2

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

№ 3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

№ 4

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

№ 5

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

№ 6

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

— У цих таблицях, ясновельможний, є число, яке я задумав. Назви його,— спокійно мовив Бакабон.

Цар, глянувши на таблиці, оторопів. У кожній з них було аж по 32 числа.

— Я ж наказував, щоб задача була проста.

— Твою волю я виконав, мій володарю. Тоді візьми оці шість таблиць і поверни мені ті, у яких є задумане тобою число.

Цар довго розглядав таблиці, нарешті повернув їх мудрецеві — всі шість.

— Ти задумав число 63.

Не кажучи й слова, цар знову взяв таблиці, а повернув Бакабону четверту і п'яту.

— Ти задумав число 6.

Цар ще дужче розсердився.

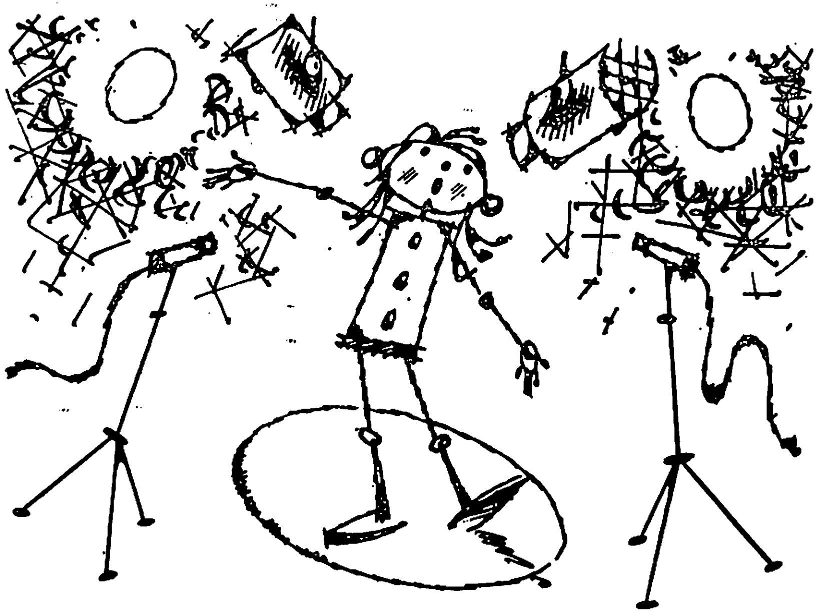
— Я не встану з місця, доки не розгадаю таємниці твоїх таблиць,— заволав він.— Ей, слуги, видайте старому обіцяну нагороду, і нехай чекає, поки я не з'ясую, як він їх склав...

Сім днів і ночей ніхто не смів переступити поріг володаря. А цар тим часом списав гору пергаменту, схуд, пожовк, але таємниці таблиць Бакабона так і не розкрив. Аж на восьмий день, знесилений, він упав посеред покою і проспав цілу добу. Прокинувшись, наказав привести Бакабона.

— Я потрою нагороду, але відкрий мені таємницю!

— Золото не робить людину щасливою,— мовив Бакабон.— Та й що я робитиму з ним... А таблиці мої дуже прості. Знаючи двійкову систему числення...

На цьому оповідач замовк. Та збуджений зал хором вимагав розтаємничити винахід стародавнього мудреця.



Нарешті в залі запанувала тиша.

— Наша розважальна частина — це не тільки розваги, а й робота,— сказав ведучий.— От і думайте. Цар був один, а вас багато. Переможцеві ми теж обіцяємо винагороду... А наступний номер ми присвячуємо нашим електронним помічникам. Послухайте уривок з вірша «Про нашого Антона», якого написав Валентин Бичко.

ПРО НАШОГО АНТОНА

Щоб не мати клопоту
І не знати втоми,
Всю роботу роботу
Доручили в домі.

Він стоїть під кухнею
Мовчазний, мов риба.
А поклич — послухає
І умить прибиба.

Налягло на чоботи
Трохи пилу, бруду.
Натягни лиш роботу —
Як дзеркальні будуть!

Замість носа — патрубок,
Щоки сяють лоском.
Металевий парубок
З електронним мозком.

Е-е, пальто без гудзика.
Знов підводить побут.
Це не хитра музика —
Пришиває робот.

Приготує цитруси,
До столу запросить,
Скатертину витрусить
І вимие посуд.

Мить — і вже труди нові,
Рух для нього звичний.
Хоч і не людина він,
Зате ж симпатичний.

Зал дружно нагородив виконавця оплесками. Найдовше аплодували 10111-й і доповідач з обчислювального центру. Воно й зрозуміло: хвалили їхнього товариша.

Здавалося, програмі вечора не буде кінця. Кожен номер розкривав якісь нові можливості застосування ЕОМ, цікаві властивості різних систем числення. Все це подавалося у веселих сценах з життя кібертонців і роботів. Задачі, які вплітались в діалоги, змушували всіх учасників вечора шукати ключі до розв'язку. І вищою винагородою у цих змаганнях було розуміння того, що ти взяв висоту, на якій досі ще не бував.

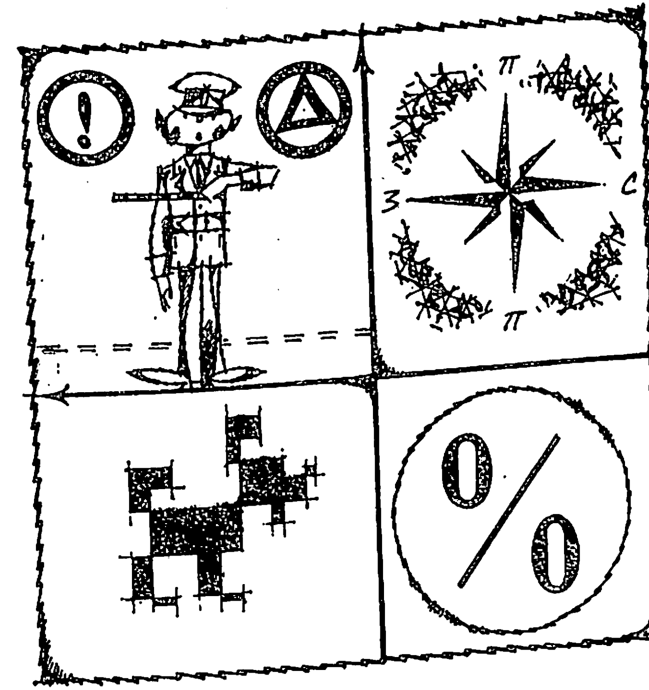
Переможцям було вручено нагороди. На жаль, гостям не повезло. Іксовці, правда, не брали участі у змаганнях, бо все, про що йшлося, для них було вже знайоме. Інші ж, хоча й намагалися бути активними, не витримали поєдинку з учнями-кібертонцями. Лише Ігор одержав заохочувальний приз: він таки збагнув, як відгадувати задумані числа.

З вечора гості вирушили прямо на аеродром: невдовзі мав прибути літак з Іксовії.

На аеродромі зібралися всі три групи. Часу залишалося тільки на те, щоб випити чаю. Поки друзі пили чай, 10111-й придбав квитки і навів довідку про метеорологічні умови. Політ мав бути безпечним. Щоправда, над Іксовією дощило...

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Який буде розгорнутий алгоритм побудови трикутника АВС за трьома сторонами а, в, с?
2. Побудуйте в формі схем алгоритм пошуку легшої пластинки за допомогою двох зважувань.
3. Побудуйте в формі схем алгоритми доведення двох теорем і нерівності.
4. Якими були програми для обчислення: а) суми $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+1976\times 1977$? б) суми $1^1+2^2+3^3+\ldots+9^9$? в) добутку $51\times 53\times 55\times\ldots\times 67\times 69$?
5. Як записати арифметичні вирази мовою БЕЙСИК?
6. Як побудувати алгоритм складання квадратів чисел у формі схеми і мовою БЕЙСИК?
7. Який номер школи відвідали гості в Кібертонії?
8. Знайдіть десять відмінностей у двох зображеннях гри кібертонців у шахи.
9. Як накреслити клас кібертонських учнів?
10. Скільки запитань досить поставити роботу, аби встановити, що саме № 4627 затулив йому очі?
11. Як відгадати число в таблицях Бакабона? В чому секрет їх будови?



НА ПЕРЕХРЕСТЯХ КООРДИНАТІЇ

Рейс наближався до кінця, коли стюардеса оголосила, що над Іксовією густий туман, аеродром літаків не приймає і доведеться зробити посадку в Координатії. Бажаючі можуть познайомитися ще з однією країною.

Почувши таке, Незнайко завередував:

— Не могли вибрати щось цікавіше...

— Чув я,—підтримав його Верхоглядько,— що Координатія — це суцільна одноманітність вулиць і мешканців.

Ікс-нульовий заступився за координатівців.

— Кожна країна,— сказав він,— по-своєму цікава. Треба лише вміти бачити...

Та літак уже йшов на посадку.

Невдовзі друзі переконалися, що координатівці й справді прихильники прямих ліній. В архітектурі, оформленні приміщень — у всьому переважали прямі лінії. Іксовці здогадувалися, що така повсюдна прямолінійність не випадкова.

Так воно й було. Координатівці пояснили, що їхня країна забудовувалась дуже швидко: треба було терміново розселити нескінченну множину мешканців. На конкурсі забудови першу премію одержав Гео Метр. Він запропонував неухильно дотримуватися двох правил: по-перше, однакової віддалі між вулицями, по-друге, всі вулиці мали бути лише двох взаємно перпендикулярних напрямків. Зі сходу на захід йтимуть абсциси, з півдня на північ — ординати.

Іксовці з радістю довідалися, що їхня рідня працює і в цій країні. Головну абсцису координатівці назвали віссю іксів, а ординату — віссю ігреків. З їхньою допомогою Гео Метр навів порядок серед безлічі адрес Координатії. Номери вулиць, на перехресті яких знаходиться якась установа, утворюють її адресу. А щоб не було плутанини, абсцису завжди пишуть першою.

Центральна площа, на якій прикоординатився літак, розміщена на перехресті головних вулиць країни, від яких починається відлік усіх інших. Адреса її — (0; 0).

Щоб новоприбулі не заблукали, кожному вручили схему центру Координатії. Іксовці були вражені винаходом Гео Метра. Адже із схеми невеликої частини країни чітко уявляється вся її територія. Вони також збагнули, що в самих адресах — ключ до розв'язання багатьох задач, які можуть постати перед подорожніми.

Друзі прогулялися по абсцисі до перехрестя (—2; 0) і вирішили поповнити свої бібліотеки.

— Де тут найближча книгарня? — звернувся Ігрек-нульовий до перехожого.

— Не подумайте, що я негостинний... Але хочу знати: чи зрозумієте ви мою відповідь. А тому скажіть: яка з двох точок правіша — $(x; 0)$ чи $(2x; 0)$?

— Цікава у вас форма пояснення... — не без іронії сказав Ікс-нульовий.

— Вона зумовлена тим, що прибулі часто не розуміють наших відповідей або розуміють їх неправильно. Коли ж заблукають, звинувачують нас в негостинності.

— Невже в прямолінійному світі можна заблукати?

— Швидше, ніж у лісі. Як бачите, споруди Координатії не мають особливих ознак. Красу нашої країни ми бачимо не стільки в різноманітності архітектурних форм, скільки в невичерпності задач, які допомагає нам розв'язувати система адрес, розроблена Гео Метром.

— Та, що ви її нам поставили, теж з таких?

— Її розв'язали б дошкільнята.

— Тим паче соромно нам не впоратись.

І Ігрек-нульовий відповів на запитання координатівця. Того це приємно здивувало, і він тут же пояснив, як пройти до бібліотеки:

— Подвойте координати перехрестя, на якому ми з вами стоїмо, і будете біля книгарні...

Книжкові полиці вразили друвів. На них всіма барвами веселки вигравали обкладинки книжок.

— Жаль, що ми без грошей,— забідкався Олег.— Тут можна було б дещо придбати.

— Звідки ж було знати, що футбольний матч закінчиться отаким сюрпризом! — відказав йому Віктор.

Розмову почув координатівець, очевидно, завідуючий книгарнею.

— Надаремне жалкуєте, — сказав він, — у нас книжки не продаються.

— Нащо ж тоді повиставляли?

— Для подарунків. Власне, для обміну на розв'язок задачі. А на додачу до книжки — цікаве заняття, задачу про книжки.

— І що ж ви пропонуєте на додачу до книжки «Магістра Неуважних Наук»? — запитав Олег.

— Дрібничку... 9 таких книжок коштують 11 карбованців з копійками, а 13—15 карбованців з копійками. Кожен, хто відповість, скільки коштує одна книжка, може одержати розповіді про магістра-невдаху. Кому важко усно розв'язувати — на столі папір і олівці.

І робота закипіла, як на контрольній. Одні шукали ціну усно, інші ж не хотіли ризикувати і швидко розмалювали аркуші паперу розрахунками. Та ось до координатівця підійшов Ігор і шепнув йому на вухо відповідь. Той не вагаючись дістав з полиці книжку і вручив її Ігореві. Інші теж не схибили і стали власниками книжок.

— А чи немає у вас книжки про саму Координатію?—

поцікавився Олег.— Це була б найкраща згадка про нашу подорож.

— Про нас написано багато. Але туристи так часто просять щось про Координатію, що тепер у мене є лише по кілька примірників двох різних книжок, які мають однакову назву — «Метод координат».

— Як нам придбати ці книги?

— Теж просто. Разом вони коштують 28 копійок, але перша книжка на $33\frac{1}{3}$ % дорожча від другої. Хто знайде, скільки коштує кожна з них і на скільки процентів ціна другої книжки нижча від ціни першої, той може взяти обидві. І це найкращий варіант, бо вони ніби доповнюють одна одну, а разом дають досить повну картину Координатії.

Ціну кожної книжки всі обчислили. З другою ж частиною задачі у декого сталися ускладнення. Унікурсалець, давши правильну відповідь на першу частину задачі, сказав, що коли перша книжка дорожча за другу на $33\frac{1}{3}$ %, то само собою зрозуміло, друга книжка дешевша від першої на $33\frac{1}{3}$ %. Завідуючий відповів, що той помиляється, і унікурсалець став палко доводити правильність своєї відповіді.

— Хіба коли хтось на два роки старший за мене, то я не на два роки молодший від нього?

— Ви точно на два роки молодші за того, хто на два роки старший за вас. Але в задачі питання стоїть по-іншому.

— Нехай по-іншому. А хіба коли я в два рази за когось старший, то той не буде в два рази молодший за мене?

— Безумовно: в два рази молодший. Але ж у задачі питається не на скільки копійок і не в скільки разів вартість другої книжки нижча від вартості першої, а на скільки процентів.

— А може, просто вам шкода книжок?

— Ні, ні. Я тільки хочу почути правильну відповідь.

Зрештою Ікс-нульовий заспокоїв унікурсальця і сяк-так переконав, що той помиляється. Унікурсалець знову взявся за обчислення. Йому все ще здавалося, що з ним повелися негречно. І тільки коли Олег показав завідуючому розв'язок задачі й одержав обидві книжки про Координатію, унікурсалець зрозумів, що він таки помилявся.

Друга частина задачі також була розв'язана, і всім вручили книжки. Та оскільки час наближався до обіду, в завідуючого запитали, як пройти до найближчої їдальні.

— Це далеченько,— відповів він.— П'ять кварталів у додатному напрямку вісі іксів і три — в додатному напрямку ігреків.

Вибір страв у їдальні подвоїв апетит. Меню читалося як пригодницьке оповідання.

— Боюся, щоб нам не довелося так обідати, як купувати книжки,— висловив тривогу унікурсалець.

— Все може бути. Тільки з книжками було простіше. А от розв'язувати задачі перед обідом...

— Нікуди не дінемось. Робитимемо те, що скажуть господарі.

У цей час до столиків підійшла офіціантка.

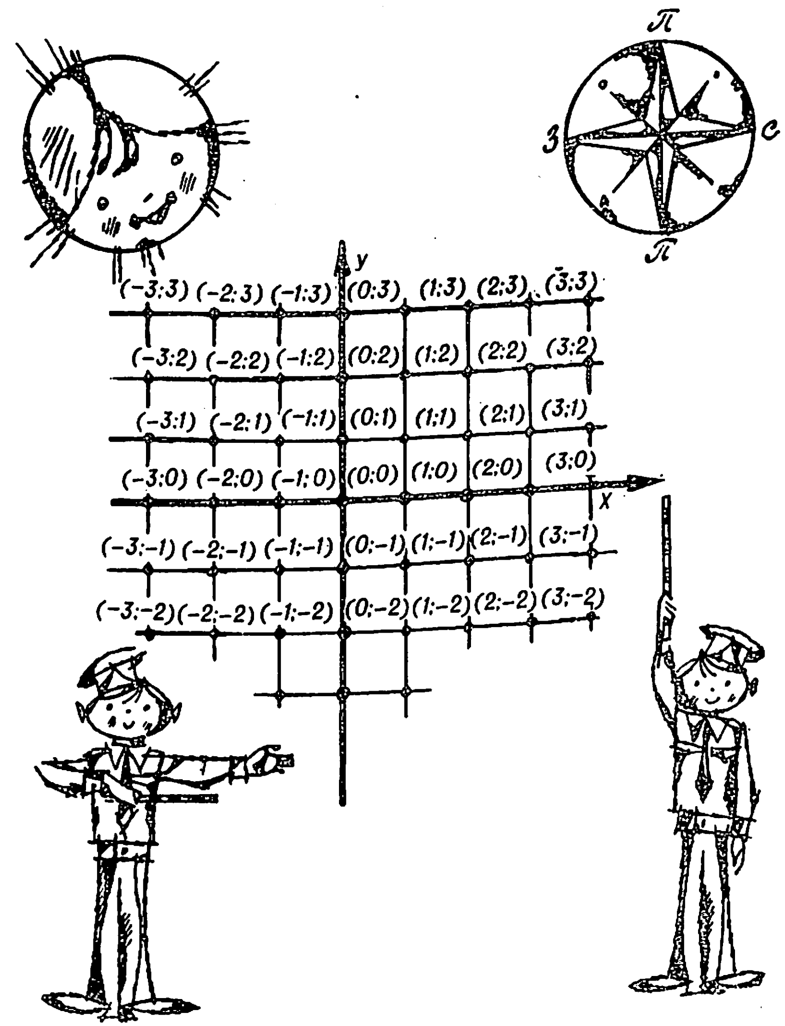
— Скажіть, будь ласка, як у вас пообідати? — запитав її Ігрек-нульовий.

— О, я бачу — ви з книгарні. Отже, знаєте наші правила...

— Так. І все ж ми хочемо їсти...

— То й смакуйте на здоров'я, а розрахуєтесь потім.

— А якщо хтось залишиться в боргу?— запитав Віктор.



— Не хвилюйтеся — цього не буде. То що ви бажаєте?..

По обіді подорожні самі попросили «рахунок», щоб, як вони жартували, заробити те, що вже з'їли.

— Ось вам повний глечик молока місткістю 8 склянок, а також два порожніх глечики: по 5 і 3 склянки. Розділіть молоко порівну. Цю задачу розв'язуватимуть ті, хто обідав за першим столом. Для другого столу у мене аж чотири глечики. Перший повний ущерть і містить 24 склянки молока, три останні — порожні. Але пам'ятайте, що місткість другого — 13 склянок, третього — 11, четвертого — 5. Розлийте молоко так, щоб у трьох перших глечиках було порівну, а четвертий, використавши для переливання, спорожніть зовсім. І ще чула я, що серед вас є іксовці?

— Є такі,— піднявся Ікс-нульовий.

— Вам я запропоную дещо складніший рахунок. Ось два глечики по 9 і 12 склянок. Підійдіть он до того крана і принесіть мені в будь-якому глечику 4 склянки води. Якщо буде потреба відлити зайву воду, відлийте її в раковину...

— От і стали ми Пуассонами,— засміявся Ікс-нульовий, коли офіціантка відійшла.

— Ким, ким?..

— Пуассонами. Був такий французький математик Сімеон Дені Пуассон (1781—1840). У молодості трапилась йому така задача: якийсь там чоловік має 12 пінт вина (пінта — старовинна міра рідини, приблизно дорівнює 0,568 л) і хоче віддати половину його. Але в нього є лише дві посудини: одна на 8, а друга на 5 пінт. У який спосіб налити шість пінт в посудину на 8 пінт?.. Задача справила на молодого Пуассона таке враження, що, вже в літах, він

казав: «Ця задача визначила мою долю. Я поклав собі: якщо розв'яжу її, неодмінно стану математиком».

— То він дотримав слова?

— Так. І задачу розв'язав, і знаменитим математиком став — членом багатьох Академій наук, в тому числі й Петербурзької...

— Оце задача!

— Справа не так у задачі, як у тому, кому вона дісталася...

Всі заходилися переливати молоко, звичайно, на папері. Іксовці теж щось записували, про щось радилися: їм довелося добряче поморочитися, аби довести, що при таких місткостях посудин чотири склянки води відміряти не можна. Вони зробили навіть більше — довели, за яких умов такі задачі мають розв'язки, а за яких — нерозв'язні.

Офіціантка була задоволена розрахунком нових відвідувачів і запросила всіх на вечерю.

Ігрек-нульовий поцікавився, як інші розв'язали запропоновані їм задачі. Олег пояснив, як він поділив 8 літрів молока на дві рівні частини.

— Це не кращий спосіб,— зауважив Ігрек-нульовий.

— Я розв'язую задачу усно.

— Це справді вимагає неабиякої винахідливості. Такі задачі краще розв'язувати за допомогою графів.

— Цікаво, як це робити?

— Охоче розповім, бо таким способом можна розв'язувати й інші логічні задачі. Занумеруємо наші глечики по 8 склянок — № 1, по 5 — № 2 і по 3 — № 3. Спершу № 1 — повний, а № 2 і № 3 — порожні. Цей стан позначимо точкою (8.0.0). З № 1 можна перелити в № 2 — 5 склянок або в № 3 — 3. Ці два стани зобразимо відповідно точками (3.5.0) і (5.0.3), а стрілки вказуватимуть, що вони одержані з вихідного стану (8.0.0). Розглянемо, які варіанти можуть виникнути при другому переливанні. Із стану (3.5.0) можна одержати (0.5.3) або (3.2.3), а з стану (5.0.3) тільки (5.3.0), і позначимо ці операції відповідно стрілками. Ви вже здогадалися, що дальші можливі варіанти переливань провадяться способом, який нагадує «вирощування» графа-дерева. На рисунку видно два ланцюги, які йдуть від стану (8.0.0), і кожен закінчується потрібним нам станом (4.4.0). Вони й відповідають двом різним варіантам шуканого переливання. Відразу ж видно, що спосіб: (8.0.0) → (3.5.0) → (3.2.3) → (6.2.0) → (6.0.2) → (1.5.2) → → (1.4.3) → (4.4.0) є найраціональніший.

— Так. Ваш спосіб дуже зручний.

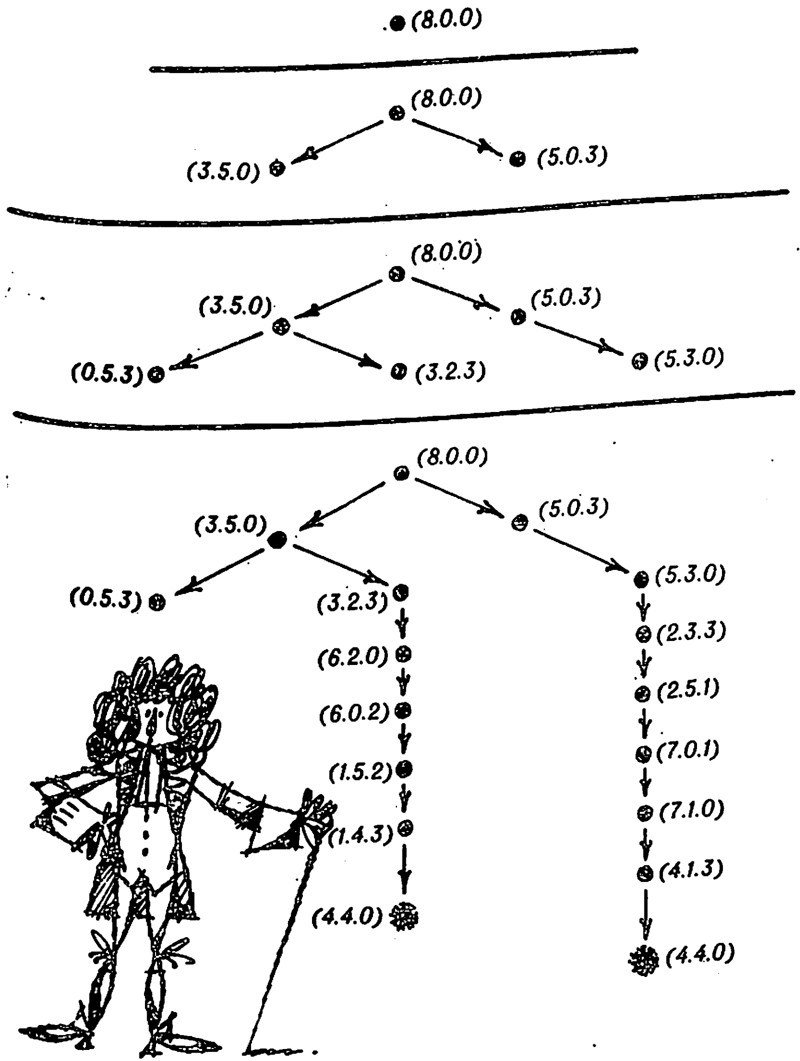
— Його переваги в тому, що тут не треба вгадувати. З самого графа видно всі можливі варіанти. Граф допомагає нам уникнути непотрібних переливань.

— Цим способом можна швидко розв'язати і задачу Пуассона, і ту, яку запропонувала нам офіціантка?

— Безумовно...

Нарешті іксовці згадали: треба повідомити в Іксовію, що вони затримуються. Адресу пошти визначив Ікс-нульовий, піднісши до квадрату відповідно абсцису і ординату їдальні. Відправили телеграму і продовжили знайомство з Координатією.

Коли мандруєш по незнайомій країні, ніколи не вгадаєш, яка несподіванка чатує на тебе. На завжди тихих вулицях Координатії нараз спалахнула суперечка. Незнайко і Верхоглядько щось запально доводили координатівцям,



а ті слухали й лиш посміхалися. Побачивши іксовців, Незнайко звернувся до них:

— Я ж казав, у цій Координатії нічого не доб'єшся. Питаємо, як пройти до кінотеатру, а вони... Як це можна з точки $(x;\ y)$ йти до точки $(2x;\ 2y)$, коли нема жодного дороговказу та й невідомо, звідки починати цей маршрут?

— А ви, бачу, знову за своє, — сказав Ікс-нульовий.— Замість того, щоб розібратися в задачі, звинувачуєте господарів? Дивіться на будинок: там чітко написано $(-1;\ 2)$ — початок вашого маршруту.

— Ну то й що, це ж не $(x;\ y)$?

— Ет, вам і за годину не втлумачити! Коли хочете, ходіть з нами — ми теж туди...

Поки брали квитки, Верхоглядько розповів, що вони хотіли побувати і в музеї, та так і не знайшли його.

— І все їхні фокуси, — гарячкував Незнайко. — Один, наприклад, питає: «А яка з двох точок правіше: $(a;\ 0)$ чи $(-a;\ 0)$?» Звісно, правіше $(a;\ 0)$. Я так і відповів. Так, бачите, не по його. Потім він мене запитав, яка з точок вища — $(x;\ y)$ чи $(x;\ y-a)$. Ясно ж, що перша...

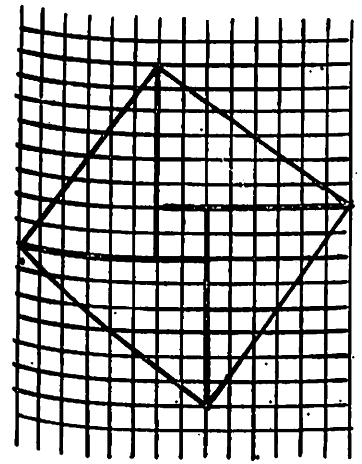
— А ми думаємо не так, — заперечив один з іксовців.

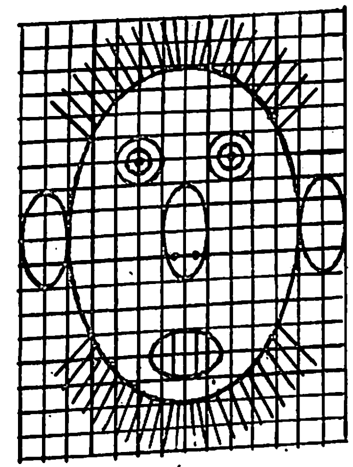
Ікс-нульовий сказав лише кілька слів про число a, і Незнайко з Верхоглядьком визнали свої помилки.

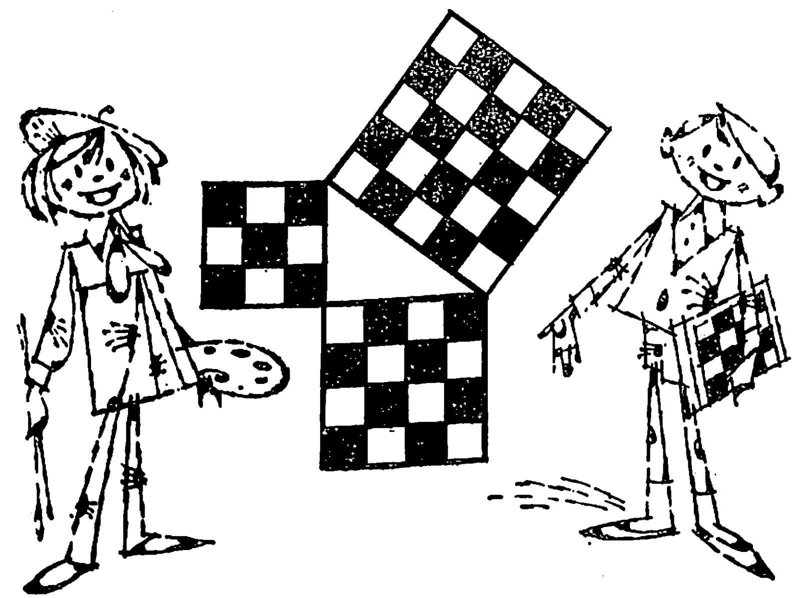
У фойє кінотеатру Ігор звернув увагу на виставку малюнків і графіків. Усі вони були виконані в характерній манері: скрізь переважали прямі лінії.

Ікс-нульовий побачив у цих вправах більше, ніж інші.

— Зверніть увагу,— сказав він,— малюнки мають відношення до Координатії не тільки тому, що малювали їх діти цієї країни...







— Звичайно,— зрозумів натяк Олег. — Вони виконані в певній системі прямокутних координат. І лінії тут проводилися не як кому хотілося, а як того вимагали певні функціональні відношення.

Такі малюнки, мабуть, не попадаються і на вступних екзаменах в університет.

Унікурсальця захопили креслення, що ілюстрували можливості рівнянь. Вони описували найнесподіваніші множини точок: порожню множину, окрему точку, скінченні множини точок, прямі і криві лінії, певні частини площини, нарешті, всю площину. Особливо сподобалося йому доведення теореми Піфагора, виконане в стилі координатців.

— А ви завважили, коли і ким воно здійснене? — запитав Зет.

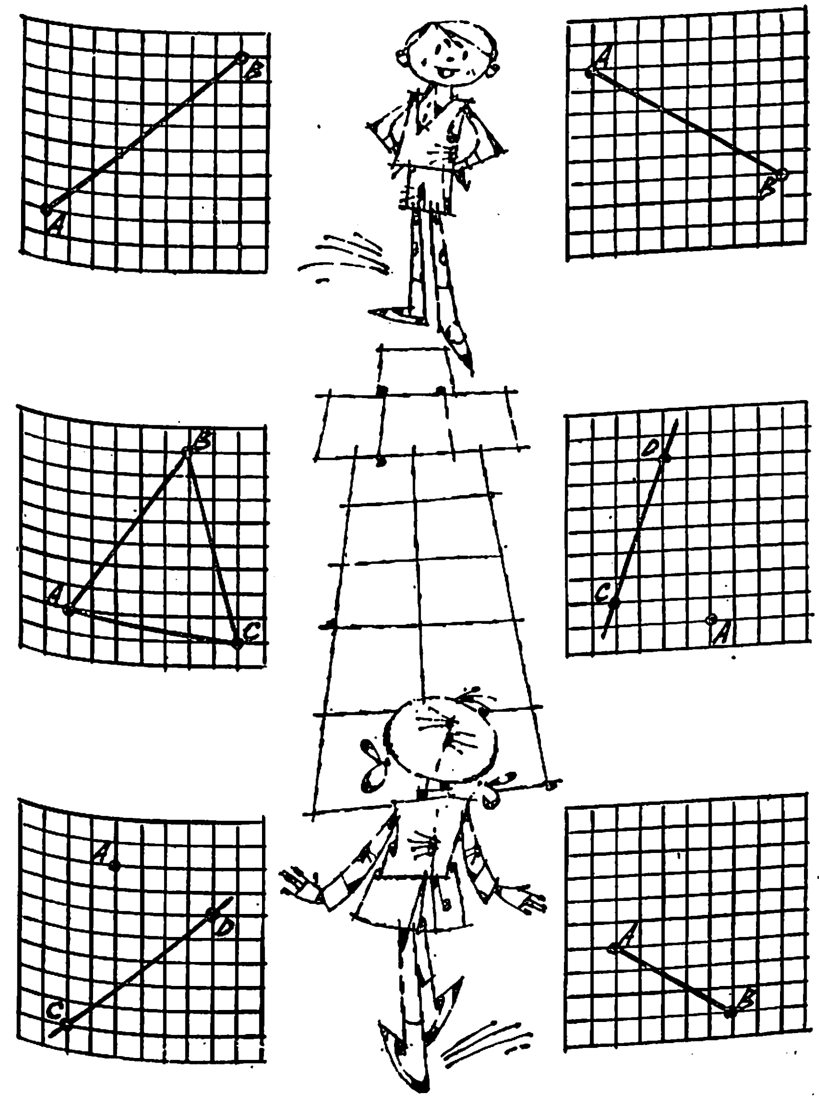
— Хто б міг подумати!..— ще дужче здивувався унікурсалець.

— Так, так. Це доведення знаменитого індійського математика Бхаскари II (1115 — після 1183). Воно таке очевидне, що під кресленням стоїть лише одне слово — «Дивись».

— І правильно вчинив Бхаскара,— додав Олег.— Що ж тут доводити? Навіть першокласник зрозуміє, що квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

— Бхаскара мав ще якісь праці?— запитав Ігор Зета.

— Мав. Одна з них називається «Лілаваті», тобто — «Прекрасна». Вчені гадають, що прекрасною Бхаскара називав свою доньку, а можливо, й саму науку про числа, в якій він знайшов багато несподіваних і красивих залежностей. Індійський народ глибоко шанує свого видатного вченого. Його ім'я був названий другий індійський штучний супутник Землі.



Найбільше враження справило доведення теореми Піфагора якогось координатівця. Щоб переконатися в правильності його, досить було вміти рахувати до 25.

Зет застеріг тих, хто особливо захоплювався очевидністю побачених в Координатії доведень знаменитої теореми.

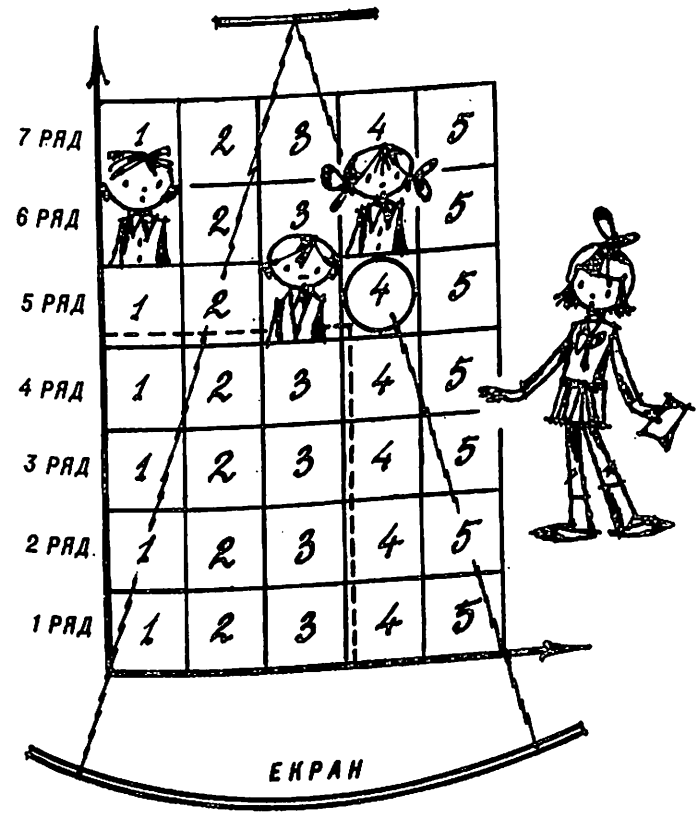
— Є легенда,— повідав він,— що Піфагор на честь відкриття теореми, названої його ім'ям, приніс у жертву сто биків. Звичайно, це тільки легенда, бо філософ рішуче виступав проти знищення тварин. Одначе ж його не могло не тішити віднайдене доведення теореми. Адже шумеро-вавілонські математики знали і користувалися нею ще за 1600 років до Піфагора.

Тут я хотів би ще раз звернути вашу увагу: як бачите, уже Піфагор не довіряв очевидності. Вона, очевидність, багато разів підводила довірливих. Адже багато поколінь вірило, що Сонце обертається навколо Землі. Потрібні були геній і мужність Коперника, щоб перемогла істина.

Серед малюнків і креслень чимало було задач, і друзі записали деякі на згадку про Координатію. Справді, хіба не цікаво довідатися, що на папері в лінійку (це ж план частини Координатії!) за допомогою лінійки без поділок можна побудувати середину відрізка (AB), розділити (AB) на п'ять конгруентних частин, розділити трикутник ABC на три рівновеликі трикутники, через точку A провести пряму, паралельну (СД), опустити з тієї ж точки A перпендикуляр на (СД), з кінця відрізка (AB) поставити перпендикуляр до нього і розв'язати багато інших задач?

Задачі захопили друзів, та задзвонив дзвоник, і всі рушили до залу.

— Не знаючи методу координат,— зауважив Ікс-нульо-



вий,— тут і місця свого не знайдеш. Кінозал — це теж ніби частинка Координатії. Ось гляньте на схему. Кожне місце в ньому має свої координати.

— Як фігури на шахівниці? — запитав Незнайко.

— Правильно. Тільки там абсциса позначається не числом, а буквою. Та це не міняє суті...

У фільмі йшлося про часи, коли координатівці тільки починали опановувати геометрію своєї країни. Незнайки зустрічалися на кожному кроці. А тому виникали численні непорозуміння, веселі та сумні ситуації.

Та в повній мірі розкрилася мудрість проекту Гео Метра, коли почалося технічне оснащення країни: прокладання ліній електропередач, телефонної і радіотрансляційної мереж. Прокладати їх уздовж абсцис і ординат було не раціонально: витрачалася зайва робоча сила, матеріали, обладнання. Найкоротші ж шляхи вимагали глибокої обізнаності з Координатією. І чим глибше вивчали її, тим більше вражала координатівців не стільки геніальність проекту забудови, скільки система адрес. Над цими адресами виконувалось багато арифметичних операцій, і кожній з них відповідали певні перетворення якихось геометричних образів на території Координатії.

Гео Метр, а потім його учні допомогли координатівцям розв'язати не одну складну задачу. Особливо коли, не обмежившись площиною, вони почали освоювати спочатку тривимірний простір, а потім і простори складнішого характеру. Технічні досягнення координатівців свідчили, що недаремно відкривалися формули. Через них лежав шлях до всього, чого досягла техніка Координатії.

Кіно справляло незвичайне враження.

— Оце історія! Оце дива!..— лунали захоплені голоси. Але Олег запропонував перевірити: чи справді математика координатівців дає такі наслідки, які вони бачили в кіно.

— Справа не в недовір'ї,— сказав він.— Але одна річ вірити тому, що ти побачив, інша, коли тебе переконали в цьому числа й теореми.

— А що? Це найкращий спосіб використати час, поки наш літак прибуде,— підтримав Олега Ікс-нульовий.— І почнемо з найпростішого: чи справді, коли до якоїсь адреси додавати одну і ту саму, то перехрестя лежатиме на одній прямій? А щоб далеко не ходити, візьмемо адресу музею, в який дехто з наших знайомих так і не потрапив, і додамо до неї... хто що хоче.

— Адресу їдальні,— випередив інших Віктор.

— Гаразд. Як ми тоді позначатимемо дані і шукані адреси?

— Музей — буквою M, їдальню — I, а першу, другу і подальші суми буквами S_1, S_2... Усім буде зрозуміло, про що йдеться,— запропонував Незнайко.

— Молодець! Наш візит у Координатію пішов тобі на користь. Отже, маємо M $(-5;\ -4)$, I $(1;\ 3)$, позначимо $M+I=S_1$, $M+2I=S_2$, $M+3I=S_3$...

— Можна й простіше,— знову обізвався Незнайко.

— Цікаво, як? — запитав Віктор.

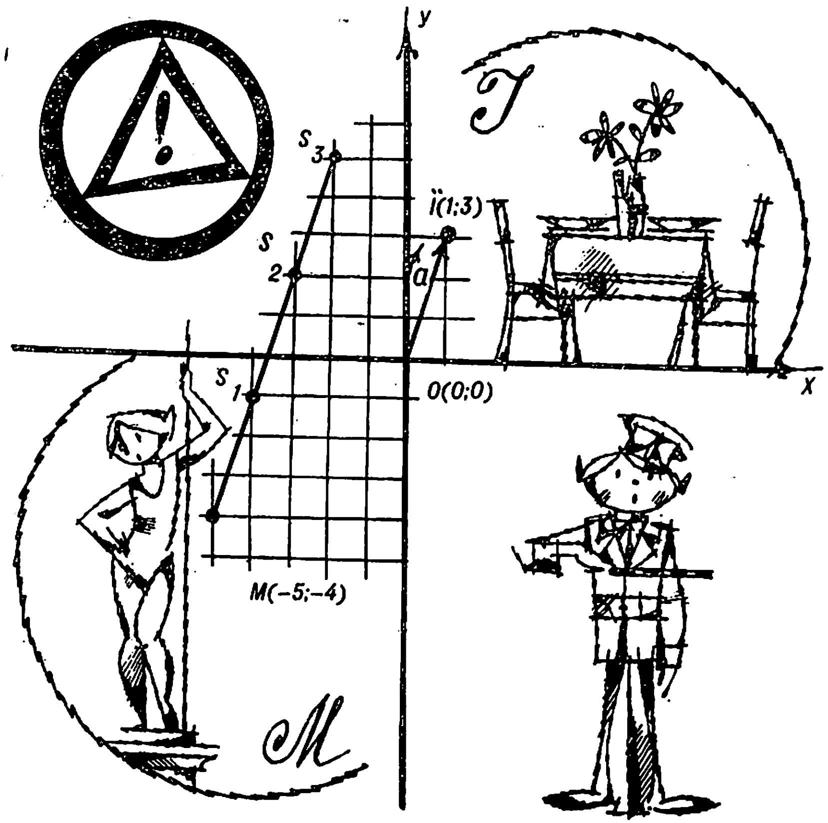
— Коли $M+I=S_1$, то $M+2I=M+I+I=S_1+I$, а $M+3I=M+2I+I=S_2+I$. Власне, так, ніби ми й не виходили з музею. А прийшовши в S_1, вирушимо звідти до S_2, потім з S_2 до S_3 і так далі.

Усі мовчки перезирнулися. От тобі і Незнайко.

Залишилося тільки виконати обчислення, які за схемою Незнайка зробив Олег: $M+I=(-5;\ -4)+(1;\ 3)=S_1(-5+1;\ -4+3)=S_1(-4;\ -1)$; $S_1+I=(-4;\ -1)+(1;3)=S_2(-3;2)$; $S_2+I=(-3;2)+(1;3)=S_3(-2;5)$.

Ігор тим часом наносив одержані точки на площину. Всі вони лягали на одну пряму.

— Все правильно,— показав він своє креслення іншим.



— Щоб так сказати, треба все це довести, як теорему,— вставив Ікс-нульовий.

— Хіба й так не видно? — здивувався Верхоглядько.

— По-перше, не видно, що обчислені нами точки точно належать одній прямій. Це ж тільки «на око». По-друге,

хто гарантує, що обчислена таким способом 101-ша чи 1001-ша точка не відскочить кудись убік?

— Ото вже...— намагався стояти на своєму Верхоглядько.— Все так чудово зійшлося, а тепер... Обчислені адреси, виявляється, лише наближено лежать на одній прямій.

— У фільмі ти прогледів одну істотну «дрібничку». Гео Метр спочатку теж довірявся здогадам. Але, щоб ті здогади стали теоремами, набутком математики, і Гео Метр, і його учні доводили їх.

— І на це пішли цілі століття?..

— Так. Зрештою, не обов'язково робити це зараз,— сказав Ікс-нульовий.

Віктор, який розглядав креслення, звернув увагу, що точка M також належить прямій, якій належать S_1, S_2, S_3, а I залишилася збоку.

— Яка ж тоді її роль?

— Щоб точку M можна було переносити безліч разів на $|OI|$ уздовж якоїсь прямої,— пояснив Ікс-нульовий.

— У Гео Метра це простіше.

— В нього працювали вектори.

Ікс-нульовий сполучив відрізком початок системи координат з точкою I, в кінці його намалював стрілку, на вістрі якої опинилася точка I, а над OI надписав $\vec{a}$.

— Якщо не забули, то відображення O на I, M на S_1, S_1 на S_2, S_2 на S_3 потім назвали просто вектором $\vec{a}$. І все, що ми розраховували, було не що інше, як відшукання координат окремих точок, на які відображав $\vec{a}$ інші точки...

— Йому легше відображати, ніж нам віднаходити координати,— буркнув Верхоглядько.

— Зрозуміло. Адже $\vec{a}$ відобразив всю Координатію на себе ж. Кожній її точці, наприклад A, поставив у відповідність одну і лише одну точку $B=\vec{a}(A)$, — продовжував Ікс-нульовий.

— Ото сила! Вони всі такі?

— Ні. Серед них є один, який нічого не робить. Це — нульовий вектор — $\vec{0}$. Він кожну точку Координатії залишає на місці.

— Ви, Ікс і Ігрек, теж нульові, а такі діяльні! — вихопилося у Верхоглядька.

— Власне, $\vec{0}$ теж не можна назвати неробою. В нього такий обов'язок, і він його виконує, як, наприклад, Нуль або порожня множина. Вони близькі родичі.

Захоплений Олег взявся повторити розрахунки координат опор лінії електропередачі (ЛЕП) між музеєм і поштою.

— Електрики тоді визначили, що між цими установами M (—5; —4) і P (1; 9) на рівних віддалях треба звести три опори O_1, O_2, O_3...— розмірковував він.

Ігор одразу ж накреслив відрізок MP і, розділивши його приблизно на чотири рівні частини, наніс точки O_1, O_2, O_3.

— Тут знову вектор, тільки невідомий нам,— затнувся Незнайко.

— Нічого, доберемо ключик і до нього,— підбадьорив усіх Олег.— Він у попередній задачі. Ось дивіться: щоб потрапити з M у O_1, треба пройти якусь відстань S. А з M у P чотири відстані S. Отже, $P=M+4S$. Звідки $S=\frac{1}{4}P-$

$-\frac{1}{4}M=\frac{1}{4}P(1;\ 9)-\frac{1}{4}M(-5;\ -4)$.

— А це вже можна обчислити,— докинув хтось.

— Дуже просто: $\left(\frac{1}{4};\ \frac{9}{4}\right)-\left(-\frac{5}{4};\ -1\right)=\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)$.

— І що ж ми одержали?

— Ми одержали координати точки, на яку потрібний вектор, назвемо його $\vec{в}$, відображує початок координат.

— Ура!— радісно вигукнув Верхоглядько.— Цього досить, щоб обчислити координати опор O_1, O_2, O_3.

— Безперечно. Адже $O_1=\vec{в}\ (M)$, тобто $O_1=(-5;-4)+\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)=\left(-3\frac{1}{3};\ -\frac{3}{4}\right)$; $O_2=\vec{в}(O_1)=\left(-3\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}\right)+\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)=\left(-2;\ 2\frac{1}{2}\right)$; $O_3=\vec{в}(O_2)=\left(-2;\ 2\frac{1}{2}\right)+\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2};\ 5\frac{3}{4}\right)$.

Ікс-нульовий захотів перевірити, чи не сталася помилка. Дехто вважав, що для цього треба ще раз пробробити всі обчислення.

— А нащо? Можна ж простіше,— запропонував Олег.— Адже $P=\vec{в}(O_3)$. А тепер перевіримо, чи дадуть наші розрахунки результат діяльності $\vec{в}$ на координати P:

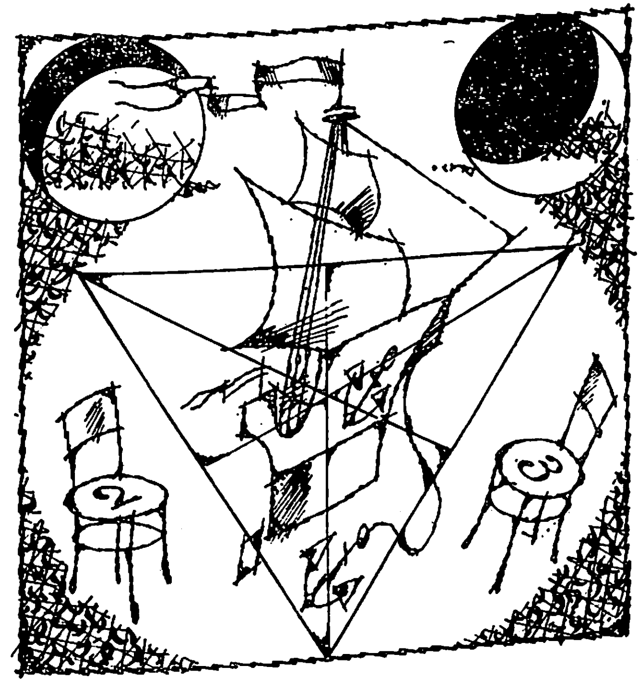
$$P=\vec{в}(O_3)=\left(-\frac{1}{2};\ 5\frac{3}{4}\right)+\left(1\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{4}\right)=(1;\ 9).$$

— Все правильно. Крім того ж, у цій задачі ключ до нових задач, наприклад, поділу будь-якого відрізка на довільне число рівних частин...

У цей час по радіо оголосили, що прибув літак, який летить рейсом Цифроград — Координатія — Іксовія. Усі дружно рушили на посадку.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Яка з двох точок правіша: $(x; 0)$ чи $(2x; 0)$?
2. Скільки коштує в Координатії книжка «Магістр Неважних Наук»?
3. Скільки коштують перша і друга книжки «Метод координат»? На скільки процентів друга книжка дешевша за першу?
4. Як розлили молоко туристи за першим столом?
5. Як розлили за другим?
6. Як розв'язали задачу іксовці?
7. Як розв'язати задачу Пуассона методом графів?
8. Які будуть правильні відповіді на запитання, що їх поставили Незнайкові?
9. Як розв'язуються шість задач на папері в клітинку лише за допомогою лінійки без поділок?
10. Довжина цілочисельних кварталів у Координатії 100 м. Наші знайомі, прогулюючись її вулицями, обирали найкоротші шляхи. Обчисліть довжину їхнього маршруту по Координатії і накресліть його схему.



ІКСОВЦІ НА КАНІКУЛАХ

Після такої довгої подорожі іксовці нарешті повернулися додому. За сумлінне виконання доручень їм було запропоновано відпочинок. Власне, наставав час канікул в Іксовії. Час усяких екскурсій і туристських походів. Іксовий запросив у похід і трьох друзів — нульовий Віктора, Олега й Ігоря.

Перед походом черговий по Іксовії попередив іксовців:

— З вами відпочиватимуть наші гості. Не забувайте, що вони новачки у нас.

— Не забудемо...

— Ну, тоді рушайте!

Першу зупинку зробили в чагарнику, ділянка якого мала трикутну форму. Палатку вирішили поставити на однаковій відстані від границь чагарника. Тут і виникли суперечки, як визначити для неї місце. Одні пропонували трьом учасникам походу стати на середині кожної сторони ділянки, а троє щоб ішли на них з кутів. Тоді точка зустрічі і буде шуканим місцем для ночівлі. Інші ж казали, що досить трьом туристам, які стоятимуть на серединах сторін ділянки, вийти по перпендикуляру до цих сторін у глиб чагарника,— то вони також зустрінуться у шуканій точці. Були й інші пропозиції. Зрештою іксовці побачили, що справа затягується, і запропонували найкращий спосіб визначення потрібної точки.

Доки напинали палатку, сонце сховалося за горизонтом — і туристи заходилися готувати вечерю.

І тільки-но в казанку забулькала юшка, як з чагарника, порипуючи протезом, вийшов кремезний чоловік. Друзі глянули й оторопіли.

— Я був переконаний, що цей добродій — плід письменникової фантазії...— прошепотів Віктор до Олега.

— Еге, негоже так: замість того щоб вітати гостя, ви про якісь фантазії... Добрий вечір!

— Вітаємо дорогого гостя...

Ні, Віктор не помилився. Це був він, капітан з міжзоряних мандрівок, найдотепніший співрозмовник, про якого тільки можна мріяти,— Небреха.

І то вже розповідям про зоряні мандри не було кінця-краю...

Здавалося, в Небрехи вони не могли вичерпатися — майже фантастичні, але безумовно достовірні історії з його космічної одіссеї.

— Одного разу мій корабель занесло в галактику, простір якої тамтешні гравітаційні сили скрутили в велетенський «листок Мебіуса». Ну й покрутився я в тій космічній вісімці. Ледве сів на одній планеті. Щоб не завузлити язика, не називатиму її. Я був першим позагалактичним гостем на тому космічному хуторі і скоро для всієї галактики став сенсацією № 1.

Від гостей не було відбою. Всі хотіли мене побачити, послухати, чимось пригостити. Щоб дати собі хоч годину перепочинку, за один раз я не приймав відвідувачів менше, ніж по нескінченній множині. Спочатку моє рішення викликало протести, але зрештою стало зрозуміло — за інших умов усім бажаючим до мене не пробитись. Що й казати, якби не моя винахідливість, ніхто не навів би там порядку. Особливо стало складно, коли пройшла чутка, що я маю відлітати. Що там робилося! Якось прийшла до мене чергова нескінченність відвідувачів. Розсілися, і жодного вільного місця. Аж тут ще один забігає. Незручно: всі сидять, а він стоїть. Тут мене й осінило. Сказав тому, хто сидів на стільці № 1, пересісти на стілець № 2, з стільця № 2 на № 3... з n-го на № $n+1$... І все обійшлося... Так ото, не встигли перекинутися й словом, як мені кажуть: на планету прибуло 1 000 000 якихось транзитних пасажирів, і всі хочуть побувати в мене.

— Як же ви їх розсадили стільки?— запитав Олег.

— О, це були лише квіточки. Тут і дитина здогадається, що я гостя з першого стільця пересадив на стілець № 1 000 001, а з другого — на № 1 000 002... з n-го на № $n+$ $+1 000 000$, та порядок. А от коли через якийсь час для ущільнення прийому мене попросили приєднати до моїх гостей ще одну нескінченність відвідувачів, я мало не розгубився. Та й цього разу обійшлося...

— Ми ніколи не сумнівалися у вашій правдивості, капітане,— звернувся до Небрехи Віктор,— але... Та коли все це відбувалося! Може й пам'ять зрадити?..

— Шановні, менше, ніж нескінченність, гостей я не приймав. А до неї, бачу, ви ще не звикли.

— Та не перебиваймо,— попросив Ігор товариство, хоча й сам не зовсім уявляв, що там робилося у вітальні Небрехи.

Правда, із законом великих проміжків для простих чисел і теоремою Евкліда про їх нескінченність було не легше. Видно, така вже вона, ота нескінченність, що до неї треба звикнути.

Ніби вгадуючи думки Ігоря, Небреха говорив майже про те саме:

— Сподіваюся, ви розумієте причину моїх клопотів: у мене не було кому вносити чи виносити стільці. Їх як поставили нескінченну кількість, так на них я й розсаджував гостей. І от, щоб розсадити позачергову нескінченність, я гостя з стільця № 1 пересадив на стілець № 2, з № 2 на № 4, з № 3 на № 6, з № 4 на № 8 ... з № n на № $2n$.

— Зрозуміло... Який же ви молодець, капітане!— похвалив старого Олег.— Ви розсадили всю нескінченність гостей на стільцях з парними номерами і звільнили для позачергової нескінченності нескінченну кількість стільців з непарними номерами.

— Так точно, юний друже. А тут хтось натякав на мою пам'ять.

Від задоволення Небреха так смалив свою люльку, що жоден комар не наважувався наблизитись не тільки до нього, а й до слухачів.

— Бережіть здоров'я, капітане, менше куріть,— порадив Ікс-нульовий.— Краще розкажіть, як закінчилися ваші прийоми на тій планеті.

— Позачергові порушили ритм моєї роботи. Бо ті, що прийшли раніше, перемовившись, почали прощатися. Після того як вони пішли, половина стільців залишилася вільними. Мене це не влаштовувало. Загляне хтось — і стануть подейкувати, що Небреха вже не популярний. Щоб такого не трапилося, я пересадив гостей ще раз. Гостя з стільця № 1 залишив на місці, а з стільця № 3 пересадив на № 2, з № 5 на № 3, з № 7 на № 4 і т. д. І тепер гості, що лишилися, зайняли усі стільці. Тільки коли подали каву, всім довелося випити не по одній, а по дві чашки.

— Але тут негаразд з логікою! — знов обізвався Віктор.

— Тобто?

— Кави наготували стільки чашок, скільки було стільців у вашій вітальні?

— Так.

— То як же могло дістатися гостям по дві чашки, коли на кожному стільці сидів гість?

— Ви забули, що було до цього...

— А що?

— Всі стільці спочатку зайняла чергова нескінченна група гостей. Потім на ту саму кількість стільців я розсадив ще й позачергову нескінченність відвідувачів. Вірите?

— Так, віримо.

— От і добре. У цей час на кухні почали готувати каву. А доки її варили та розливали, половина гостей пішла. Ось чому тим, хто залишився, дісталося по дві чашки.

— Але ж ті, що залишилися, теж займали всі стільці?

— Я можу переказати все спочатку, тільки тоді ми ніколи не закінчимо... Ще раз застерігаю: будьте обережні, коли маєте справу з нескінченністю.

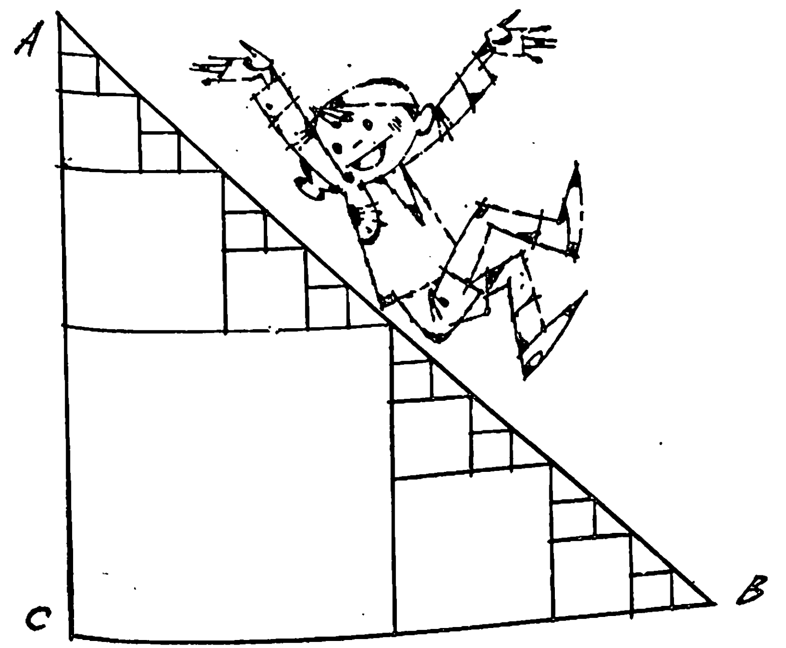
— Прийом супроводжувався лише розмовами і кавою?— поцікавився Віктор.

— Ну що ви! Хіба я міг пропустити таку нагоду — нескінченність гостей? Я організував для них ігри...

— А як би і нам їх перейняти?

— Навряд чи зможете ті ігри реалізувати. Хоча міркувати над ними корисно. Аборигенам, пригадую, дуже сподобалася така. Я взяв чималеньку вазу, і мені заготували необмежену кількість клаптиків паперу, на яких були записані числа 1, 2, 3,..., n, $n+1$,... За хвилину до полудня я поклав у вазу клаптики з числами 1, 2, 3,..., 9, 10 і вийняв назад клаптик з числом 1; за $\frac{1}{2}$ хвилини поклав 11, 12, ..., 19, 20 і вийняв — 2, за $\frac{1}{3}$ хвилини — 21, 22, ..., 29, 30 і вийняв — 3, і так — до самого полудня. Як ви думаєте, скільки чисел залишилося у вазі опівдні?

— Ого! — пожвавішав Віктор.— Їх там було б стільки, що ніяка б ваза не вмістила!



— Думай, думай, юначе.

— А що думати? — не здавався Віктор.— Це очевидно, як Бхаскарове доведення теореми Піфагора!

— А я вам покажу, що й теорема Піфагора недосконала і оті бики постраждали ні за що. Бо сума довжин катетів дорівнює довжині гіпотенузи.

Всі мовчки перезирнулися. Але Небреха зробив вигляд, що того не помітив. Він узяв аркуш паперу, накреслив рівнобедрений прямокутний трикутник і звернувся до принишклої аудиторії:

— Сполучимо середини катетів рівнобедреного прямокутного трикутника з серединою гіпотенузи. В одержаних у такий спосіб двох рівнобедрених прямокутних трикутниках проведемо таку ж операцію, потім здійснимо її в 4, 8, 16,... і т. д. трикутниках. Бачите, при всіх операціях довжина нашої ламаної лінії дорівнює сумі довжин катетів...

— Звідки це видно?— не погодився Віктор.

— Це очевидно, як і Бхаскарове доведення... Адже сума довжин усіх горизонтальних ланок дорівнює $[BC]$, а сума довжин усіх вертикальних ланок відповідно — $[AC]$. Тепер зрозуміло...

— Сподіваюсь, так само зрозуміло, що сума довжин усіх ланок ламаної чи довжина ламаної дорівнює сумі довжин катетів...

Присутні на знак згоди закивали головами, і це заспокоїло Небреху.

Він продовжував:

— Якщо ж кількість операцій по подвоєнню ланок ламаної продовжити до нескінченності, то довжина її необмежено наблизиться до гіпотенузи. Але ж сума довжин її ланок дорівнюватиме все одно сумі довжин катетів. Звідки й випливає моя теорема: сума довжин катетів прямокутного трикутника дорівнює довжині гіпотенузи.

— Ніколи! — гаряче заперечив Ігор.

— Не так голосно, юначе,— спокійно мовив Небреха.— Я вам повірю лише тоді, коли ви спростуєте моє доведення логічними міркуваннями.

— А що, його так ніхто й не спростував? — запитав Віктор.

— Серед тієї кількості гостей, що навідували мене,

завжди знаходилися любителі точної думки. Правда, були й такі, що плуталися в скінченних.

— Розкажіть про них.

— Дуже наморочив мені голову один правитель — Менімало n-й. Йому все було мало землі. А тому тільки те й робив, що наказував своїм генералам розширювати володіння. Тільки так було до пори, до часу. А сталося ось що.

Одного разу до Менімало прийшов старий радник з черговим донесенням.

«Ваша світлість,— почав він.— Ви ощасливили нас указом, щоб уздовж кордону стояли солдати на відстані півкварти один від одного і не рідше...» Так-так, саме — півкварти! Щоразу після загарбання чужих земель Менімало влаштовував банкети і в залежності від величини приєднаної території частував своїх вояків відповідною кількістю кварт вина! До цього так звикли, що зрештою у всьому королівстві відстані і площі стали вимірювати квартами, а об'єми метрами і кілометрами...

«Ну й що з того?» — обірвав Менімало старшого радника.

«А те, ваша світлість, що королівство дуже розрослося, нікому охороняти його. Тепер уся армія, усі п'ять тисяч воїнів мусять стояти лише на кордоні...»

«Це мене не обходить,— грізно сказав Менімало.— Мені потрібні нові землі. Для охорони ж кордонів можна залучити цивільних».

Довелося виконувати наказ.

Та вже по кількох днях Менімало, викликавши старшого радника, доскіпувався:

«Ти чому не провів мобілізації?»

«О мій повелителю,— виправдовувався той,— виконуючи ваш мудрий наказ, ми розширили володіння, зайняли величезні простори, що раніше належали нашим сусідам. Одначе нові кордони, як не дивно, виявилися коротшими за попередні. І не було потреби проводити мобілізацію. Проте ніхто не може пояснити, чому так сталося».

«А навіщо пояснення!— зрадів Менімало.— Якщо розширення моїх володінь веде до скорочення довжини їх кордонів, тим краще. Женіть сусідів далі!»

І цей наказ правителя було виконано. Але чим більше земель захоплювали його війська, тим коротшими ставали кордони королівства.

Зрештою Менімало задумався: що ж робитиме його армія, коли кордони зменшуватимуться й далі?! Кого ж тоді завойовувати?

— І радники Менімало,— покрутив вуса Небреха,— звернулися до мене за порадою: що ж то робиться з кордонами їхнього королівства. Від них я й довідався про чорні справи зажерливого правителя...

— Капітане! Ви консультували завойовника?— запитав Олег.

— Таке подумали... Навпаки. Спершу я розібрався, в чому сила завойовника. А потім допоміг сусідам Менімало повернути свої землі. Радникам пояснив лише геометричну суть загадки...

— Як же воно виходило,— розмірковував уголос Олег.— Територія країни, або простіше площа фігури, збільшується, а довжина лінії, яка її обмежує, зменшується. Хіба таке може бути?

— Тут є над чим думати,— сказав Небреха.— Адже я вас попереджав, що скінченне так само може ставити загадки. Проте, задача про кордони не така вже й складна. До речі, щоб ви знали, одна кварта в тому королівстві відповідала 4 кілометрам. Це вам допоможе обчислити розміри планети, де завдяки моїй рішучості нарешті запанував мир.

Дивлячись на срібні горна зірок, капітан замріявся. Може, він бачив нікому не видимі світлі цятки вісників далеких галактик, які розкручували свої велетенські спіралі десь у безодні космосу. Було боязко порушити урочистість тиші. Але Олег порушив її.

— Ви й по Землі ходили немало?

— Я не міряю своїх земних трас,— скромно зізнався Небреха.— Але можу сказати, що за свої відпустки накрокував стільки кілометрів, що якраз вистачить обігнути нашу планету по екватору. Та це ж тільки ноги. А голова ще більше. Адже мій зріст — 1,89 м набагато збільшує траєкторію голови над поверхнею Землі, у порівнянні з тією, яку відміряли ноги.

— Це теж із галузі скінченного,— здогадався Олег.

— Так,— підтвердив Небреха.

Уже за північ, коли лаштувалися спати, всі почули неподалік чиюсь суперечку. Спочатку не звертали уваги на неї, але суперечка дедалі дужче розпалювалась. Ікс-нульовий і Олег, не витримавши, вирішили вгамувати галасливих сусідів.

Біля вогнища, яке майже згасло, сиділи Верхоглядько, Незнайко і незнайомець, що назвався колекціонером туристських казанків.

Перебиваючи один одного, кожен з них доводив правильність своїх розрахунків, з якими не погоджувалися двоє інших. Олег зрозумів, що суперечку викликала не ціна закіптюженого казанка, а якийсь там компот і яблука.

Зрештою, Олег попросив, щоб хтось один пояснив причину нічної суперечки.

Розповідав Верхоглядько. Незнайко та колекціонер весь час доповнювали і поправляли його. Нарешті картина прояснилася.

Верхоглядько і Незнайко варили компот із яблук. Верхоглядько поклав у казанок п'ятеро яблук, Незнайко — четверо. Коли на вогник завітав колекціонер і теж захотів поласувати компотом, йому запропонували сплатити вартість яблук, а компот розділити порівну. Колекціонер виклав 90 копійок, і всі випили однакову кількість духмяного напою.

Суперечка ж виникла, коли почали ділити гроші. Незнайко вважав, що йому належить половина суми. Верхоглядько ж наполягав, що, оскільки в компоті п'ятеро яблук його, він має взяти собі п'ятдесят копійок. Колекціонер доводив, що буде справедливо, коли Незнайко одержить 30 копійок, а Верхоглядько — 60.

Тут Ікс-нульовий дорікнув Незнайкові й Верхоглядьку, що їм годилося б гостиннішими бути. Якщо вже вирішили подарувати колекціонерові свій казанок, то копійчані чвари зовсім недоречні.

Але оскільки ті наполягали на точних сумах, Ікс-нульовий сказав, хто з них зробив правильний розрахунок. Гроші поділили. Колекціонер запхнув у рюкзак новий експонат своєї дивної колекції, і всі розійшлися на відпочинок.

Сонце вже стояло над чагарями, а туристи все ще спали, заколисані пташиним співом, тихим шепотом листя. Першим прокинувся Небреха.

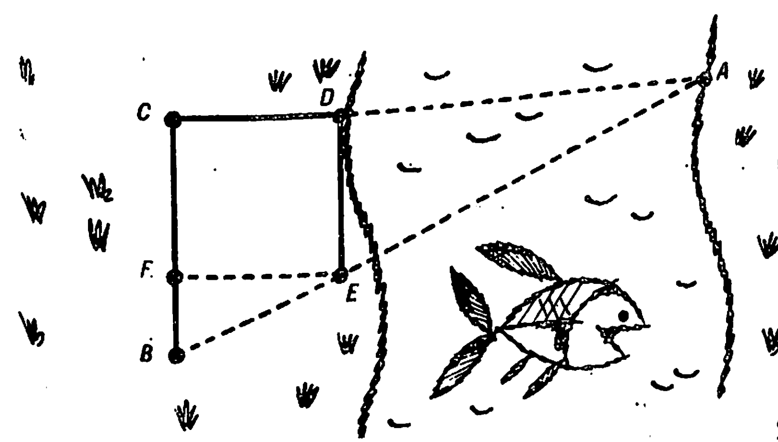
— Режим!— загримав він.— Чуєте, режим! Ану, швидше до річки...

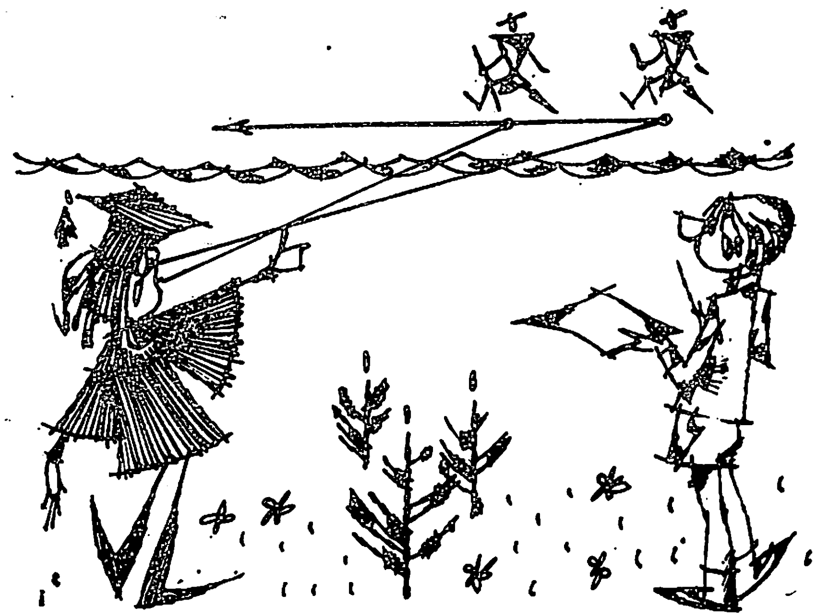
Бадьорі й веселі, хлопці посхоплювалися зі своїх імпровізованих ліжок і подалися за капітаном.

— Широка, а нам же доведеться її форсувати,— сказав Ігор, поглядаючи на протилежний берег річки.

— Тож треба знати ширину її,— мовив Небреха.— Бо лізти у воду, не спитавши броду...

Він ступив кілька кроків від берега і встромив у землю палицю. Потім порахував кроки до річки і вже біля самої води поставив другу палицю. Пройшовши таку ж відстань уздовж берега, він поставив і третю. Очевидно,





вибравши на тому березі якийсь орієнтир, капітан будував прямокутний трикутник із вписаним у нього квадратом.

— Ну, а хто мені скаже, чому наближено дорівнює довжина мого кроку?— запитав Небреха.

— Половині зросту,— відповів Віктор.

— Майже правильно, бо треба рахувати від рівня очей... Вам мій зріст відомий. Віднімайте 15 сантиметрів, різницю діліть на два, ну й скиньте ще 7 сантиметрів на збурюючі сили протеза. Ось вам і довжина мого кроку. А щоб не стомлювати ваші ноги перед походом, знайте: $(FB) = 32{,}5$ крока, а $(CF) = 65$ кроків. То ж для вас ця річка й справді заширока. Доведеться шукати засоби переправи.

Разом поснідавши і сто разів пообіцявши зустрітися наступного року, Небреха розпрощався із своїми новими знайомими. Так несподівано, як і прийшов.

— На протезі, а он як почимчикував,— зауважив Олег, дивлячись услід капітанові. Ікс-нульовий простягнув у напрямку капітана руку з піднятим великим пальцем, заплющив спочатку праве око, потім ліве. Щось порахував і сказав:

— Тільки попрощались, а він уже кілометр відміряв.

Провівши поглядом невгамовного капітана, рушили в дорогу й туристи. Тепер буде що згадати. Не кожному поталанить на таку зустріч.

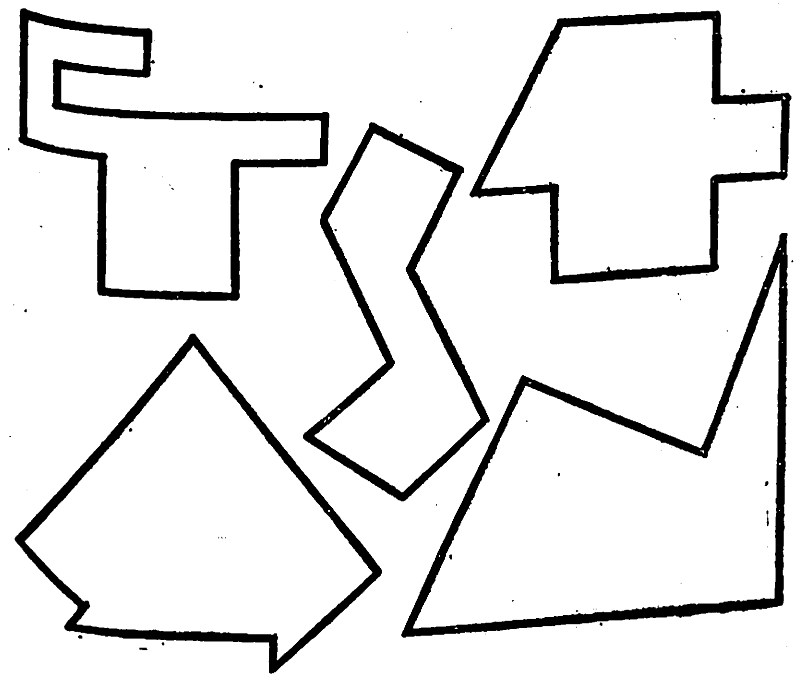
ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

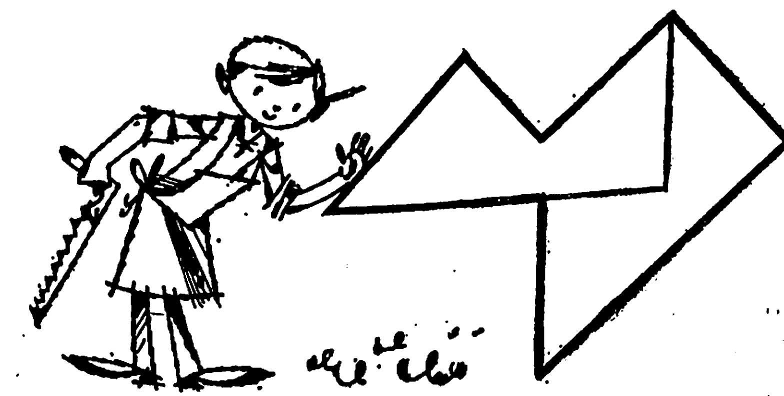
1. Скільки чисел залишилося у вазі опівдні?
2. Чому неправильна теорема Небрехи?
3. Чому при збільшенні території країни Менімало n-го кордони її зменшувалися? Які розміри планети, на якій відбувалися ці події?
4. На скільки довший шлях за час відпусток «пройшла» голова Небрехи, ніж ноги, в його земних мандрівках?
5. Хто правильно поділив гроші за компот?
6. Як Небреха виміряв ширину річки і яка її ширина?
7. Як Ікс-нульовий виміряв відстань до Небрехи?

В УЧНЯ ГЕО МЕТРА

Канікули наближалися до кінця. І все ж, завершуючи похід, туристи вирішили завітати до одного з учнів Гео Метра — Інверсного. Переказували, що він відпочивав десь у цих краях. Зустріч обіцяла бути цікавою і корисною.

Дорога виявилася складною. До всього на її шляху лежала пустеля шириною в 400 км.





Подорожнім запропонували автомашину, але місткість бака для пального давала змогу проїхати лише 180 км, за умови, що на 1 км дороги витрачається 1 л пального. З собою ж дозволяється брати лише порожні каністри. Отже, пустелю можна було перетнути, влаштувавши на шляху проміжні склади пального.

— А без ускладнень не можна?— запротестував Віктор.

Працівники автостанції були ввічливі. Один з них запитав:

— Ви, мабуть, до Інверсного путь тримаєте?

— Еге... Куди ж більше!— буркнув Віктор.

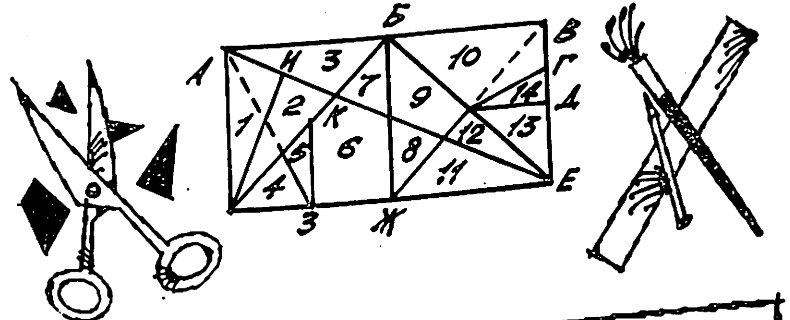
— Отож-бо й воно... А коли хочете побувати в Інверсного, то хоч трохи розберіться в математиці. Без цього вам не уникнути неприємностей.

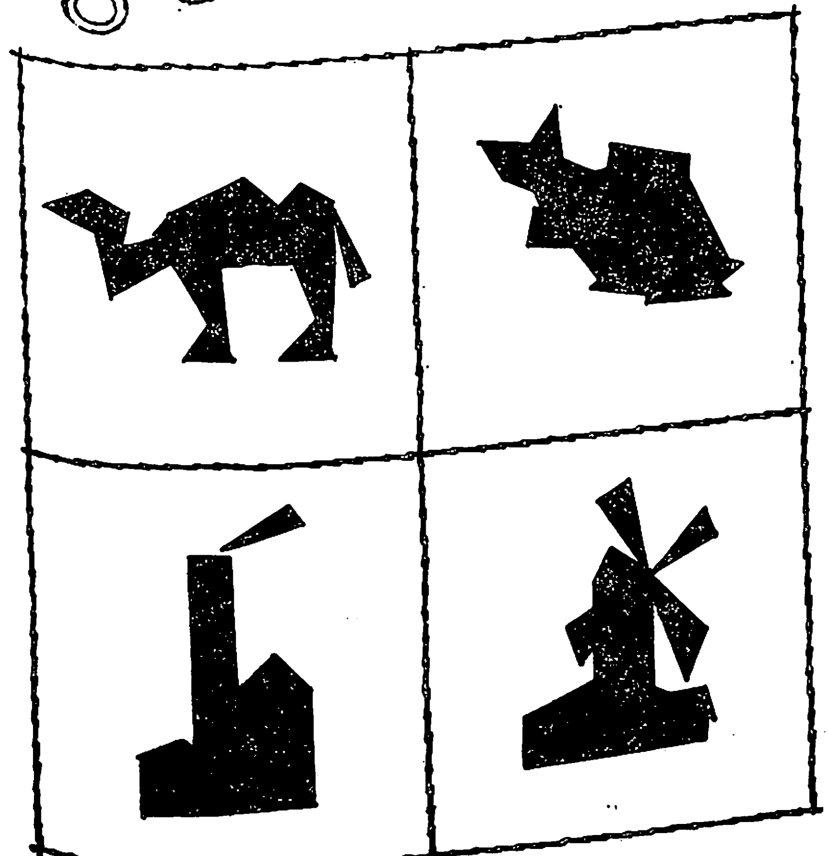
— Молодчина Інверсний! Не знаєш математики — шукай інший маршрут,— сказав Ігрек-нульовий.

Іксовці запропонували друзям відпочити на автостанції, доки вони створюватимуть проміжні склади пального. На це пішло немало часу. Нарешті, потрібну кількість пального завезли, і туристи рушили в дорогу.

Інверсний прийняв туристів гостинно. Якщо вже вони зуміли подолати такий шлях, то це не якісь там любителі екзотики. Особливо він був радий іксовцям, які високо цінували його вчителя — славетного Гео Метра.

Гості застали математика за робочим столом. Він креслив якісь фігури. Як з'ясувалося, завод надіслав на будівельний майданчик плити для опорядження інтер'єрів квартир. Та коли ті плити почали монтувати, виявилося, що за розмірами і формою вони не підходять. Певне, на заводі





просто забули розрізати кожну плиту на дві рівні частини.

— От будівельники й попросили мене знайти лінії, по яких кожну фігуру можна розрізати на два однакові елементи.

— І ви виручили будівельників?— запитав Віктор.

— Так. Це дуже просто. На нижній фігурі, як бачите, я цю лінію вже наніс, а поки ви спочиватимете з дороги, закінчу й решту.

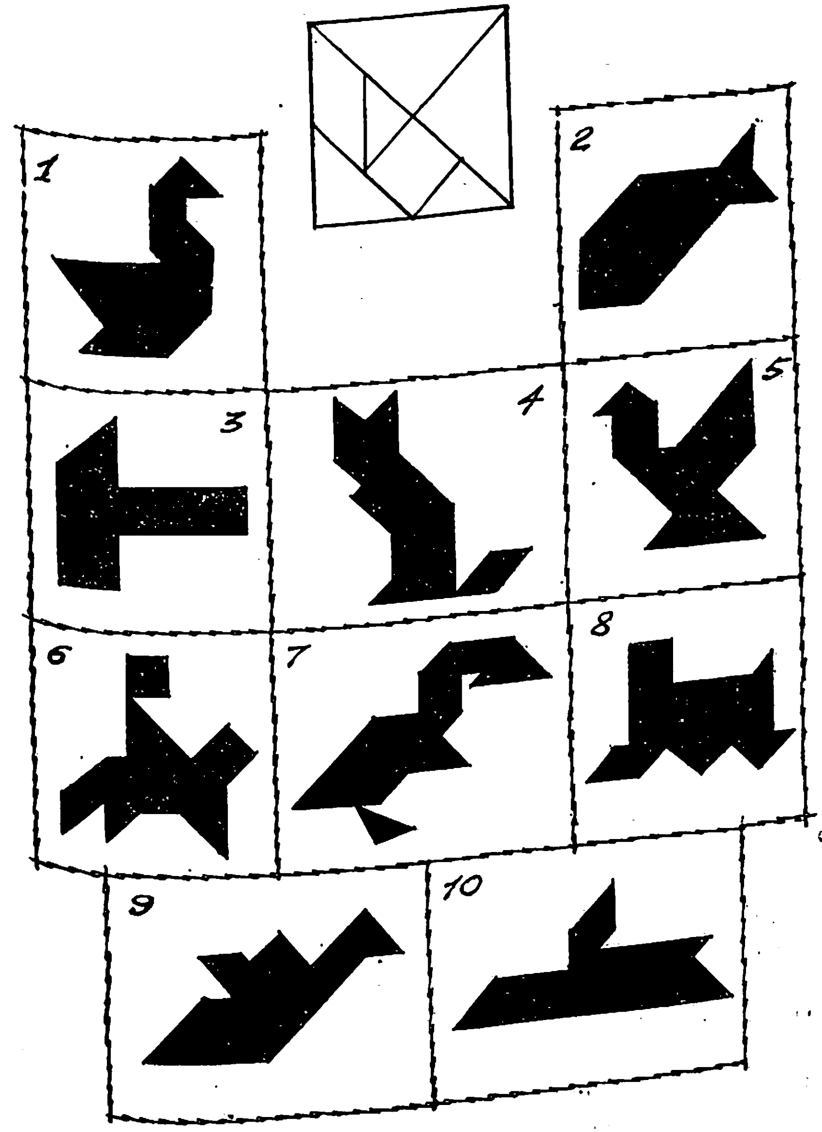
Прогулюючись по саду, друзі звернули увагу на силуети людей, тварин, цілі сцени, вирізані з кольорового паперу.

— Мабуть, Інверсному довелося мати справу з дитячим садком,— пожартував Ігор.

— То теж корисна робота,— сказав Ікс-нульовий.— Придумати дітям цікаву гру — завдання не з легких, але вдячне. Це фігурки для гри, що вже понад два тисячоліття приносить радість і дітям, і дорослим. Називається вона стомахій. А винайшов її, кажуть, сам Архімед!

— Якщо цим займався Архімед, то стомахій справді річ серйозна,— погодився Ігор.

— Саме так. Упродовж кількох століть ця гра захоплювала греків і римлян. Слово «стомахій» у перекладі з старогрецької означає «те, що викликає злість». Гра й справді повна несподіванок, розвиває кмітливість і є прекрасним знаряддям тренування геометричної уяви, правильного сприймання ліній та форм. Ось дивіться...— продовжував Ікс-нульовий.— Прямокутник розрізано на 14 клаптиків, пунктиром позначено напрямки розрізів. Із цих кусочків можна викласти фігури людей, звірів, різних предметів. Зображення має правильно передавати пропорції і бути виразним. Кішка, наприклад, якщо ви хоч трохи подовжите



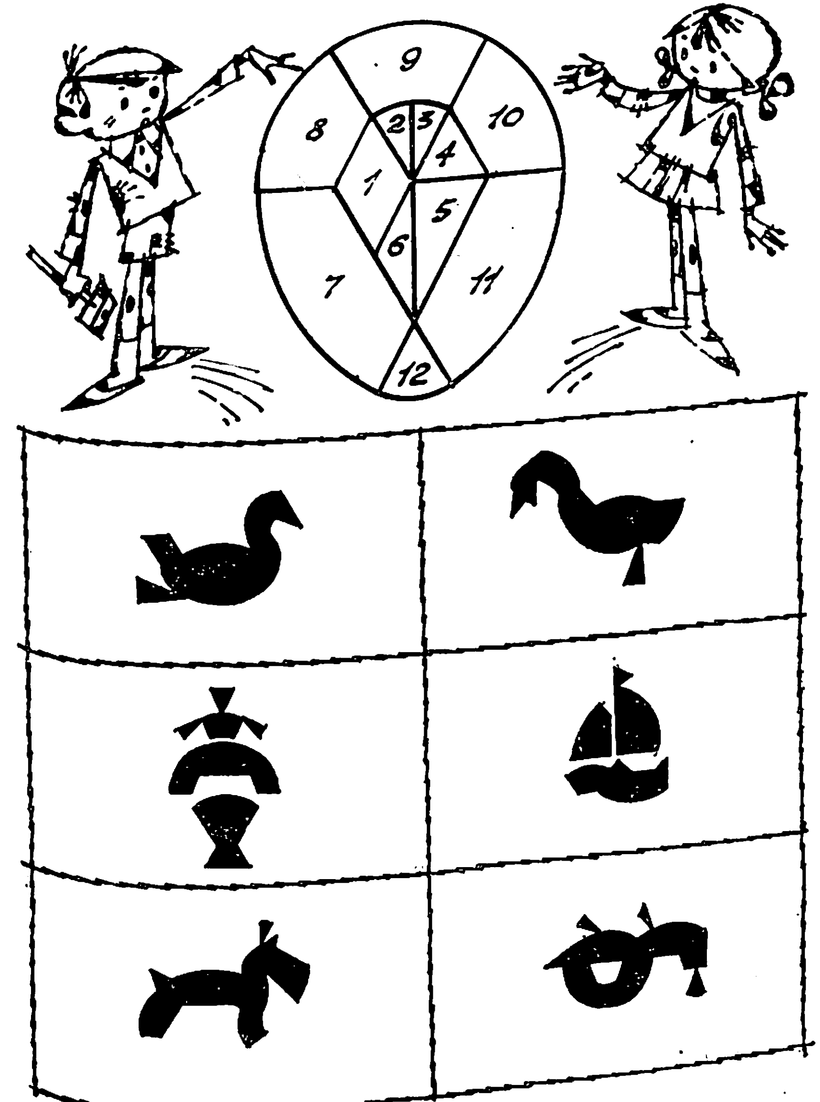
її вуха, буде схожа швидше на віслюка, ніж на кішку, а кінь при надто вигнутій спині скидатиметься на бегемота. Спочатку у вас не все виходитиме, але наполегливі пошуки приведуть, зрештою, до бажаних результатів.

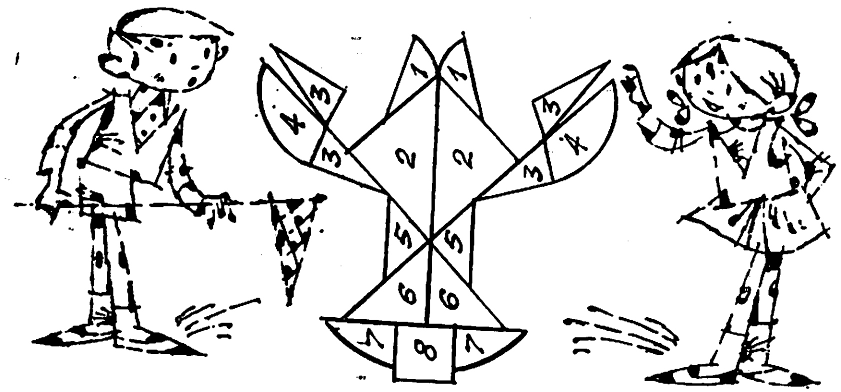
Ікс-нульовий порадив вирізати елементи гри з цупкого картону. Всі шматочки варто нумерувати. З одного боку арабськими, а з другого, відповідно, римськими цифрами. Це дасть змогу простіше фіксувати спосіб складання окремих фігур. Шматочки можна розміщувати як завгодно і класти на стіл будь-яким боком. Щільне прилягання окремих елементів гри, згідно з порадою Архімеда, не обов'язкове, але при конструюванні фігур усі 14 елементів мають бути обов'язково використані. При цьому не дозволяється анітрохи накладати одну фігуру на іншу.

Для початку Ікс-нульовий запропонував використати стомахій, що був у Інверсного, і сконструювати силуети верблюда, риби, заводу і вітряка.

У стомахія знайшлися гідні нащадки. Про них згадав Ігрек, коли побачив, що однієї гри не досить, щоб дати змогу усім бажаючим перевірити свою геометричну кмітливість. І тут згодилися інші ігри, що були в Інверсного. Це — танграм і яйце Колумба. Танграм так само старовинна гра. При цьому квадрат розрізають лише на сім частинок, але й з них, виявляється, можна побудувати безліч фігурок. Обидві гри невичерпні за своїми можливостями. З елементів танграма і яйця Колумба бажаючим було запропоновано викласти різні фігури.

Тепер усі, крім Олега, мали що робити. Але й для нього знайшлася розвага — геометричний рак. Із кусочків





силуету цієї тварини треба було викласти дві геометричні фігури — квадрат і круг.

За іграми гості й не помітили, як до них підійшов Інверсний.

— Що, не виходить? — лагідно запитав господар.— Нічого, погостюєте — навчитесь.

— А як з будівельниками, виручили? — поцікавився Віктор.

— Звичайно. Бачте, їм постачили ще одну партію плит, проте забули намітити лінію одного розрізу, виконавши який, кожну плиту можна перетворити на квадрат. З однією партією плит, простіших за формою, вони впоралися самі. А над сімома складнішими довелося попрацювати мені. Та облишмо стомахій. Ви з дороги, та й час обідати.

Коли з'їли перше, Інверсний запитав, чи був хто в Координатії.

— От і добре,— сказав він.— А ви запам'ятали тамтешні їдальні?

Запитання Інверсного викликало пожвавлення.

— Готують там смачно і обслуговують добре...

— А ви не залишились боржниками?

— Ні. Розрахувалися повністю.

— І не будете заперечувати, коли я запропоную дещо до обіднього столу?

— Просимо!..

— Ось нам подають котлети. Їх підсмажували на сковорідці тільки по дві штуки. При цьому на смаження одного боку котлети потрібна точно одна хвилина. От нехай нам хтось і скаже: за який найкоротший час можна засмажити з обох боків три котлети?

Поки їли, Ікс-нульовий знайшов правильну відповідь.

До молока подали чотири торти. Господар уже збирався різати їх, як його зупинив кулінар.

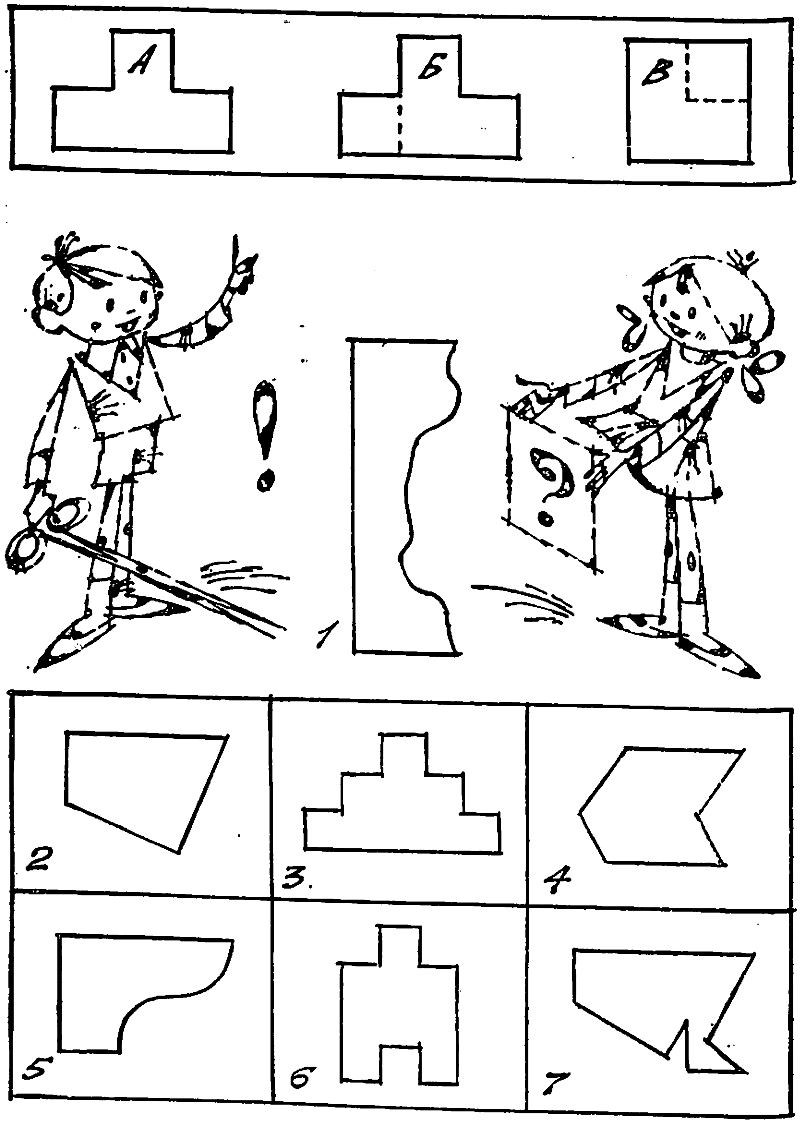
— Зачекайте! Не зруйнуйте ще однієї цікавої задачі. А взагалі їх тут аж чотири!

— Де ви їх бачите?— здивувався Олег.

— Це в мене, так би мовити, професійне. Кожен цей торт можна розрізати на чотири рівні частини так, що на кожній з них буде по однаковій «латочці» смачних прикрас. А на другому торті — по рівній кількості квіточок і зірочок.

Всі уважно подивилися на ласощі. Але кремові прикраси ніби навмисне були розміщені так, що чотири рівних частини, які б задовольняли поставлену умову, на жодному з тортів ніхто не бачив. За столом запала тиша.

Нарешті Ігрек-нульовий сказав, що він поділив торти. Правда, прикраси на окремих частинах розміщені в різних місцях, але іншого поділу він не бачить.



— Не біда,— заспокоїв його Інверсний.— Аби кожному дісталося порівну прикрас.

За кілька хвилин Олег розділив перший торт, а Ігор третій. Щоб не затягувати обіду, Ігрек-нульовий з дозволу господаря розділив другий і четвертий торти. Вони приховували в собі найскладніші задачі.

— Сподіваюся, всі знають, звідки береться молоко?— запитав тепер Інверсний.

— Аякже! В гастрономах...— кинув хтось із гурту. Відповідь викликала дружний сміх.

— Молоко — це корова плюс трава,—випалив Віктор.

— О, це вже ближче до істини,— пожартував господар. І, замислившись, додав: — А в твоїй, Вікторе, відповіді теж прихована задача.

— Не думав.

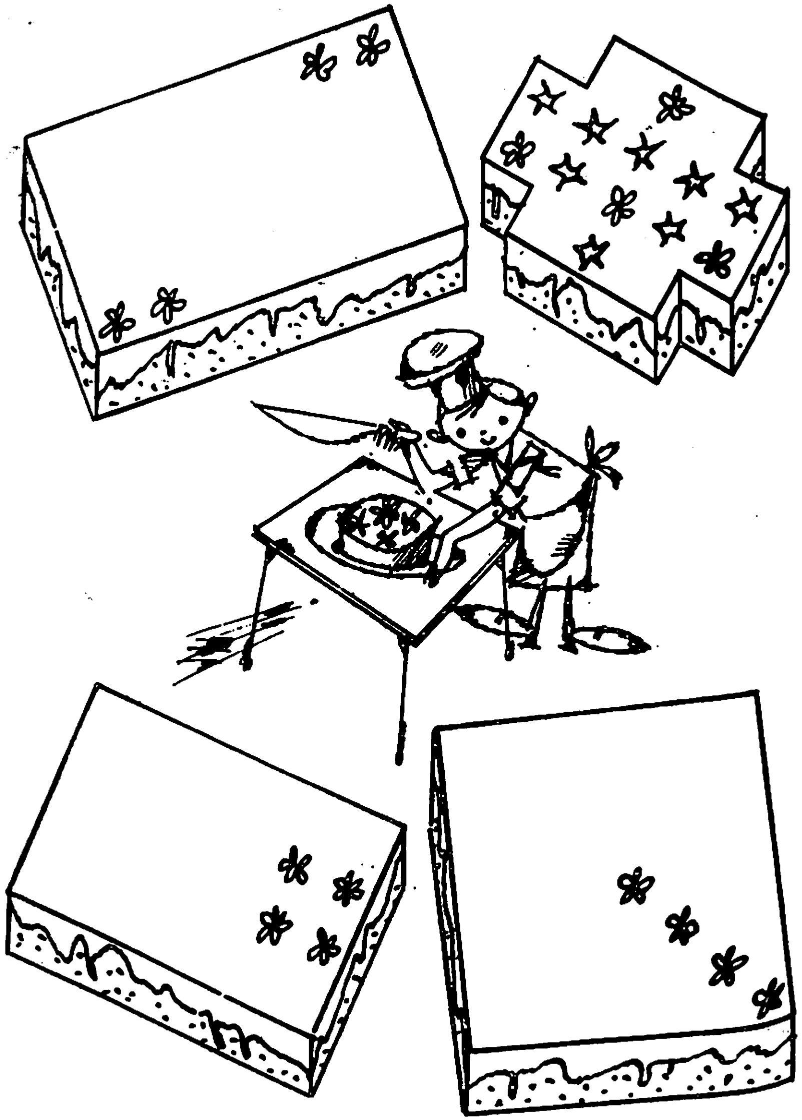
— Коли її записати в такій формі:

$$\begin{array}{r} \text{КОРОВА} \\ +\ \ \text{ТРАВА} \\ \hline \text{МОЛОКО,} \end{array}$$

теж є над чим подумати. Тут зашифрована дія додавання двох чисел, у яких різні цифри зашифровані різними буквами, за винятком *А* і *Т*. Та досить прийняти, що *А*=*Т*, і задача має розв'язання!

— Як це вам вдається, куди не глянете, скрізь бачите якусь задачу? — поцікавився Віктор.

— Задачі справді оточують нас на кожному кроці. Щоправда, слід навчитися їх бачити. А це все одно, що плавати. Скільки не вчи теорію (хоча й вона необхідна!), а поки не побабляєшся в воді, нічого не буде. Ось ви скіль-



ки вже мандруєте з вашими добрими провідниками Іксом, Ігреком і Зетом?

— Та немало.

— А не завважили, що своїми іменами ця іменита трійка теж утворює задачу... навіть дві.

Інверсний взяв аркуш паперу, зробив якісь записи і показав друзям.

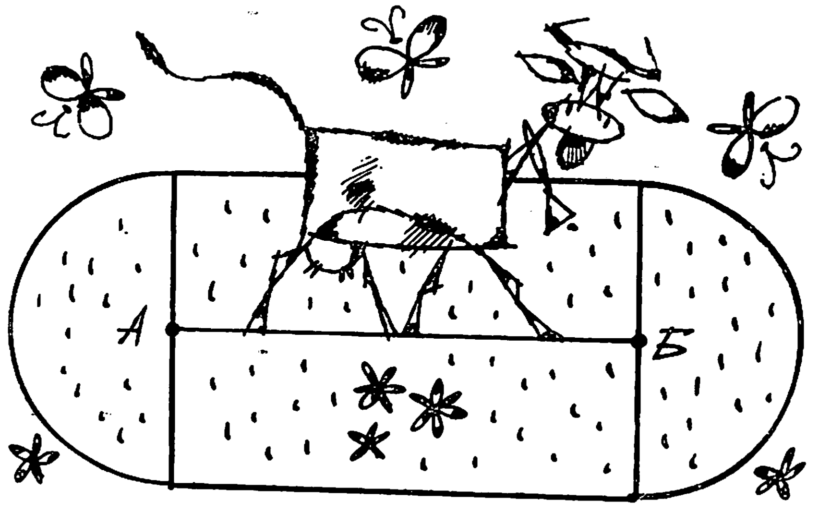
$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r}\text{Ікс}\\ \text{Зет}\end{array} \\ \hline + \begin{array}{r}\text{xxex}\\ \text{xxx}\\ \text{xxx}\end{array} \\ \hline \text{Ігрек}\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \begin{array}{r}\text{Зет}\\ \text{Ікс}\end{array} \\ \hline + \begin{array}{r}\text{xxx}\\ \text{xxx}\end{array} \\ \hline \text{Ігрек}\end{array}$$

— Тут теж зашифровані дії над числами? — запитав Ігор.

— Звичайно.

— Хто б міг подумати! — здивувався навіть Ікс-нульовий.— Отже, задачі не тільки навколо нас, а й у нас самих.

— Ваша правда. До речі, як поміркуєте над коровою і травою, розкриєте числа, які я закодував і вашими іменами. Але повернемось до попередньої теми, так би мовити, лише до корови. Ось вам задача: як краще припнути тварину. Так, так. Корова на припоні — це ціла геометрія. Дивно, що ви цього не знали. Точніше, пов'язували з цим, мабуть, лише одну фігуру — круг. А от як припнути корову так, щоб вона паслася на ділянці, яку становлять прямокутник і два півкруги? — Інверсний накреслив фігуру.



— Центри півкругів у точках A і $Б$? — запитав Ігор.

— Так.

— Можна припнути, якщо матимемо дві віръовки: одну трохи більшу, ніж $|AБ|$, другу — трохи меншу, ніж радіус півкруга. В точках A і $Б$ заб'ємо кілочки. Між ними туго натягнемо одну віръовку. На кінці іншої віръовки прив'яжемо кільце, просиливши перед цим у нього віръовку, натягнуту між кілочками. Ну й припнемо нею корову...

— А от щоб вона паслася на ділянці прямокутної форми? — запропонував Інверсний. — З прямокутниками найчастіше мали справу ще землеміри Стародавнього Єгипту. До речі, їх називали гарпедонавтами, тобто натягувачами віръовок. Щоправда, вони ними корів не прив'язували, а вимірювали площі земельних ділянок.

Ігор запропонував спершу припнути корову на папері, а потім, може, й у полі.

— Гайда зразу на пасовисько, — скомандував Олег. — Бабуся нам покаже, де тут випас. Правда ж? — звернувся він до літньої жінки, яка стояла трохи осторонь і слухала їхню розмову.

По дорозі бабуся розповіла, що ці задачі її онук теж придумує для піонерів. Деякі з них можна побачити.

Вона зупинилася біля ділянки, на якій, очевидно, тільки вчора корова випасла всю траву. Ділянка мала форму паралелограма. Далі побачили ділянки у формі стріли, півкруга і навіть сектора.

— Та тут же ціла геометрія!.. — дивувалися хлопці. — І все це розв'язували піонери самі?

— Не завжди, — трохи заспокоїла бабуся хлопців. Тільки після тривалого диспуту, спільними зусиллями на пасовиську було розв'язано задачу, що стосувалася прямокутника.

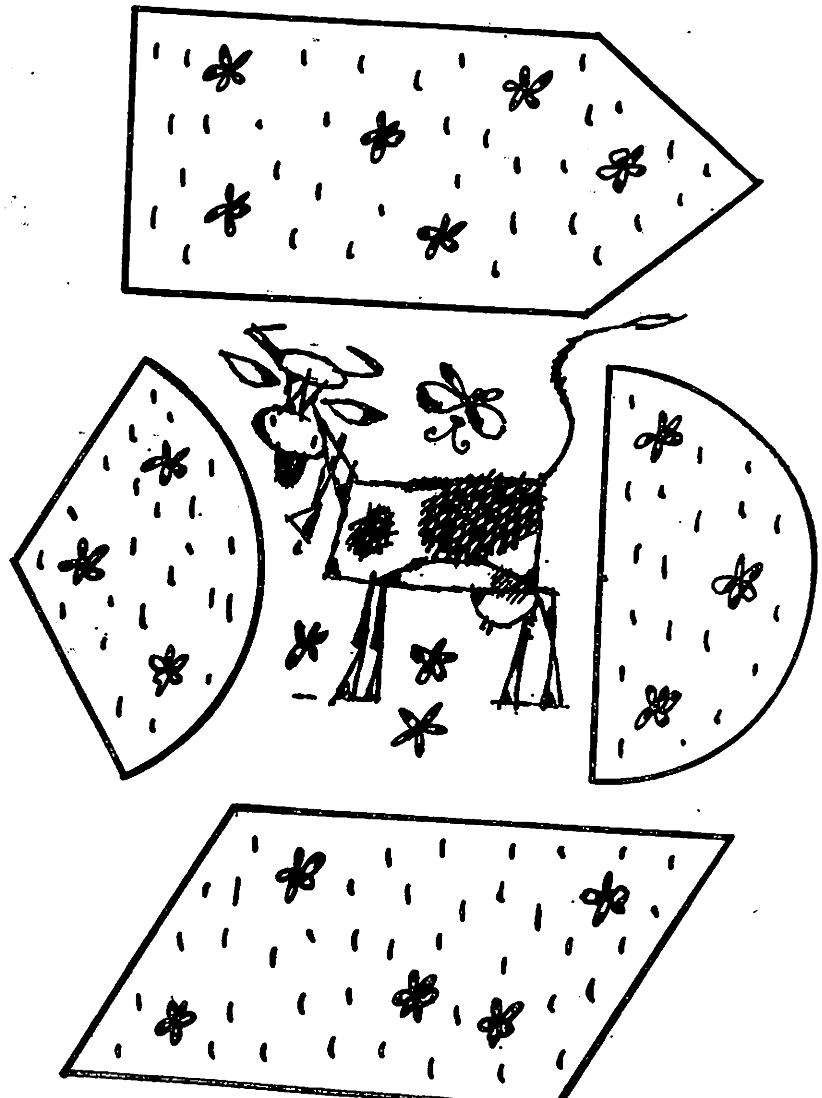
— Тепер ми маємо ключ і до інших головоломок, — переможно сказав Ігор. — Адже стрілу можна розглядати як фігуру перетину прямокутника і паралелограма, а сектор — це перетин трикутника з кругом.

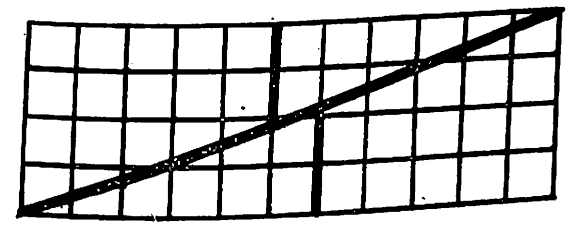
— Але для цього треба вміти будувати трикутник...

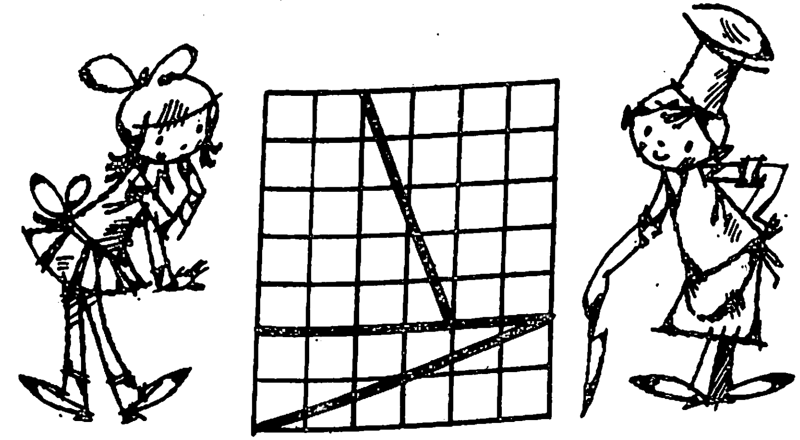
— Його легко можна одержати з стріли. Це теж перетин паралелограма й прямокутника, тільки розміщених певним чином. Але його можна одержати й простіше...

До гурту підійшов кулінар.

— Облиште ви оті трикутники. У мене для вас цікава задача. Ось дві плитки шоколаду. А нас восьмеро.







Поділіть, будь ласка, шоколад на всіх, щоб кожному дісталася однакова кількість дольок.

Хлопці порахували дольки і розгубилися: кожна плитка мала 42 дольки.

— Що вас стурбувало?

— Те, що розділити їх так не можна. Адже кожну плитку треба ламати на чотири частини, а 42 на чотири націло не ділиться,— сказав Віктор.

— А ви розламайте плитку на кілька частин, зробіть перестановки і, може, вийде?

— Як не перекроюй, з нічого дольки не виникнуть.

— Тоді давайте зробимо це разом. Тільки спершу на папері.

Віктор дістав блокнот і, накресливши схему шоколадної плитки, розділив її на чотири, попарно конгруентні частини.

— Тепер я перекладу ці частини по-іншому,— сказав кулінар.— При цьому я одержу зовсім інший прямокутник. Та це нічого не змінює. Рахуйте: скільки дольок?

— Їх стало 44.

— А ви казали: не виникають... Виникають, і рівно стільки, щоб кожну плитку можна було розділити на чотири рівні кількості цілих дольок!

— Цього не може бути! — заперечили хлопці.

— Ви не вірите своїм очам?

— Може, й так,— відповів Ігор.— Тільки тут, у полі, розбиратися, як то вийшло... Дома поміркуємо.

— Гаразд. І все ж шоколадом поласуємо. А оскільки поділити його так, як на папері, ні мені, ні вам не вдасться, діліть традиційним способом.

Коли хлопці повернулися з поля, Інверсний насамперед поцікавився, чи впоралися вони з його задачею.

Олег розповів, що хоча підказка й навела їх відразу на правильний шлях, все ж нелегко було здогадатися, що корову треба припинати двома вірьовками: одною до *АБ*, іншою до *СД*. Інверсний залишився задоволений. Розв'язок задачі й справді допоможе тим, хто забажає припнути корову на ділянках у формі паралелограма, півкруга, стрілки чи сектора.

— Зрозуміло,— мовив Інверсний,— кожній з них притаманне щось своє. Підказкою для півкруга буде ще не

розкомплектований набір знарядь моїх друзів з піонерського табору. Там ви знайдете дві вірьовки по 40 м, три кілочки і кільце. Цього досить, щоб припнути корову так, що вона зможе пастися лише на ділянці формою півкруга діаметром 40 м.

— Ви, напевне, перший, хто ввів корову в математичні задачі? — запитав Олег.

— Де там! Ще Архімед посилав в Александрію Ератосфенові Кіренському чи Аполлонію Пергському задачу, в якій належало обчислити кількість білих, чорних, рудих і строкатих биків та корів у чередах, що належали самому Сонцю.

— І що ж?

— Звичайно, сіракузький мудрець полюбляв не лише пропонувати складні задачі, а й розв'язувати їх. Між іншим, число білих биків у задачі Архімеда виходить десь $1598 \cdot 10^{206541}$, а всіх — $7766 \cdot 10^{206541}$. Щоб записати всі вісім чисел відповіді, знадобилася б книга на 660 сторінок, якщо на кожній сторінці друкувати по 2500 цифр.

— Оце задача!

— Фізично вона не кожному під силу. І запропонував її Архімед теж не випадково. Переказують, що александрійські вчені були занадто гордими і хвалькуватими. Задача про биків Сонця була для них доброю пересторогою від зазнайства.

— А продиктуйте нам умову... Може, ми гуртом її здолаємо,— попросив Олег.

— Кажу ж: вона надто складна. А головне — вимагає величезної обчислювальної роботи. Краще я запропоную вам задачу Ньютона, теж про корів.

Ось умова.

Трава на пасовиську росте однаково густо і рівномірно. Стадо корів, що пасеться на ньому, теж рівномірно поїдає її — і ту, що є, і ту, яка підростає. Відомо, що 70 корів можуть випасти всю траву за 24 дні, а 30 — за 60 днів. Скільки корів можна випустити на це пасовисько, щоб їм вистачило паші на 96 днів?

— А що, ця задача простіша?— запитав Віктор.

— Набагато. Але не без кмітливості...

Інверсний звернув увагу, що Олег і Ігор про щось засперечалися.

— Що ви там не поділите? — запитав він їх.

— Та все шоколадні плитки, які нам подарували...

Інверсний глянув на креслення і розсміявся:

— Так он що ви ділите! Ну, ну...— І додав: — Це один з численних геометричних софізмів.

— Ми знаємо про аксіоми, означення, теореми. А софізми... Не зустрічалися...— виправдовувався Віктор.

— Ні, зустрічалися, в розповідях іксовців. Коли Незнайко, Верхоглядько і дехто з нулів демонстрували вам свої математичні «відкриття», всі вони були жертвами софізмів. У даному випадку то були софізми геометричні.

— А це що за дивина? — не терпілося Олегові якомога швидше дійти істини.

— Софізм — стародавній спосіб обвести навколо пальця неуважного співрозмовника. Це — навмисне помилкові міркування, які видаються за істинні. В математиці за допомогою софістичних міркувань маскують неправильні доведення явно неправильних тверджень. Коли шоколадний сюрприз перекласти на мову арифметики, то він відповідатиме твердженню: 42=44, або 2=0!

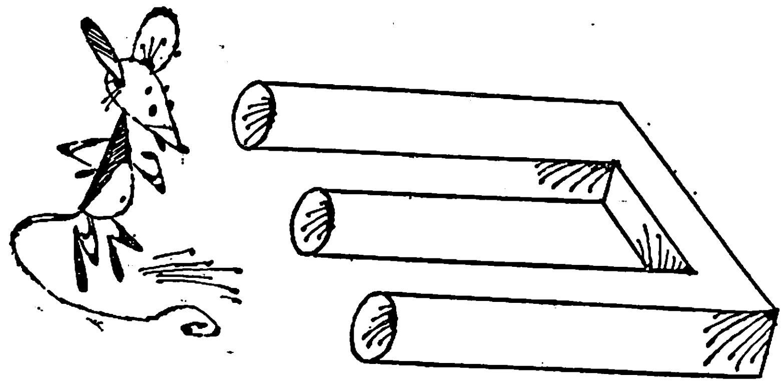
— Нас не переконало й креслення.

— От і чудово! Ви вже досить багато знаєте, щоб не потрапити в подібну пастку.

— Але ж ми й не розгадали, як ця пастка влаштована?

— Бо, певне, не вивчали подібності фігур. Я лише можу порадити зробити точне креслення плитки, розрізати його ножицями уздовж ліній перекрою і подивитися, якою буде плитка прямокутної форми.

— Але коли ми не довіряємо кресленням при доведеннях, то чи можна таким нематематичним способом їх спростовувати?



— Ви спростуєте доведення в такий спосіб, у який його вам виклали. А знаючи властивості подібних фігур, зокрема трикутників, спростуєте цей софізм і логічними міркуваннями.

— Виходить, задачі Небрехи — теж софізми?— пригадав зустріч з міжзоряним капітаном Олег.

— Можливо. А що він вам доводив? — поцікавився Інверсний.

— Свою теорему: ніби сума довжин катетів дорівнює довжині гіпотенузи.

— І переконав?

— Ні, ми віримо Піфагору.

— То й правильно чините,— підбадьорив хлопців Інверсний.

— Признатися, ми й не думали, що треба бути таким обережним, коли маєш справу з доведенням математичних тверджень,— зізнався Олег.

— Бачите, при доведенні теорем ми маємо право спиратися лише на аксіоми й теореми, доведені раніше, використовуючи при цьому первісні чи введені через означення поняття. Довіряти можна тільки логіці. Навіть очі можуть підвести. Хочете переконатися? — перепитав Інверсний.— Будь ласка! Художники придумали багато цікавих прикладів, я покажу вам деякі з них.

Інверсний вийшов із кабінету і за кілька хвилин повернувся з папкою якихось рисунків.

— Ось подивіться на цей рисунок,— сказав він.— Тепер прошу кожного підійти до мене й тихенько сказати: що тут нарисовано?

Одні розгледіли молоду жінку, інші — згорблену бабусю.

— Так хто ж насправді тут зображений? — перепитав Інверсний.

— Нарисовано обох,— висловив свою думку Ігор.

— Отож, а бачимо то одну, то іншу... А тепер придивіться до цього об'єкта. Що тут зображено?

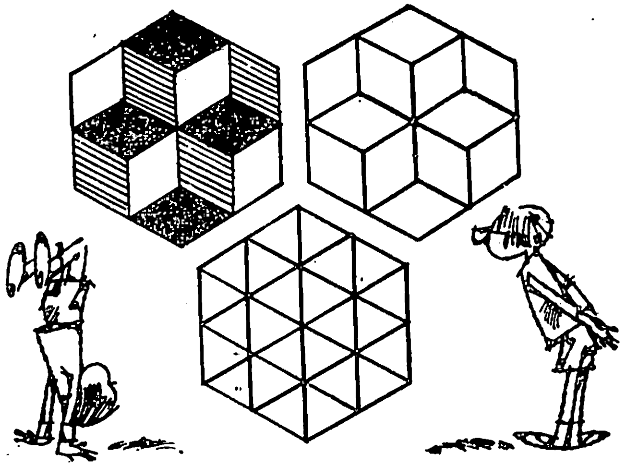
— Якщо розглядати праворуч,— почав Ігор,— ніби літера П, але ліворуч звідкись з'являється третя деталь, до того ж не квадратна, а кругла. Ні, хлопці, це справді дивовижно...

— Отож-бо... Око бачить і ніби стверджує факт... Можливо, менш ефективні, та все ж повчальні й ці рисунки. Гляньте, отут зверху, два кубики чи один?

— І так, і так правильно,— відповів Віктор.

Інші теж помітили, що фігура з трьох кубиків на очах ніби оберталася на 180°.

— Якщо дивитися в центральну точку, можна бачити не просторову фігуру, а плоску — шестикутник, викладений чо-



тирикутними плитками трьох кольорів,— це Віктор підмітив ще одну властивість цікавого рисунка.

— Правильно. Все це найкраще спостерігати на контурному, незаштрихованому рисунку. Ви його бачите посередині...

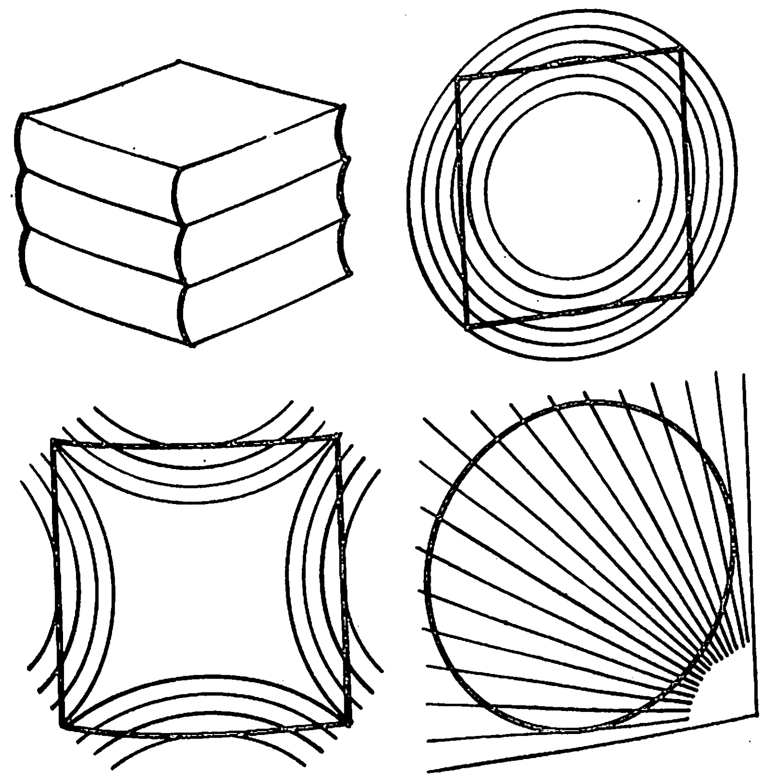
Тепер я проведу кілька ліній, і до тих трьох фігур, які ви вже бачили, додадуться ще дві: прозорий куб із взаємно перпендикулярними перегородками всередині або великий куб, складений з восьми малих кубиків. При цьому ви можете бачити його і знизу, і зверху, як кому видасться.

— От і доведи тут теорему! — мовив Ігор.— Ти бачитимеш одну фігуру, інші — дві.

— Менше за все треба звертати увагу саме на те, що бачиш. Геніальний норвезький математик Нільс Генрік Абель (1802—1829) з цього приводу говорив: «Геометрія — це мистецтво робити правильні висновки на неправильних кресленнях...»

Потім Інверсний показав рисунок, на якому дивним чином переміщувався стос із трьох книг... Книги лежали то корінцями до глядачів, то корінці їх перескакували на лівий край рисунка.

— Геометричні фігури ми бачимо деформованими, за-



лежно від того, що їх оточує, і тла, на якому вони накреслені,— продовжував Інверсний.

І він показав ще один рисунок із своєї колекції.

— Подивіться сюди: правда ж, сторони першого квадрата здаються увігнутими всередину, а другого навпаки — опуклими. Між тим, це справді квадрати, а не криволінійні фігури. Деформованим здається і коло на четвертому рисунку.

Інверсний роздав туристам й інші рисунки. Зображені на них предмети коливались, зміщувались, оберталися залежно від того, як їх розглядали. Геометричні фігури видавалися сплюснутими, розтягнутими, зігнутими. Рівні сприймалися як нерівні.

Такі ілюзії стали ще одним переконливим доказом, що при доведенні математичних тверджень рисунок поганий помічник.

...Непомітно пролетіли останні дні канікул. Кожен день приносив щось несподіване, цікаве, радісне. У полі, в лісі, на березі річки, в домі Інверсного — на кожному кроці друзів чекала математика.

Подякувавши учневі Гео Метра за гостинність, друзі вирушили в дорогу.

Що може бути приємніше за дорогу додому? Навіть осінні хмари, що все частіше приносили негоду, не могли зіпсувати гарного настрою. Одначе дехто почав таки ремствувати на погоду.

— Отак і сонця не побачимо,— бурчав Верхоглядько.— То математика, то хмари...

— Але не всі хмари кидають тінь,— зауваживІкс-нульовий.

— Як то не всі?

— А ось дивіться,— Ікс-нульовий дістав папір, накидав якісь креслення, зробив розрахунки.— Від хмари, яка пливе на висоті 10 км над землею, тінь падає лише в тому випадку, коли довжина її понад 30 км і ширина — понад 93 м.

Всі переконалися у правоті Ікса-нульового.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Як іксовці організували переїзд через пустелю? Скільки пального витратили на дорогу?

2. Як Інверсний розв'язав задачі будівельників: *а*) розділив фігури на однакові частини; *б*) одним розрізом розділив фігури другої партії на такі дві частини, що з кожної фігури можна було утворити квадрат?

3. Як були побудовані силуети відповідних фігур із елементів: *а*) геометричного рака, *б*) стомахія, *в*) танграма?

4. За який найменший час можна засмажити три котлети?

5. Як розрізали торти?

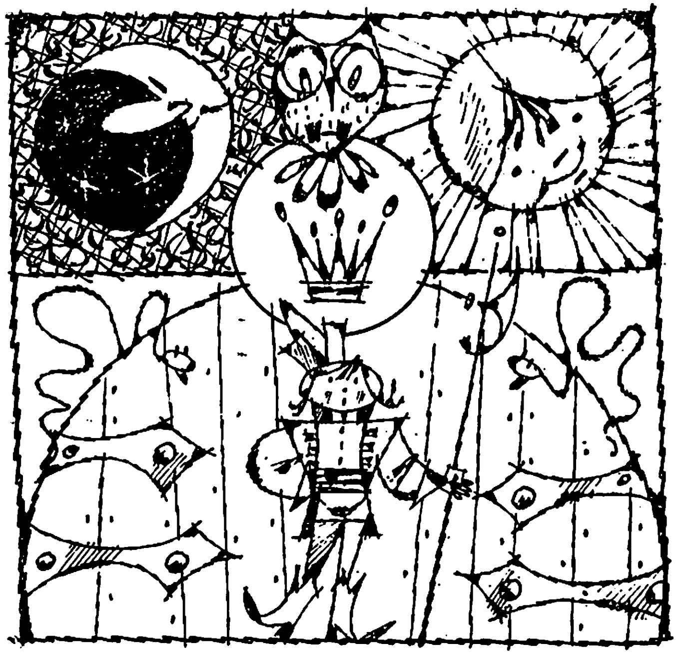
6. Які числа зашифрував Інверсний?

7. Як прив'язати корову, щоб вона паслася лише на ділянці, яка має форму: прямокутника, паралелограма, стріли, півкруга, сектора?

8. В чому секрет шоколадного сюрпризу?

9. Скільки корів можна пустити на поле, щоб їм вистачило трави на 96 днів?

10. Як Ікс-нульовий довів, що не всі хмари кидають на землю тінь? Як він визначив найменші розміри хмари, яка може кидати тінь?



В КРАЮ БИЛИННИХ ГЕРОЇВ

Фантасти легко посилають своїх героїв як у майбутнє, так і в минуле. Коли ж Іксові й Ігреку — нульовим запропонували побувати в билинних героїв, вони сприйняли це за жарт.

Та черговому по Іксовії було не до жартів. З Билинного краю вже вкотре прилітав голуб і щоразу приносив записку з одним і тим же проханням: терміново відрядіть спеціалістів із логіки й математики.

Ікс та Ігрек — нульові наспіх зібрали найнеобхідніше. Хлопців — Віктора, Ігоря й Олега — вирішили не брати: поїздки в Край Билинних Героїв завжди небезпечні. Можуть зустрітися Соловей-розбійник, Змій Горинич, Баба-Яга, жорстокі царі... Та й математичний зміст цього відрядження навряд чи приніс би їм якусь користь: все те — далеке минуле.

Та хлопці наполягали на своєму. Зрештою, останнє слово було за черговим по Іксовії, який дав їм дозвіл на виліт.

Десь за Нуліадією з реактивного лайнера пересіли на гвинтовий літак, потім їхали поїздом, поштовою трійкою і, нарешті, возом, у який була запряжена сива шкапа. Візнику — дідові Омельку — коштувало неабияких зусиль примусити її зрушити з місця. Спочатку їхали полем, яке непомітно перейшло в чагарник, а далі — густим, похмурим лісом.

— А що, може, й справді тут живе Баба-Яга? — нахилився Віктор до візника, жартуючи.

— Останнім часом щось не видно. Подейкують: якась деталь у ступі зламалася. Пішки ж вона не ходить.

— А Лісовик теж із цих країв?

— Та з цих... Но! Но! А то вже почула про свого родича...— нагримав дід Омелько на шкапу.

По дорозі зустріли чоловіка. Дід привітався до нього, як до старого знайомого:

— Здоровий будь, Стецьку! Далеко вирядився?

— Та маю клопіт. А це почув: проїздом у нас ті, що все вміють і знають. Йду до них на пораду.

— А що ж скоїлося?

— На роботі ошукали мене.

Омелько зрозумів, що розмова буде довга, і вирішив дати конячині перепочинок.

— Ну то розповідай: як воно там було?

— Домовився з громадою дорожні мости полагодити. Мав працювати 30 днів підряд і одержувати по 8 кіп за день. Коли ж який день просплю, з мене утримують за цей день 10 кіп...

(Скажемо нашому читачеві, що на той час гроші копами лічили.)

— Так можна мати добрий заробіток. Мені б твоя сила і така робота! — позаздрив дід Омелько.

— Я теж так думав. А коли в кінці місяця пішов по заробіток...

— То що?

— Нічого не заробив...

— Як то нічого?

— Сказали: ніхто нікому не винен. І показали на двері, бо містки вже лагодив інший.

— Треба було менше спати.

— Ні. Я піду до тих, хто все знає,— вони розберуться.

Дід багатозначно глянув на іксовців.

— А що ж, можемо й розібратися,— обізвався Ікс-нульовий.— Ми ті, до кого ви йдете.

Ікс-нульовий дістав блокнот і почав робити якісь розрахунки.

Стецько з подивом спостерігав за його роботою. Потім Ікс-нульовий сказав, скільки робочих днів той не працював, а проспав на печі.

Стецько оторопів:

— Звідки ви взнали? Наче зі мною спали разом...

— Математика.

— У нас такої нема.

— Але ж громада розрахувала вас правильно?

— Оце розібралися!..— розсердився Стецько і пішов геть.

Нарешті дісталися в Край Билинних Героїв.

Билинники попросили іксовців насамперед виручити з біди доброго молодця Кирила Кожум'яку. Розминав він волові шкури, коли почув, що воєвода скривдив його брата. Розсердився Кожум'яка і подер ті шкури. А вони належали воєводі.

Всі боялися за життя Кожум'яки. Та суддя, який був колись в Іксовії, так судив Кожум'яку, що той мав сам виручити себе з біди. Після суду Кожум'яку залишили в хаті, яка має двоє дверей. Через одні Кожум'яка може вийти на волю, через інші — ні. Де які двері, знають лише суддя та два охоронці. Кожен з них стереже свої. Кожум'яка може поставити одному з охоронців лише одне запитання. І якщо з відповіді він узнає, які двері ведуть на волю, йому не боронитимуть звільнитися від ув'язнення. Якщо ж не взнає — бути йому на все життя в неволі. Три дні дав суддя на роздуми. Завтра останній день.

Іксовці порадилися між собою, і того ж вечора Кожум'яка вже знав, що йому питати. З відповіді він узнав, які двері ведуть на волю.

Билинники мали ще одне прохання. Не давав їм спокою Змій Горинич. Скільки-то горя вони зазнали від нього! Виходили богатирі на поєдинок, та так і не здолали чудовиська. Бо має він 1000 голів і таких, що коли їх відрубати, на тому місці одразу ж нові виростають.

Лише недавно мудра Сова десь довідалася, як можна здолати Горинича. Якщо одним ударом меча у змія відтинати 33, 21, 17 або 1 голову, то у нього відповідно виростатиме 40, 0, 14 або 10 голів. Коли ж відтяти всі голови, то нові вже не виростуть.

Довго думали билинники, як їм зборотн чудовисько і в якому порядку стинати ненависні голови. Та так нічого й не придумали.

Іксовці одразу ж розгадали, в якому порядку це треба робити.

Чутка про добрі справи іксовців швидко облетіла весь Билинний Край, і вже другого дня до них примчав гонець з царства жорстокого Кусмана. Він розповів сумну історію про трьох сміливців, які не боялися говорити правителеві у вічі правду. За це він їх ув'язнив у комірчині на верхівці башти свого замку.

— І ніякої тобі зачіпки...— розмірковуючи вголос, Ігрек-нульовий оцінював ситуацію.

— Стривайте! Ззовні, біля вікна в'язниці, прикріплено блок, через який перекинуто вірьовку. На кінцях вірьовки прикріплені корзини однакової ваги. В комірчині є ще камінь,— пригадав гонець.

— Аби ж то хоч знати вагу кожного сміливця...

— І це відомо. Сміливців перед ув'язненням зважили. Один з них важить 195 фунтів, другий — 165, а третій — 90. Ми навіть узнали, що вага каменя, який лежить у комірчині,— приблизно 74 фунти.

— Це вже інша річ,— повеселішали іксовці,— ми ще не знаємо, чи можна тут щось зарадити, але тепер задача має достатньо даних, щоб її розв'язати.

— Треба, мабуть, підбирати вантажі в корзинах так, щоб вони були майже рівні? — висловив своє міркування Олег.

— Це не вдасться. Та воно й не обов'язково...— відповів Ігрек-нульовий.

— Так, так,— погодився Ікс-нульовий.— Я гадаю, що, коли різниця між вагою однієї і другої корзини не перевищуватиме 16 фунтів, то спуск буде безпечним.

Тільки десь опівночі спільними зусиллями було знайдено вихід. Гонець не ризикнув везти письмовий план порятунку. Він вивчив його напам'ять і, не чекаючи ранку, вирушив до замку Кусмана.

Проханням билинників не було ліку. Щоб зекономити час, іксовці дещо доручили й хлопцям. До них вони спровадили й Охріма, який ніяк не міг залатати свою свиту. Дірки на ліктях тієї свити були квадратні. Віктор сам виміряв: 12×12 см. Щоб залатати їх, Охрім від рукавів нарізав прямокутних латок: 9×16 см. Він і сам бачив, що загальна площа дірок і площа латок однакові, так нібито й залатати можна. Але на скільки менших частин і як саме треба розрізати їх, щоб скласти латки розміром 12×12 см,— не міг додуматися.

Задача ускладнювалася ще й тим, що кожну латку бажано різати як можна на менше число клаптиків, щоб швидше позшивати їх.

Хлопці охоче виручили Охріма, і він пішов від них у латаній свитині.

Через кілька днів, коли до іксовців було не пробитися, до будинку, де вони жили, прискакав цілий загін озброєних вершників.

— Ми від самого царя Гороха,— відрекомендувався старший.— Його світлість просить вас виручити в тяжку для нього годину.

— Не вистачало ще царям допомагати! — обурився Віктор.

Та іксовці не відмовили посланцям. Вони тільки попросили зачекати день-другий, поки впораються з проханням билинників. Хлопці не хотіли їхати до Гороха. Хоч би який він був, усе одно цар. І тільки Іксу-нульовому вдалося переконати їх, що вони помиляються. Бо й цареві можна допомогти — тільки так, щоб користь мали його підлеглі.

Перед самісіньким від'їздом до іксовців прибігло ще кілька билинників і попросили виручити Івасика-Телесика. З'ясувалося, що Баба-Яга вже відремонтувала ступу і тепер напала на хлопця.

— Телесик плаває на човні близько від центра озера, яке має форму круга. А Баба-Яга літає на ступі понад берегом,— розповідав один з билинників.

Другий пояснив, чому саме над берегом:

— Ступа щойно з ремонту, і Яга боїться шубовснути у воду. Швидкість ступи вчетверо більша, ніж човна. Треба Телесику передати план руху по озеру, щоб він встиг пристати до берега раніше, ніж на те місце наспіє Баба-Яга. А там уже буде кому підібрати його.

— Треба обдурити Бабу-Ягу,— вирішили хлопці.

Помізкувавши, такий план вони знайшли. І, не гаючи й хвилини, разом з іксовцями вирушили в дорогу.

Горох зустрічав своїх рятівників підкреслено ввічливо. Старий, згорблений цар справді нагадував зморщений пожовклий стручок гороху.

Трохи випрямившись, він хотів щось запитати іксовців. Але в цю хвилину долинула галаслива суперечка.

— Це знову вони? — Горох сердито зиркнув на своїх наближених.

— Вони...— закивали ті головами.

— Біда мені та й годі...— поскаржився Горох.— Маю трьох радників. Але вони такого накоїли, такого наплутали, що день і ніч тепер сперечаються. Кожен доводить свою правоту... Може, ви підкажете, хто з них мудріший, того і лишу при собі...

Ікс-нульовий на якусь мить замислився, а далі попросив, щоб принесли дві білі і три чорні шапки. Потім запросив мудреців-сперечальників.

— Ось у мене п'ять шапок,— звернувся до них Ікс-нульовий.— Дві білі й три чорні. Я надіну кожному на голову одну з цих шапок, а дві сховаю в торбу. Відгадайте, у кого яка шапка на голові? Побачимо, хто з вас наймудріший.

Мудрецям зав'язали очі. Ікс-нульовий натяг кожному на голову чорну шапку, а білі кинув у торбу. Потім очі розв'язали. Довго сиділи мудреці, дивлячись один на одного. Нарешті один сказав:

— На мені чорна!

— Ну от!— зрадів Горох.— Ти й залишишся при мені. А ви — на всі чотири вітри!

Як тільки за мудрецями зачинилися двері, Горох, важко зітхнувши, мовив:

— Покликав я вас, дорогі мої іксовці, ось ще за яким ділом. Кажуть: малі діти — малий клопіт, великі діти — великий клопіт. А в мене аж п'ятеро синів. Виросли, і бачу, що треба поділити царство між ними. Та знаю, не миритимуть вони між собою. Проте хоч двоє мусять же у злагоді жити.

І Горох попросив допомогти йому поділити царство на такі п'ять частин, щоб будь-які дві з них мали спільну границю. Він довго й сам думав, як це зробити, та нічого в нього не вийшло.

Іксовці не квапилися з розв'язком, бо відчували, що й це не головне, задля чого запросив їх Горох.

А оте головне виявилося цікавою справою. Дійшла до Гороха чутка, що хтось таки вбив ненависного Змія Горинича. Такий героїчний вчинок могли зробити хіба що Ілля Муромець, Добриня Нікітич або Альоша Попович. Та коли богатирі стояли перед Горохом, кожен з них тричі відповів:

Ілля Муромець: Я не вбивав Змія Горинича. Я виїздив у заморські країни. Змія Горинича вбив Альоша Попович.

Добриня Нікітич: Змія Горинича вбив Альоша Попович. Якби я Горинича вбив, то не сказав би про це. Багато ще нечисті лишилося.

Альоша Попович: Я не вбивав Змія Горинича. Я давно шукаю нагоди здійснити подвиг. Ілля Муромець таки їздив у заморські країни.

— Отакого накрутили, а я мушу розбиратися,— бурчав Горох.— Здогадайся, хто з них герой, кого маю нагородою вшанувати?

Богатирі не поважали Гороха: у двох випадках кожен з них сказав правду, а один раз поглузував, сказавши неправду.

Але це не перешкодило іксовцям визначити, хто з богатирів розправився зі Змієм Гординастичем. Герой і справді заслуговував нагороди.

Іксовці й хлопці припали до вподоби Горохові, і він вирішив довірити їм ще одну свою таємницю. Він розповів:

— Коли вмирав мій сусід, цар Далмат, у нього не було дітей. Тому свій скарб він заповів мені, завбачливо закопавши його у землю. Тільки та земля невдовзі перейшла у володіння нащадків Далмата. Багато років спливло, поки я її відвоював. Але вже було пізно...

— Хтось випередив і знайшов скарб? — запитав Віктор.

— Ні. Напевне, вже ніхто його не знайде.

— Що ж сталося?

— Скарб можна було знайти за трьома прикметами — каплицею, дубом і сосною в такий спосіб: від каплиці пройти до дуба, потім, повернувши під прямим кутом праворуч, пройти ту ж віддаль і поставити тичку. Затим пройти від каплиці до сосни, там повернути під прямим кутом ліворуч, пройти ту ж віддаль і знову поставити тичку. Далмат клявся, що скарб закопано точно посередині відрізка, який сполучає тички.

— Це легко зробити,— сказав Олег.

— Але поки я відвоював землю, від каплиці не лишилося й сліду,— мало не плакав Горох.

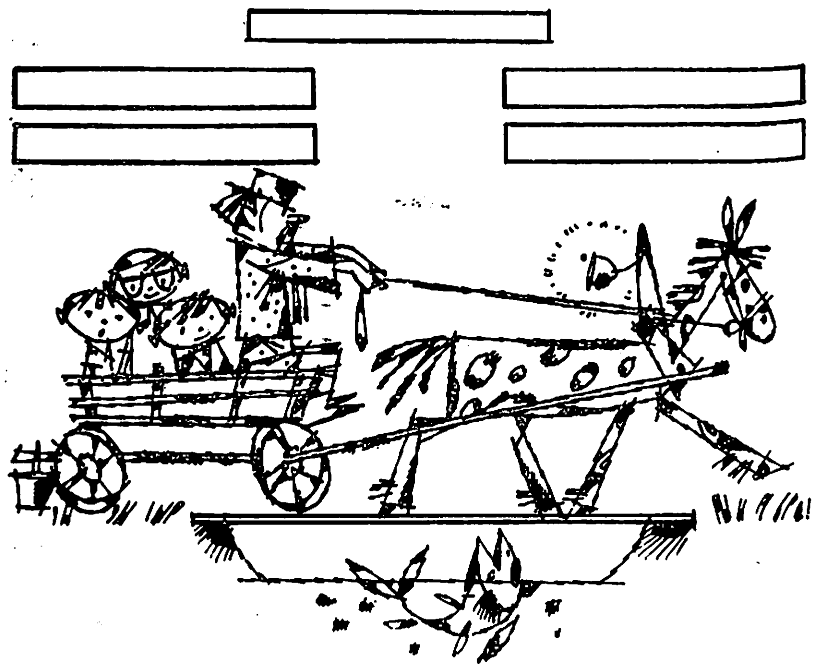
Він обіцяв велику нагороду, можливо, навіть частину царства, аби тільки взнати, де закопано скарб.

Хлопців захопила задача. Але їм найменше хотілося, щоб скарб дістався Гороху. Якби простим людям...

Та ось до них підійшов воїн. Він знав, що Горох шукає скарб і просив не відкривати секрета.

— Є у мене надійні хлопці...— запевнив він.

На тому й порішили. Хлопці швидко визначили місце, де був закопаний скарб, і передали план пошуку воїнові.



Коли ж воїн дав знати про врятування скарбу, хлопці той самий план передали Горохові.

Другого дня кілька підвід у супроводі загону особистої Горохової охорони вирушило до заповітного місця. Вправно працювали цареві копачі. Та коли добралися до залізних скринь і відкрили їх, побачили: всі вони порожні. Тільки на дні однієї лежав шмат бересту, на якому було написано: «Хто надбав, той і придбав».

Горох як глянув на порожні скрині, так і впав непритомний. Ледве відлили бідолашного.

А коли іксовці сказали володареві, що поділити його царство на п'ять частин так, як він хоче, не можна, той байдуже махнув рукою:

— Хай ділять, як хочуть. Все одно на другий день воювати почнуть...

Відрядження скінчилося. Іксовці зібралися в дорогу. Сивка-бурка прудко бігла знайомою дорогою, прислухаючись до розповідей Омелька.

Місток через струмок перед першою поштовою станцією, до якої віз дід Омелько гостей, був на ремонті.

Він угледів на березі чотири однакових дошки і тут же без жодного цвяха змайстрував місток, по якому всі щасливо перебралися на другий берег.

У реактивному лайнері зустріли старих знайомих: Зета, Унікурсальця, Незнайка, Верхоглядька, та тільки-но хлопці почали розповідати про свої пригоди в Краю Билинних Героїв, як до салону зайшла стюардеса й подала знак, що хоче щось сказати.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

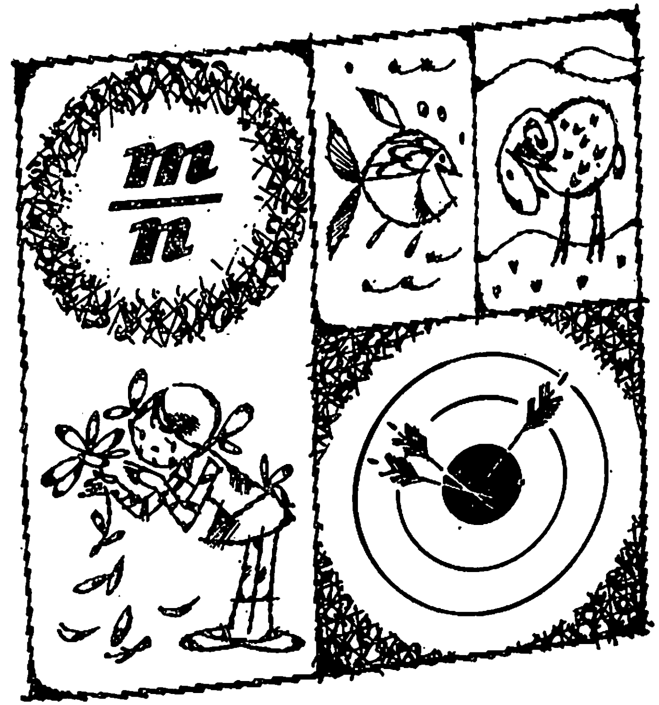
1. Скільки робочих днів проспав Стецько-лежебока?
2. Яке запитання поставив Кирило Кожум'яка охоронцеві?
3. Який план втечі трьох сміливців запропонували іксовці?
4. Що порадили хлопці Охрімові?
5. Який маршрут утечі Івасика-Телесика знайшли хлопці?
6. Як мудрець узнав, що на ньому чорна шапка?

7. Як іксовці довели, що не можна поділити царство на п'ять частин так, як задумав Горох?

8. Хто здолав Змія Горинича? В якому порядку богатир відтинав голови чудовиську?

9. Як було знайдено скарб Далмата?

10. Як дід Омелько спорудив місток із чотирьох дощок без жодного цвяха?



У СВІТІ ВИПАДКОВОСТЕЙ

— Траса нашого польоту,— сказала стюардеса,— пролягає над країною, мешканці якої у всіх своїх діях покладаються на випадок. Чи знайдуться охочі побувати в ній?

Спершу бажаючих не було. Що там дивитися? Життя туземців, мабуть, не підпорядковане якимось розумним правилам. Шарварок та й годі! Кожен робить, що випаде. Мало що може статися...

Та з наближенням до дивовижної країни мандрівників охоплював інтерес до неї. Невдовзі половина пасажирів була за те, щоб літак хоч на якийсь час зробив тут посадку. Інша ж половина не наважувалася ризикувати.

Вихід із становища запропонував Зет.

— Може, декому здасться й дивним,— звернувся він до присутніх,— але за таких обставин бажаючим побувати в Країні Випадковостей може допомогти лише випадок.

— Ні в якому разі! — заперечили прихильники нової екскурсії.— Ми не можемо довірятися такому ненадійному керманичу.

— Даремно ви протестуєте. Можливо, саме після цієї екскурсії багато хто зрозуміє, що всі ми живемо в щільному оточенні випадковостей і наш світ від цього не втратив ні своєї краси, ні романтики. Випадки й справді інколи приносять нам неприємності і навіть нещастя. Такими є землетруси, посухи, урагани, повені, цунамі та багато інших несподіванок і небажаних явищ. Але випадковості — це не обов'язково неприємності. Багато хто з нас, переглядаючи таблицю виграшів лотереї, знаходив там номер свого лотерейного білета. Тож випадок тут — виграш, він приносить нам радість. А хіба не випадково, на радість усім нам, зібралась отака приємна група пасажирів. Випадок — тільки порушення плавного ходу явищ. Тому не кожним випадком слід нехтувати.

Пасажири поволі згоджувалися. Потім Зет запитав:

— Чи має хто дрібні гроші?

З усіх боків йому простягнули руки з монетами. Зет узяв одну з них.

— Усі знають, що монета симетрична і тільки по рисунку можна відрізнити два її боки, як кажуть, герб і решку. А скільки випадковостей пов'язано із звичайною монетою! Але для нас досить однієї: бути чи не бути екскурсії? Ось я підкину монету. Якщо випаде герб — значить, нам судилася екскурсія у світ випадковостей, якщо ж решка — летимо без посадок прямо в Іксовію.

Зет підкинув монету. Описавши дугу, вона впала на килим. Всі побачили — випав герб. Отже, літак мав зробити посадку в Країні Випадковостей.

В аеропорту — нічого незвичайного. Провадилась буденна робота.

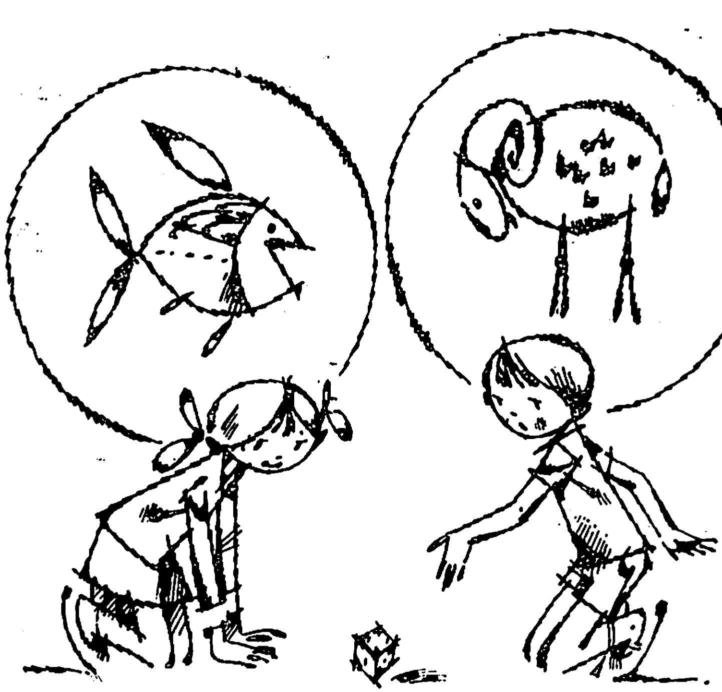
Щоб краще ознайомитися з новою країною, прибулі звернулися в екскурсійне бюро. Екскурсовод виявився добрячим балакуном, і цікаве почало відкриватися ще до екскурсії.

— Скажіть, це правда, ніби ви завжди покладаєтесь на випадок? — запитав Незнайко.

— А як же інакше? — здивувався екскурсовод.— Ось, наприклад, я дуже люблю пиріжки з сиром і повидлом. Але, пообідавши, до компоту треба вибрати щось одне. От і кидаю монету... Без цього я не наважився б надати перевагу тому чи іншому.

— Даруйте! Але буває так, що якась страва вам до смаку більше, ніж інші. І що ж, ви кожного разу її вибираєте? — поцікавився кібертонець.

— Я люблю рибу в п'ять разів більше, ніж м'ясо. І коли б діяв так, як ви кажете, то ніколи б не покуштував м'яса, бо кожного разу вибирав би рибу. А це теж погано. В нас люблять різноманітність і досягають її чергуванням. Тут допомагають імовірності.



— Тобто: п'ять днів їсте рибу, а на шостий м'ясо?

— Це була б нудна різноманітність. І щоб її уникнути, ми звертаємось до імовірностей...

— Вдруге чую це слово, а так і не втямив, що воно означає,— обізвався Незнайко.

— Ось бачите кубик. Грані його пронумеровані кількістю кружечків: від одного до шести. Якщо кидати кубик на підлогу, то верхньою може бути грань з одним, двома і навіть шістьма кружечками, або очками. Грань з одним

кружечком випадає догори випадково. Але ж випадково випадають й інші п'ять. І кожна з них, якщо кубик зроблений з однорідного матеріалу, не має переваг перед іншою. Тому усі шість випадків — коли догори випадає грань з певною кількістю кружечків — є рівноможливі. Ось я кину кубик і загадаю, що догори випаде грань з одним очком. Який у мене шанс вгадати?

— Звичайно, $\frac{1}{6}$, — відповів Віктор.

— Правильно. Бо всіх рівноможливих випадків шість і серед них — лише один, який я загадав. А тепер я загадую випадання догори грані з парним числом кружечків. Який шанс вгадати?

— Тепер — $\frac{1}{2}$, — знову вихопився Віктор.

— Тож усі зрозуміли чому? — запитав екскурсовод.— Бо при тій же кількості рівноможливих випадків вгадати мені допомагають аж три грані з парними числами кружечків (2, 4, 6), а $3:6=\frac{1}{2}$... Отже, імовірність — це числова характеристика настання випадкової події. У простіших випадках її одержують, як відношення числа подій (m), що сприяють даній випадковій події, до числа всіх рівноможливих випадкових подій (n) — $\left(\frac{m}{n}\right)$. Імовірність випадання грані з одним кружечком, як ми встановили $1:6=\frac{1}{6}$, імовірність випадання герба, коли підкидати монету $P_{\text{герб.}}=\frac{1}{2}$. А тепер перевіримо, як ви зрозуміли сказане. Ось у мене є червоний кубик. Бачите? Я розрізав його на

1000 менших рівних кубиків. Усю цю дрібноту висипав у торбинку, ретельно перемішав і пропоную вам, не дивлячись, взяти з торбинки один маленький кубик. Яка ймовірність, що ви дістанете:

а) непофарбований кубик?

б) кубик, у якого пофарбована лише одна грань?

в) кубик, у якого пофарбовані дві грані?

г) кубик, у якого пофарбовано три грані?

д) кубик, у якого пофарбовано чотири грані?

Туристи дали правильні відповіді. Але в них виникли запитання. Незнайко ще раз повернувся до кубика, грані якого занумеровані кружечками.

— Виходить, коли шість разів підкинути кубик, то один раз випаде грань з одним очком, один раз — з двома і так аж до грані з шістьма?

— Ні. Все значно складніше. Ось, наприклад, кидання монети. Кидаючи її один раз, ми не можемо передбачити, яким боком вона впаде. І коли випаде герб, це зовсім не означає, що за наступним разом має випасти решка. У монети, кубика, як і в будь-якого іншого генератора випадкових подій, нема пам'яті. Тому після випадання, наприклад, герба, при наступному киданні монети випадання герба чи решки рівноможливі. Але коли монету кидати багато, наприклад, 100 разів підряд? Можна впевнено сказати, що при 100 киданнях герб випаде не 1, 2 або 3 рази, а значно більше; і не 98 чи 99 разів, а значно менше. Випадань герба не буде точно 50, але, напевне, десь між 40 і 60.

— І все ж, як ви вибираєте, що вам сьогодні їсти — рибу чи м'ясо? — не вгавав Незнайко.

— За мене це вирішує той же кубик. Загадую, підкидаю його і дивлюся: випала грань з одним очком — їм м'ясо. Випала будь-яка інша — рибу.

— І він вас не підводить?

— Ні. Чим більше я користуюся ним, розв'язуючи таку задачу, тим точніше він задовольняє мій смак. Мені, як і всім, кому доводиться мати справу з випадковими подіями, завжди допомагає одна з найважливіших теорем науки про випадковості — закон великих чисел. Її відкрив знаменитий швейцарський математик Яків Бернуллі (1654—1705).

— Що ж він стверджує, цей закон?

— А стверджує він те, що в кожному окремому випадку може наступити будь-яка з випадкових подій, але при масовому повторенні їх остаточний результат вже не залежить від випадку, і найчастіше його можна передбачити. На цій закономірності й заснована організація всієї нашої діяльності.

І екскурсовод переповів цікаві історії про вчених, які за допомогою звичайної монети перевіряли дію закону великих чисел. Француз Бюффон (1707—1788), наприклад, кидав монету 4040 разів. Герб випав 1992 рази, решка — 2048. А один американець працював майже тиждень і кинув монету 10 000 разів. Герб випав 5037 разів.

— Теоретично все зрозуміло, але на практиці можуть трапитися й складніші ситуації, — сказав Олег.— Добре, якщо рибу любиш лише в п'ять разів дужче, ніж м'ясо. А як бути, коли доводиться з двох речей вибирати таку, що вона в 10, 40, а то й у 100 разів потрібніша, ніж інша. Тут уже й мішок кубиків не допоможе.

— Таке трапляється рідко. Та навіть за допомогою двох-трьох кубиків можна розв'язувати багато задач, які виникають у нас щоденно. Кубик з успіхом замінює нам монету. Бо, кидаючи його, можна поставити задачу і так: яка ймовірність того, що випаде парне число очок? Сприятливими тут будуть 3 ситуації: випадання 2, 4 і 6. Тому $P_{(\text{парн.})}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Маючи ж два кубики, можна розв'язати й таку задачу: яка ймовірність випадання 5 при одночасному киданні двох кубиків? Ось дивіться: нехай перша цифра в дужках означає число очок, яке випало на першому кубику, а друга — на другому. Тоді рівноможливими будуть події:

(1, 1), (1, 2), (1, 3)... (1, 6),

(2, 1), (2, 2)... (2, 6)... (6, 1), (6, 2)... (6, 6).

Усіх їх буде 36. Тому $P_{(5;\,5)}=\frac{1}{36}$.

— На кожен випадок задач не наскладаєшся, та й не носити ж ваші генератори випадкових подій із собою.

— В житті рідко трапляються такі події, ймовірність яких виражалася б дробом з великим чисельником і знаменником. А коли таке й буває, то, не втрачаючи багато в точності, ми завжди можемо такий дріб округлити. Крім того, є події, які за нормальних умов ніколи не відбудуться. Наприклад, політ у повітрі тепловоза або корабля. Такі події називаються неможливими. Ймовірність їх дорівнює нулю: $P_{(\text{неможл.})}=0$. А є події, які наступають неодмінно. Приміром, за 1 січня завжди буде 2 січня, за весною — літо. Події ці називають достовірними. $P_{(\text{дост.})}=1$. Імовірність же будь-якої іншої, тобто випадкової події, є якоюсь частиною одиниці, тобто правильним додатним дробом:

$$0<P_{(\text{випадк.})}<1.$$

— Що ж виходить, — вигукнув Незнайко, — чим рідше наступає або трапляється якась подія, тим менша її імовірність!

— Тільки так.

— Але ж є події надзвичайно рідкісні, навіть такі, що ніби й могли б траплятися, а не трапляються?

— Звичайно. Між іншим, англійський фізик Джінс (1877—1946) обчислив, наскільки ймовірно те, що в добре нагрітій печі горщик з водою не закипить, а перетвориться в лід. Обчисливши таку ймовірність, яку потім назвали дивом Джінса, вчений зробив висновок, що про це слід говорити не як про неможливе, а як про вищої міри маловймовірне. Та трапляються й надзвичайно рідкісні випадки,— додав екскурсовод.— Один англієць, якось за два роки дозволив собі поласувати в ресторані дорогою стравою — устрицями. І в черепашці однієї з них він виявив перлину. Математики підрахували, що таке диво може статися лише в одному випадку з мільярда. Коли ж через два роки цей англієць ще раз замовив устриці, він знову знайшов перлину. Імовірність такого збігу була в п'ять разів меншою, ніж імовірність першої удачі.

Екскурсовод нагадав, що прибулих уже чекає автобус, на якому вони здійснять подорож по країні.

У місті, куди вони приїхали прямо з аеродрому, усіх вразила висока організованість господарства, архітектурна досконалість та планування.

— Дивно: світ випадковостей, а який порядок...

— Тут усе так тому, що мешканці країни, певне, не тільки зрозуміли, що випадкові події підпорядковуються певним закономірностям, а відкривши ці закономірності, стали керуватися ними,— відзначив Зет.

Потім автобус вихопився за місто, і дорога побігла берегом озера. Екскурсанти звернули увагу на рибалок, які, виловивши рибу, сортували її, щось підраховували і знову випускали в воду.

— Що то вони роблять? — поцікавився унікурсалець.

— Підраховують, скільки в озері риби, придатної для вилову,— підказав екскурсовод.

— У такому великому озері?

— А що?

— І в який спосіб?

— Тут теж допомагає випадок. Давайте зупинимось, вам розкажуть.

Рибалки тепло привітали туристів. Їм не вперше доводиться зустрічати гостей і розповідати про свою роботу.

Відповідаючи на запитання, як вони визначають кількість риби в озері, один з рибалок розповів:

— Учора ми виловили 100 риб, кожну помітили і випустили в озеро. Сьогодні виловили 200 риб, і серед них було 2 помічених. Де тут працює випадок, ви вже здогадались. Нам же довелося виконати лише нескладні математичні обчислення, щоб довідатися: в озері близько 10 000 риб, придатних для вилову. Цього досить, щоб задовольнити смаки всіх наших любителів рибних страв.

— І ви довіряєте такій арифметиці? — запитав кібертонець.

— А чому б не довіряти? Вона нас не підводила.

— Тоді в цьому озері риби або ж пусто, або ж густо,— пожартував хтось із присутніх.

— Не скаржимось. Саме завдяки випадковостям, ми завжди забезпечені цим продуктом. А раніше були самі клопоти. І справді, уявіть собі, що біля цього берега трапляються великі косяки риби, але рідко. В іншому місці риба ловиться завжди, проте її дуже мало. Що б ви робили?

Всі мовчали. Навіть затяті рибалки не могли чогось придумати.

Не дочекавшись відповіді, рибалка продовжував:

— Ми теж спочатку не знали, що робити. Бо одного дня риба ловилася, а були дні, коли витягали пусті сіті. Отоді-то взялися за це математики. Проаналізувавши результати лову біля цього берега за багато років, вони визначили, що на три невдачі припадає один успіх. Тобто: три рази слід ловити біля цього берега, а на четвертий — в іншому місці. Коли ж саме ловити тут, а коли десь — вирішує випадковість.

Посеред пшеничного поля екскурсанти побачили групи людей, які вижинали в різних місцях невеличкі квадратні ділянки. Всі здогадались: це не жнивування, а тільки визначення майбутнього врожаю. Тепер не було потреби вдаватися в деталі, і екскурсовод побіжно пояснив, як агрономи визначають середній врожай з гектара пшениці, якщо з квадратного метра вибіркових ділянок збирали в середньому 300 г зерна.

Без знання законів випадковостей ми не змогли б як слід засівати поля,— сказав екскурсовод.

— Можна подумати, що наші діди й прадіди вивчали теорію ймовірностей,— хмикнув Незнайко.— А якось же сіяли і врожаї збирали?

— Сіяти-то сіяли, тільки надто часто без хліба були.

— А як тут допомагає наука? — поцікавився Олег.

— Вчені розрахували певні норми висіву зерна на один гектар поля для різних культур і в такий спосіб забезпечують найкращий урожай. Не кожна висіяна в землю зернина проростає. От і виходить, що в залежності від проценту проростання потрібно висівати не точно встановлену норму, а дещо більше. Наприклад, якщо з 55 зернин при апробації проросло 50, а норма висіву 200 кг на 1 гектар, то легко здогадатися, що потрібно висівати не 200 кг, а трохи більше...

Автобус наближався до великої ріки. Ще здалеку було чути однотонний шум води.

— Води цієї ріки — сказав екскурсовод,— виробляють електричний струм, який живить фабрики й заводи, водить електропоїзди.

— Тут теж не обходиться без науки про випадкове? — запитав Віктор.

— Закони випадкового допомагали споруджувати гідроелектростанцію. А тепер без них ми не зуміли б найкращим чином розподіляти енергію. Та про це довго розповідати. Я тільки зверну вашу увагу на своєрідний пам'ятник недовір'ю до теорії ймовірностей. Пам'ятник цей не зводили спеціально... Ось ми до нього наближаємось.

Автобус проїхав по греблі гідроелектростанції. Дорога звернула ліворуч, і всі побачили на березі величезне звалище залізобетонних пірамід.

— Оце і є пам'ятник недовір'ю до законів випадкового! — пояснив екскурсовод.— Для перекриття русла ріки вчені на основі законів теорії імовірностей розрахували потрібну кількість таких пірамід. Будівельники ж не наважилися у такій відповідальній справі довіритись науці про випадкове. І пірамід виготовили більше... Тепер лишок так і лежить тут своєрідним пам'ятником отій недовірі.

Та ось обабіч дороги знову потяглися пшеничні поля. За ними виднілися корпуси якогось заводу.

— Ми наближаємося до столиці нашого автомобілебудування,— сказав екскурсовод.— Тут ви побачите, як народжуються найсучасніші красені наших доріг, автомобілі завтрашнього дня.

Усіх вразила дивовижна злагодженість роботи численних цехів і служб величезного підприємства. За командами електронних обчислювальних машин (ЕОМ) з центрального пульта керування тисячами струмочків пливли до головного конвейєра деталі й вузли майбутніх автомобілів. На очах вони швидко набирали витончених форм легкових машин.

— А коли на якомусь складі не вистачить деталі — гаєчки чи прокладки,— тоді весь цей велетень зупиниться? — запитав у головного інженера заводу Віктор.

— В принципі — так. Але такого не може бути. ЕОМ тримає в пам'яті, скільки таких деталей і матеріалів потрібно на машину. Вона ж слідкує, як виконується графік постачання заводу усім необхідним. І якби раптом сталося порушення цього графіка, якби хоч однієї деталі десь не вистачило, ЕОМ одразу ж повідомила б про це директора, мене і начальника відділу постачання.

У кінці головного конвейєра нова машина легко зійшла на землю. До неї підійшов шофер, завів мотор і від'їхав на майданчик технічного контролю. Тут автомобіль триматиме екзамен на якість.

— А буває, що якусь машину бракують? — запитав Віктор.

— У нас працюють два конвейєри, з яких сходять однакові машини. Перший дає 70 процентів продукції, другий 30. З кожних 100 машин першого конвейєра 83 йдуть вищим сортом, решта — першим. А з 100 машин другого конвейєра лише 63 йдуть вищим сортом. Ось на тій площадці стоять машини з обох конвейєрів. Серед них — машини вищого і першого сорту. Тут теж виникають задачі, які доступні й вам. Наприклад, ви підходите до будь-якої машини. Яка ймовірність, що це буде машина вищого сорту?

Олег з Ігорем щось обчислили в блокноті і подали головному інженерові результат.

— Молодці,— похвалив він і пояснив усім їхні розрахунки.— А тепер на прощання ще одна задача. Ви підійшли до машини, і вона виявилася вищого сорту. Яка ймовірність, що вона зійшла з другого конвейєра?

Хлопці знову перші назвали шукану ймовірність. Вона виявилася рівною приблизно 0,245.

Головний інженер ще раз похвалив хлопців і вручив їм мініатюрні моделі машин на згадку про успішне розв'язання задач на обчислення ймовірності. Задачі для хлопців були справді нові, адже елементи теорії імовірностей вивчаються лише на факультативних заняттях у дев'ятих і десятих класах.

У місто повернулися пізно. Всю дорогу ділилися враженнями від побаченого в цій дивній, так добре організованій країні.

Життя її уявлялося величезною системою рівнянь з безліччю невідомих.

Складною виявилася алгебра життя світу випадковостей. Все ж коли придивитися, можна побачити, як вона розкладається на простіші задачі, розв'язання яких перетворює невідомі змінні в надійних помічників.

Коли вже піднялися в повітря, хтось запропонував: чи не зробити ще одну випадкову зміну маршруту літака і в такий спосіб завітати до випадково вибраних сусідів світу випадковостей. Випадок, якого дехто ще недавно боявся, тепер притягував до себе незвіданістю. Іксовці заперечили проти такої пропозиції. У них кінчався термін відрядження, а хто знає, які заявки за час їхньої відсутності надійшли в Іксовію.

ТІЛЬКИ ДЛЯ КМІТЛИВИХ І ДОПИТЛИВИХ

1. Яка ймовірність дістати: а) непофарбований кубик; б) кубик з однією пофарбованою гранню; в) з двома пофарбованими гранями; г) з трьома пофарбованими гранями; д) з чотирма пофарбованими гранями?

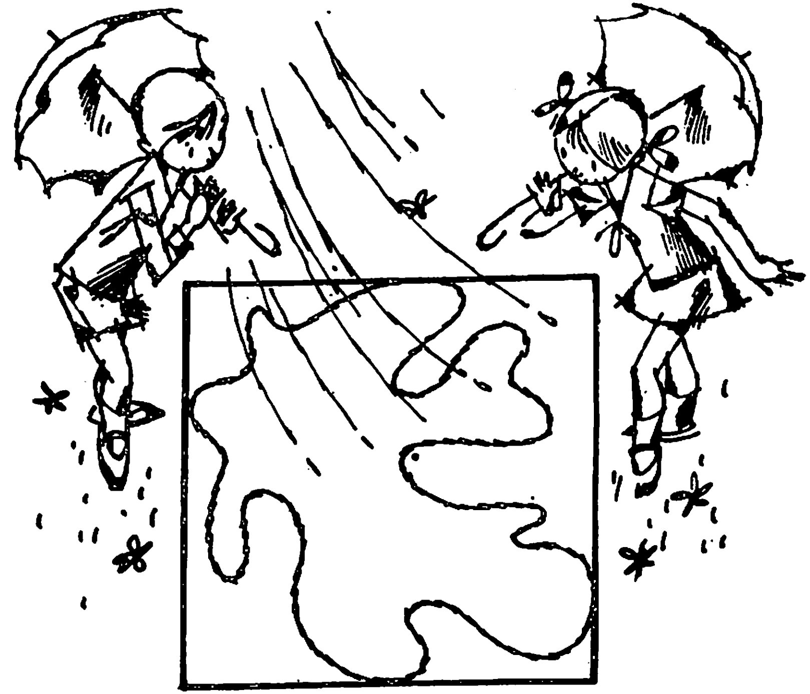
2. Як рибоводи встановили, скільки приблизно в озері риби, придатної для вилову?

3. Скільки в середньому збирають пшениці з одного гектара поля, якщо з одного квадратного метра вибіркових ділянок збирали в середньому 300 г зерна?

4. Скільки треба висівати зерна, коли з 55 зерен проростають 50, а норма висіву 200 кг на один гектар?

5. Яку відповідь одержали хлопці на першу задачу головного інженера автозаводу?

6. Як хлопці розв'язали другу задачу?



ПОВЕРНЕННЯ

Передчуття не підвели іксовців. У чергового по Іксовії вже втретє збиралася нарада, щоб вирішити, кого відрядити в Координатію. Там починалися великі іригаційні й будівельні роботи. У зв'язку з цим виникла необхідність обчислити площі численних ділянок найрізноманітніших і найзаплутаніших форм.

Навіть спеціалісти по Координатії розводили

руками і не знали, з якого боку взятися до таких задач. Зрештою, запросили на консультацію Інтеграла. Про нього давно ходили легенди, як про неперевершеного обчислювача площ, об'ємів, мас, швидкостей, прискорень та інших величин.

Довго думав Інтеграл над схемами ділянок, площі яких треба було знати координатівцям. Нарешті сказав, що для нього такі задачі посильні, але вимагають чималої підготовчої роботи.

Він порадив звернутися до спеціалістів із світу випадковостей. Виявляється, вони розробили особливий метод — Монте-Карло, за допомогою якого можна обчислювати площі фігур найскладніших форм.

Інтеграл навіть популярно пояснив суть цього методу. Якщо потрібно, скажімо, обчислити площу якої-небудь фігури, наприклад, такої, яку показано на рисунку, то насамперед її вписують у квадрат, площу якого приймають за одиницю.

— Винесемо наш листок на дощ,— пояснював далі Інтеграл. — Усю площу листка рівномірно вкривають краплини дощу. Тепер підрахуємо, скільки краплин впало на площу квадрата і скільки на площу нашої фігури. Гадаю, що вам зрозуміло, як наближено визначити площу нашої фігури. Адже відношення площі квадрата до площі нашої ділянки наближено дорівнює відношенню кількостей крапель дощу, які впали відповідно на квадрат і ділянку, площу якої обчислюємо.

— Оце так математика! — вигукнув Віктор. — Дощ обчислює площу фігури, з якою не знав би, що робити, сам Піфагор...

— Піфагор і справді не знав би, а Архімед, хоча й наближено, обчислив би, — пояснив Інтеграл.

— Але ж він не знав методу Монте-Карло?

— Архімед робив це ще простіше. Вирізав з однорідного листа якогось матеріалу, наприклад, м'якого металу, квадрат і вписану в нього фігуру, площу якої належало обчислити. Потім зважував кожну з них — і задача розв'язана. Здогадалися як?

— Геніально!.. Як усе, що робив Архімед.

— А я не все розумію, — мовив Олег. — При чому тут терези, коли треба визначити площу?

— Якщо я правильно зрозумів шановного Інтеграла, то площі квадрата і вписаної в нього фігури відносяться, як маси їхніх моделей? — відказав Віктор.

— Саме так. Ще досконалішими способами Архімед часто визначав площі фігур, обмежених деякими кривими лініями. Щоправда, згодом він математично доводив, що одержані значення шуканих величин є незаперечними.

Метод Монте-Карло викликав багато заперечень. Не чекати ж обчислювачам, доки зіпсується погода, щоб потім виставляти креслення під дощ і рахувати краплини. До того ж їх не так легко порахувати —краплини розпливаються, падають одна на одну, та й висихають швидко.

Інтеграл і не думав, що його можуть так зрозуміти. Тому був змушений давати присутнім додаткові пояснення.

— Дощ мені став у пригоді лише для пояснення суті методу. На практиці все робиться надійніше. Краплю можна замінити точкою Координатії, яка знаходиться в центрі цієї краплини. А від точки легко перейти і до пари чисел — її координат. Сучасна ж ЕОМ за кілька секунд може видати нам мільйон пар випадково вибраних чисел, тобто точок з одиничного квадрата. Вона ж визначить, яка з них попадає на квадрат, а яка і в межі нашої фігури. Набравши достатню кількість таких пар чисел або, як для нашої задачі, — точок, ЕОМ дасть готову відповідь, зазначивши навіть точність одержаного результату.

Метод Монте-Карло виявився найдоцільнішим у розв'язанні задач координатівців. Було вирішено, що Інтеграл очолить бригаду, яка виконуватиме замовлення. Наші хлопці хотіли й собі вирушити до Координатії. Але Ікс-нульовий рішуче заперечив.

— З такими задачами ви ще познайомитесь, — сказав він. — До того ж вам час повертатися додому. А потім, ви маєте он скільки задач. Розв'язання їх — не що інше, як продовження наших подорожей.

— Але ми так мало бачили...

— Це вам тільки так здається. А побачили й узнали ви багато.

— От якби хоч ще одна мандрівка...

Інтеграл та іксовці засміялися.

— На такі мандрівки життя не вистачить, — сказав Інтеграл і, піднявшись, подав Вікторові руку.— До зустрічі! Певен, що вона відбудеться незабаром.

— До зустрічі!— відповіли хлопці. І з їхніх облич було видно, що прощалися вони неохоче.

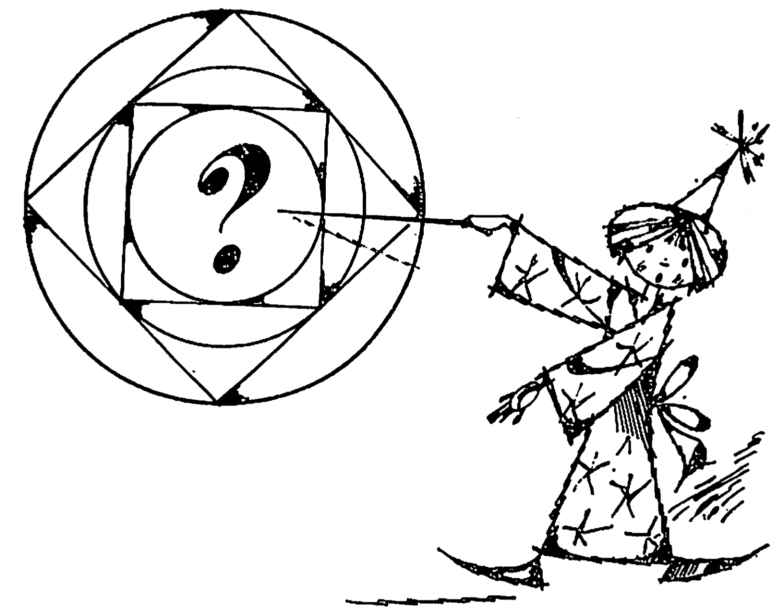
Коли виходили з вертольота на тому ж стадіоні, була ніч. Місяць висівав над селищем срібні промені. Правда, точно ніхто не міг сказати: чи то ніч була, а чи ранок.

— Може, все оте приснилося нам? — мовив Олег, коли у високості вщух рокіт мотора.

— Ще нікому не щастило виносити зі сну матеріальні речі. А в нас — моделі машин небаченої конструкції, книжки, — заперечив Ігор.

— Ну й буде ж що розповісти Іванові Федоровичу! — радів Віктор.

— Знайшов кого дивувати,— заперечив Олег.— Певен, що й він колись бував у таких мандрах...



Після від'їзду хлопців Інтеграл зі своєю бригадою відбув у Координатію.

Зет і Ігрек-нульовий розмовляли між собою, чи впораються хлопці з задачами.

— Треба було б якось допомогти їм, — бідкався Зет.

— А навіщо зайва опіка?— заперчив Ігрек-нульовий.— Навіть Архімед посилав своїм знайомим задачі без розв'язків, аби не позбавляти тих радості самим знаходити їх.

Та, Зета це не переконало. Адресатами Архімеда були вчені, а не такі, що роблять перші кроки в математиці. Тому мало дати задачі. Треба дати й ключі хоча б до деяких з них.

Зетові ключі і вказівки до розв'язування деяких задач

НА ВАХТІ — ІКСИ

1. Нехай потрібно розмістити $m+n$ предметів так, щоб, рахуючи від якогось предмета, відкидати (чи вибирати) p-й предмет. Розмістимо на площині в ряд $m+n$ точок. Від позначеної точки почнемо лічбу і закреслюватимемо кожну p-ту точку, доки не закреслимо, наприклад, m точок. Тоді n точок, які залишилися, і будуть потрібними нам точками.

Позначимо ящик шоколаду через $Ш$, тюк тютюну — через $Т$. Ікси порадили капітанові розмістити в круг ящики і тюки так, як показано на рисунку (див. с. 289).

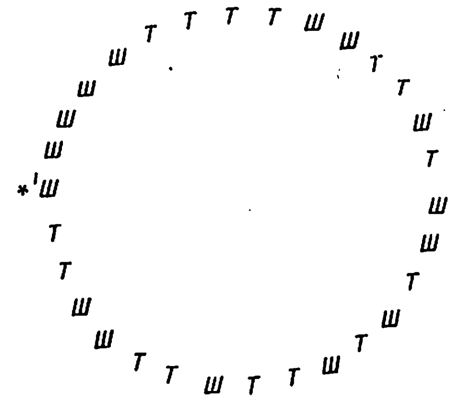
Лічбу треба починати від ящика шоколаду, позначеного зірочкою, і вести за годинниковою стрілкою.

2. Катер повернеться через $1\frac{1}{2}$ години після того, як капітан «Урагану» дав запит.

6. Умова задачі приводить до рівняння:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

Діофант жив 84 роки.



НЕВИДИМКИ В ЦИФРОГРАДІ

1. Корінь рівняння, яке розв'язував Незнайко, дорівнює 5, тому $x-5=0$. Отже, Незнайко ділив на нуль.

2, 3, 4 — при «доведеннях» Верхоглядько і Нуль допускали ділення на нуль.

НЕПРОСТІ СПРАВИ ПРОСТИХ ЦИФРОГРАДЦІВ

1. $a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$ $=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2+2a)\cdot(a^2+2-2a)$.

Оскільки $a>1$, то $a^2+2+2a\neq 1$ і $a^2+2-2a=$ $=(a-1)^2+1\neq 1$, тобто a^4+4 є складеним.

3. $1+3=4=2^2$. Отже, для суми двох непарних чисел наше твердження є правильним. Припустимо, що воно правильне для суми k непарних чисел. Тобто $1+3+5+$ $+\ldots+(2k-1)=k^2$. Тоді сума $k+1$ непарних чисел дорівнює $k^2+2k+1=(k+1)^2$. Отже, твердження є спра-

ведливим для суми довільного числа послідовних непарних чисел.

4. Якщо $a^2 - b^2 = 1$, то одержуємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

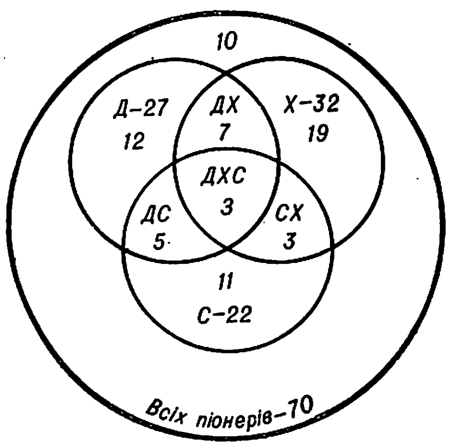
Звідки $a = 1$; $b = 0$.

5. $n(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=(n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n+1)^2$.

ВСЕ ПОЧИНАЛОСЯ З МНОЖИН

1. На першому будинку: $11 = (12 + 15) - 16$. Отже, на фронтоні іншого будинку має бути записане число $8 + 10 - 7 = 11$.

2. Число на першому салоні дорівнює сумі чисел на колесах. Тому на другому вагоні має бути записане число: $2+2+3+3=10$.



3. Всі чорні риби дивляться вправо, а білі — по черзі вліво і вправо. Тому на вільному місці має лежати перша пара.

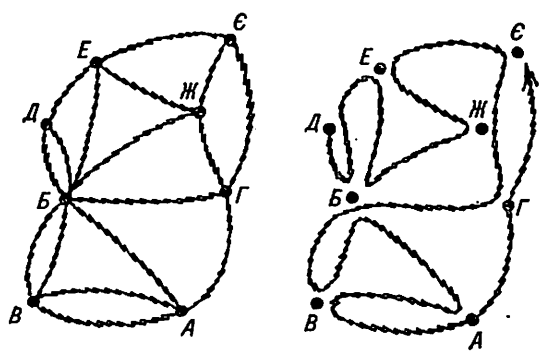
4. Зайва — шоста рибка. Всі інші можна сумістити одну з однією шляхом переміщення.

5. Позначимо множину спортсменів через *С*, хористів — *Х*, драмгуртківців — *Д*, драмгуртківців-хористів — *ДХ*, драмгуртківців, які захоплюються спортом і співають у хорі,— *ДХС*. Тоді за допомогою кругів Ейлера легко визначити, що: 10 учнів не співають у хорі, не захоплюються спортом і не відвідують занять драмгуртка, 11 захоплюються лише спортом.

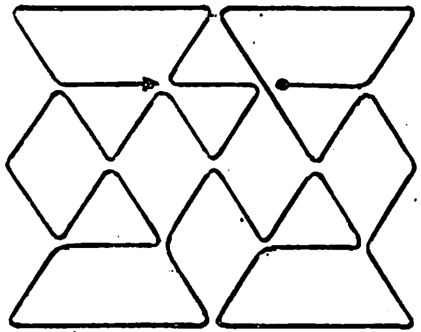
6. Число на хвості літака дорівнює потроєній різниці чисел на крилах. На хвості третього літака має бути записане число 18.

ДОРОГИ УНІКУРСАЛІЇ

1. Непарні вузли *Д* і *Є*. Маршрут починається в *Д* і закінчується в *Є*. Відповіді знаходимо на рисунках.

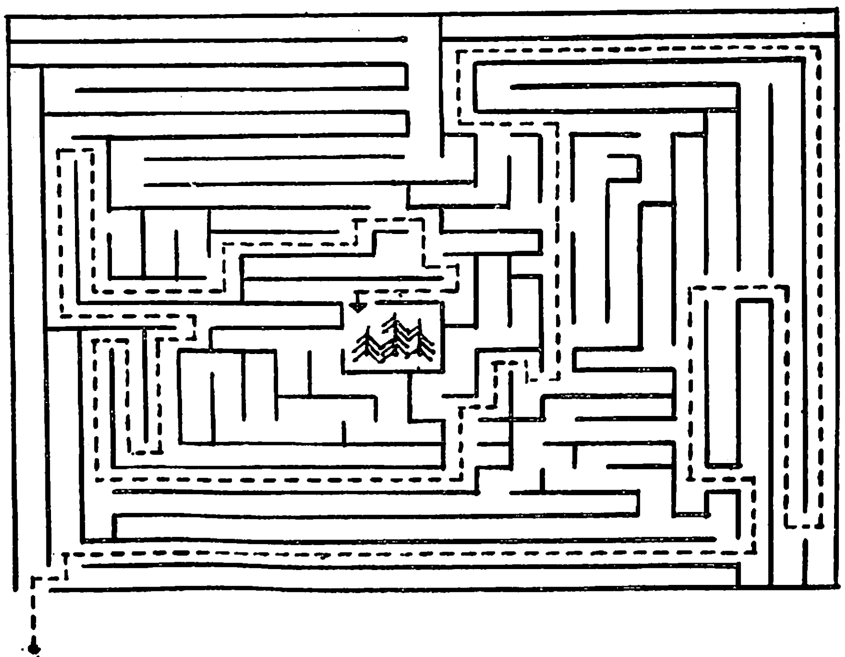


2.



3. У закритому конверті чотири непарні вузли, у відкритому — два.

4. Подорожні зайшли до їдальні таким шляхом:

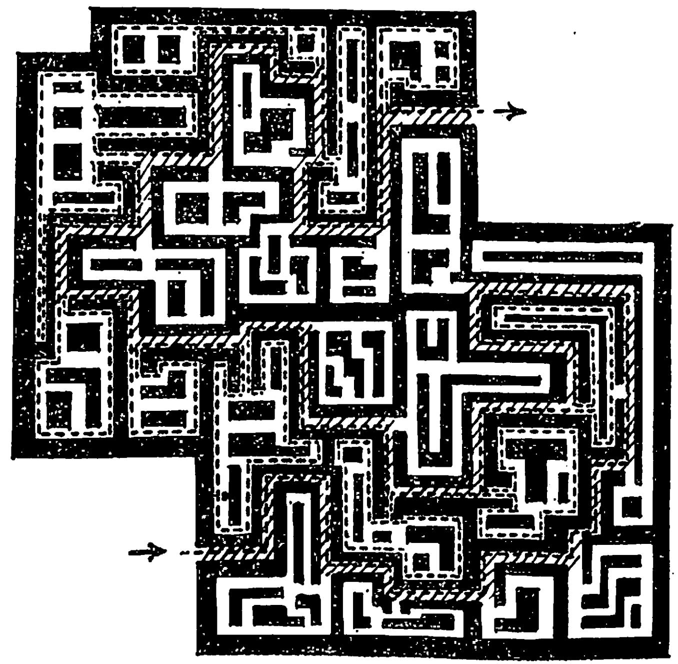


5. У верхній 8 непарних вершин, у нижній — лише дві: A і B.

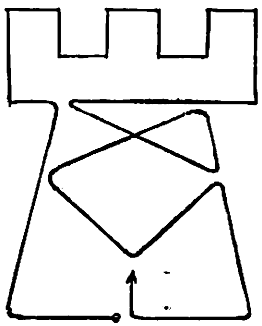
6. Том Сойєр.

7. Не можна провести до кожного будинку газ, воду і електроенергію так, щоб жодна лінія не перетинала якоїсь іншої.

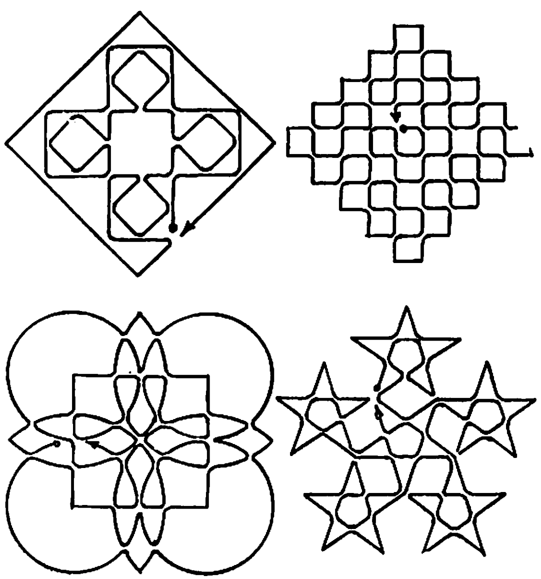
8. Щоб виключити випадковість, полонений весь час мав, ідучи, торкатися правою рукою стіни справа (або лівою рукою стіни — зліва). Цей шлях полоненого показаний пунктиром на рисунку. Найкоротший шлях заштриховано.



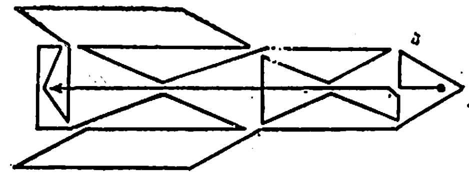
9.



11. Задачі з вікторини розв'язуються так:

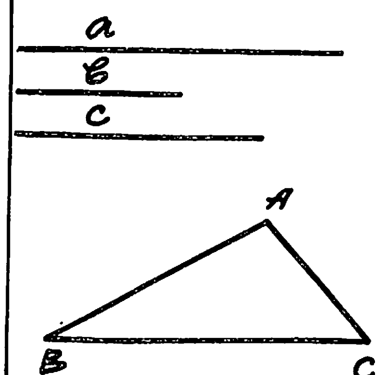


12. Розв'язок ракетодромної задачі такий:

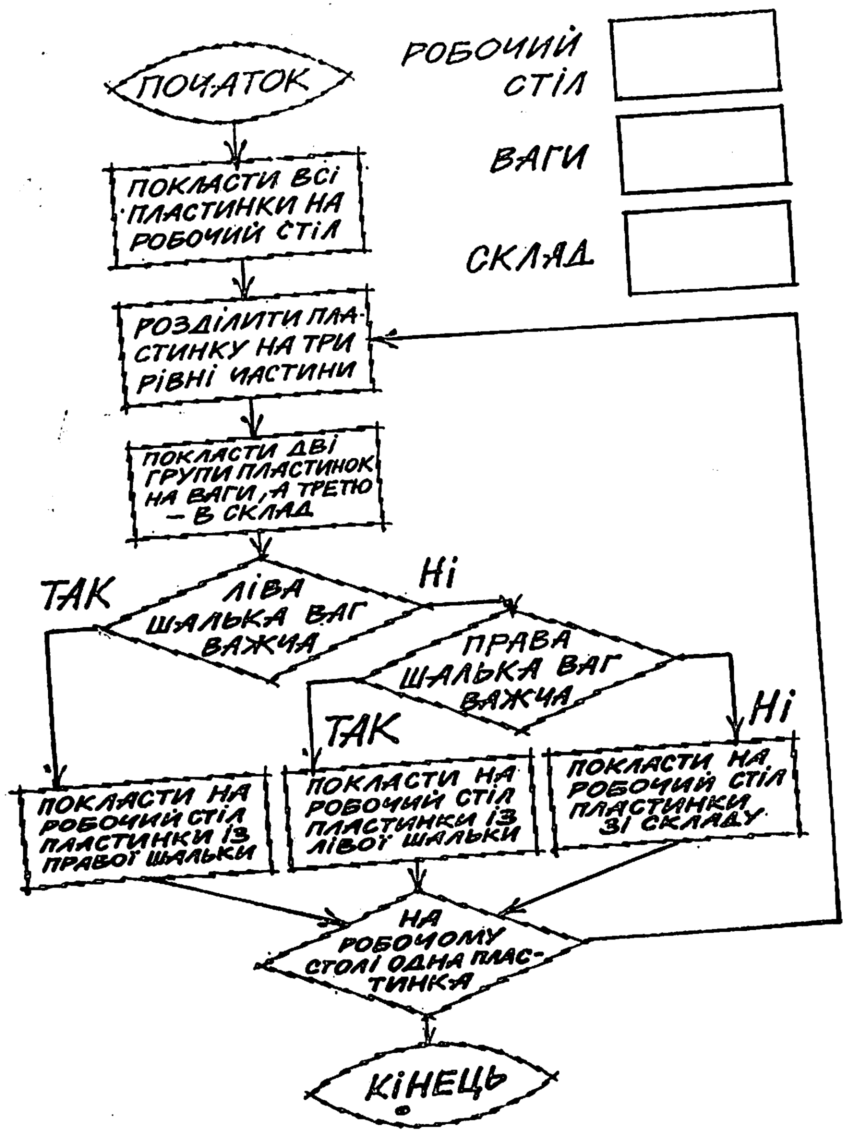


КІБЕРТОНСЬКІ СЮРПРИЗИ

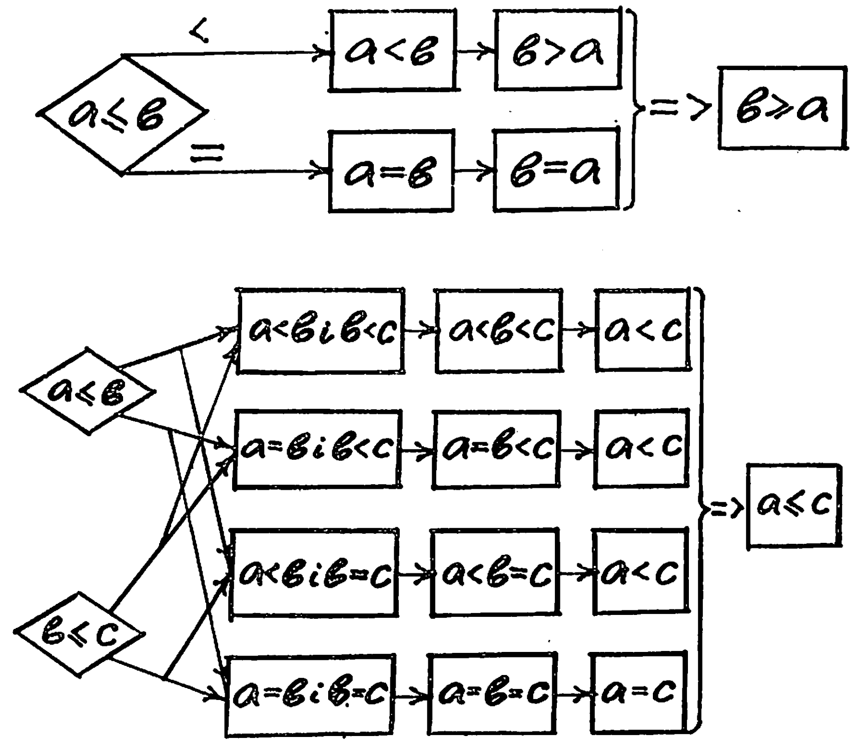
1.

Дано: а, в, с		
Задача: побудувати △ ABC за: а, в, с		
Креслення	№ п/п	Опис операцій
	1	Побудувати BC ≅ а
	2	Побудувати коло (B, с)
	3	Побудувати коло (C, в)
	4	Побудувати A A = коло (B, с) ∩ коло (C, в)
	5	Побудувати AB
	6	Побудувати AC
	7	△ ABC — шуканий трикутник
	8	Кінець

2.



3.



4. Програми для обчислення мають бути такими:

а) 1) Ввід 0→«30»

2) Ввід 1→«31»

3) Ввід 1976→«32»

4) «32»+«31»→«29»

5) «29»×«32»→«28»

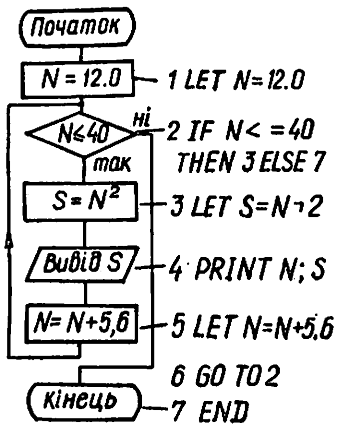
6) «28»+«30»→«30»

7) «32»—«31»→«32»
8) «32»>0→4)
9) Вивід «30».

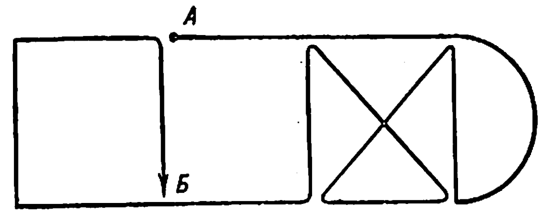
в) 1) Ввід 1→«21»
2) Ввід 49→«22»
3) Ввід 10→«23»
4) Ввід 2→«24»
5) «21»×«21»→«31»
6) «22»+«24»→«22»
7) «22»×«31»→«31»
8) «23»—«21»→«23»
9) «23»>0→6)
10) Вивід «31».

5. (2×x — 5)/(3+x); A∧3 — B∧(—3);
A×x+B+0.3;
(A×x∧2+B×x+c)/(D — 2.5);
(A∧B)∧C; A∧(B∧C); B+A∧0.5.

6.



7. Гості відвідали школу № 171.
9. Треба починати креслити від точок *А* або *Б*.



10. Перше запитання: «Твій номер більший чи менший від 2313?» Якщо відповідь «більший», тоді друге запитання — «Більший чи менший від 3472?» і т. д. Всього досить поставити 11 запитань.

11. Щоб відгадати задумане число, треба усно додати перші числа перших рядків усіх таблиць, у яких воно записане. Одержана сума й буде відповіддю. Секрет будови таблиць заснований на особливостях запису чисел у двійковій системі числення. Оскільки найбільше з чисел, яке є в таблицях Бакабона, $63 = 111111_2$, будемо всі числа записувати, як шестицифрові, таким чином:

$1 = 000001_2$
$2 = 000010_2$
$3 = 000011_2$
$4 = 000100_2$
$5 = 000101_2$
...
$63 = 111111_2$

Запишемо числа в таблиці під картками Бакабона в такий спосіб:

Номер картки	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
			...			
63	1	1	1	1	1	1

У цьому весь секрет карток Бакабона. 1 записана лише в картці № 6, 2 — в № 5, 3 — в № 5 і № 6, 4 — в № 4, 5 — в № 4 і № 6, ... 63 — в усіх шести картках.

НА ПЕРЕХРЕСТЯХ КООРДИНАТІЇ

1. Якщо $x>0$ — правіше точка $(2x; 0)$, якщо $x<0$ — правіше точка $(x; 0)$.

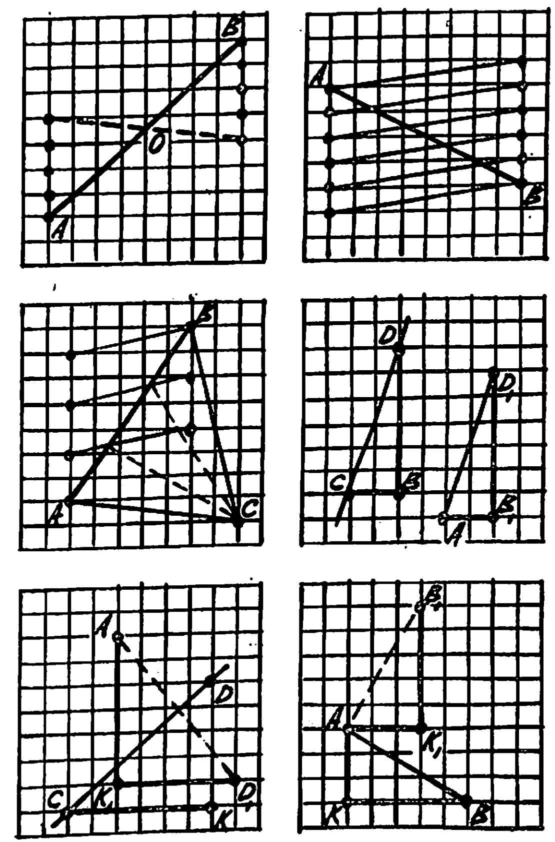
3. Перша 16 коп., друга — 12 коп. На 25 %.

4. У записі (8.0.0) на першому місці глечик на 8 склянок, на другому — на 5 склянок, на третьому — на 3 склянки. Ми записали, що перший повний, а два останні порожні. Розлити молоко можна таким чином, як на стор. 197.

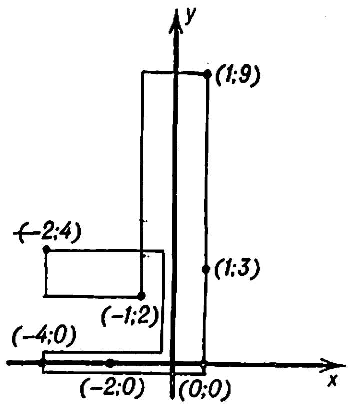
5. Іксовці довели, що коли місткість двох посудин має спільний дільник, то ніякими переливаннями не вдасться точно відміряти таку кількість води, яка не ділиться націло на цей дільник.

Якщо найбільший спільній дільник місткостей посудин m, то можна відміряти довільне число, кратне m, води, аби тільки вона вміщувалася в посудинах.

9.



10. Маршрут мандрівників по Координатії, його довжина дорівнює 3,6 км.



ІКСОВЦІ НА КАНІКУЛАХ

1. Опівдні у вазі не залишилося жодного числа. Будь-яке натуральне число n було взяте з вази за $\frac{1}{n}$ хвилини до полудня.

2. При нескінченному подвоєнні числа ланок ламаної, змінна довжина її не наближатиметься до довжини гіпотенузи.

3. Коли король віддав наказ збільшити територію країни, вона займала площу, рівну половині планети, тобто — кордоном її був екватор. Тому збільшення території країни і приводило до скорочення протяжності її кордонів. Коли на охороні кордонів стояли 5 тисяч солдат на відстані півкварти (тобто 2 км) один від одного, цей кордон проходив по екватору планети — великому колу кулі. Довжина кола дорівнює $2\pi|r|$, $2\pi|r|=2\cdot5000$; $|r|=5000:3,14\approx1591$ км. Діаметр планети Менімало дорівнює 3182 км, приблизно такий, як у Місяця.

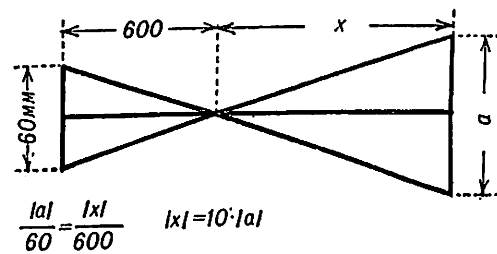
4. Позначимо радіус Землі через R. Тоді ноги Небрехи пройшли шлях $2\pi R$. А голова $2\pi(R+1,89)$. Різниця становить: $2\pi(R+1,89)-2\pi R=2\cdot3,14\cdot1,89\approx11,9$ м.

5. Гроші правильно поділив колекціонер туристських казанків.

6. $|AD|:|AC|=|DE|:|CB|$. Ширина річки наближено дорівнює 91 м.

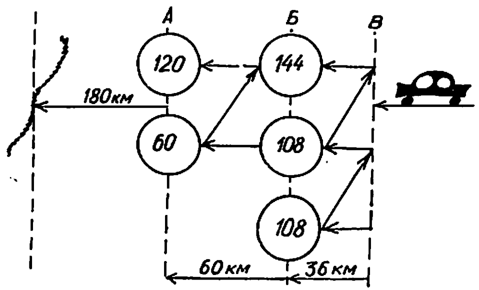
7. Затуливши праве око, Ікс-нульовий почекав, поки палець перекрив Небреху. Потім він відкрив праве і затулив ліве око. Небреха ніби «перемістився» назад на $|a|$ м. Ікс-нульовий підрахував, скільки кроків зробив капітан, доки знову не заховався за пальцем.

Кількість кроків, помножена на 10, і дала шукану відстань.



В УЧНЯ ГЕО МЕТРА

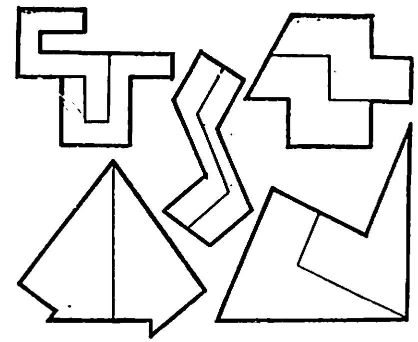
1. Іксовці влаштували проміжні склади пального. Останній проміжний склад *А* був на відстані 180 км від кінця пустелі. Щоб доставити в *А* 180 л пального, машина мала зробити не менше двох рейсів з попередньої бази *Б*. Першого разу машина виїхала з *Б* із повним баком і повернулася в *Б* з порожнім. Заправившись, вона виїхала в *А*, там дозаправилася і вже рухалася до кінця пустелі. Щоб завезти в *Б* 180 л пального, машина тричі проїхала *АВ* і витратила на це одну повну заправку. Тому $|AB| = 180:3 = 60$ км.



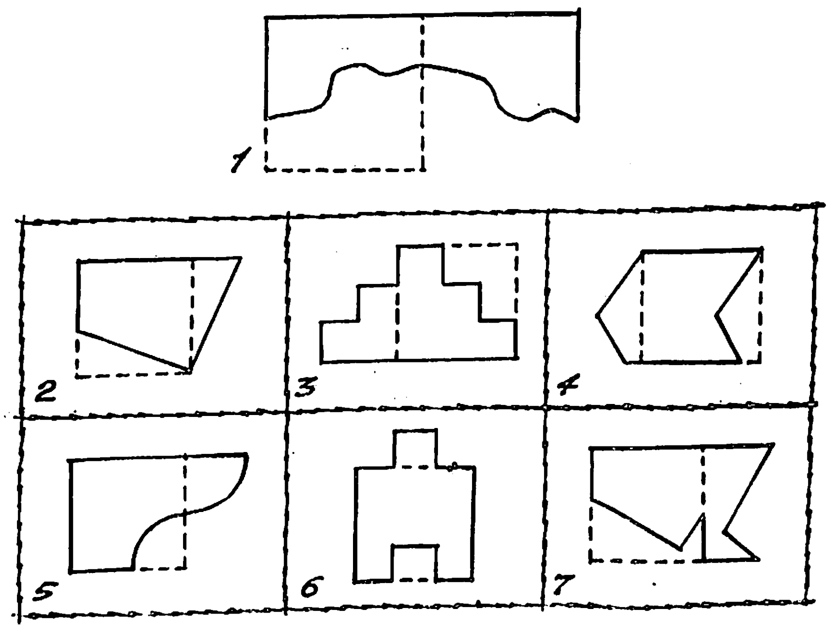
На склад *Б* з попереднього *В* мало бути завезено 360 л. Якщо рахувати, що на доставку його між *Б* і *В* знову витратили 180 л, то для цього потрібно було б зробити 5 рейсів. Отже, $|БВ| = 180:5 = 36$ км. Відстані між проміжними складами утворюють послідовність: 180 км, 60 км, 36 км, 25,714 км (180 : 7)...8,571 км. На всю дорогу було витрачено 2151,2 л пального.

2. Інверсний поділив фігури так:

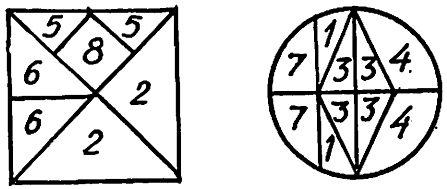
а)



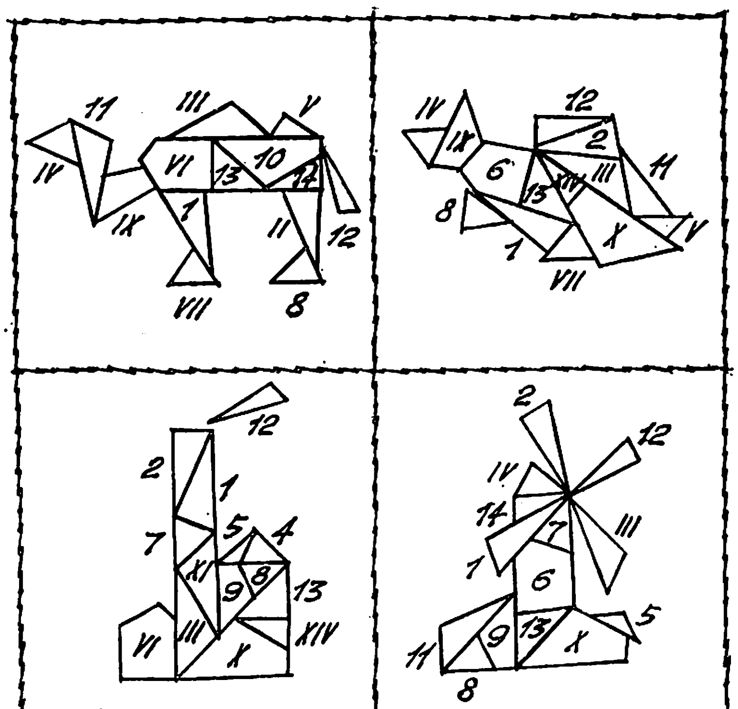
б)



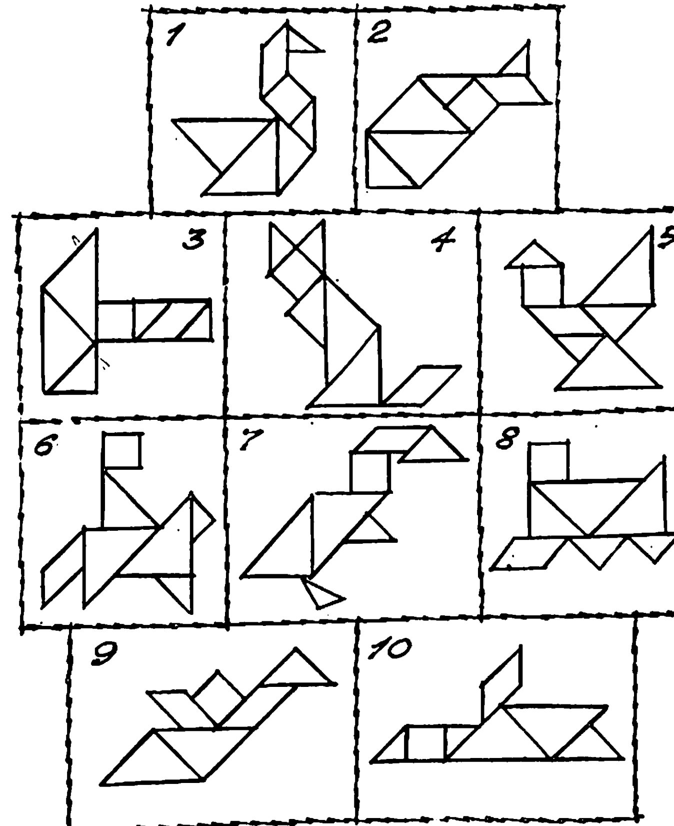
3. а)



б)

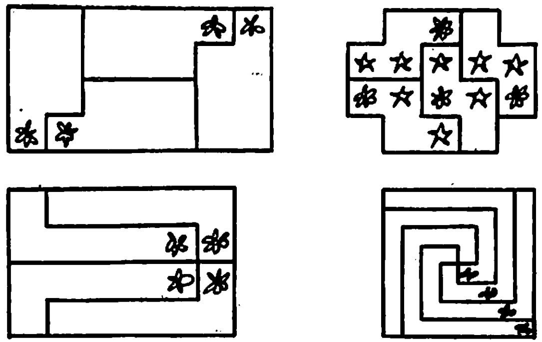


в)



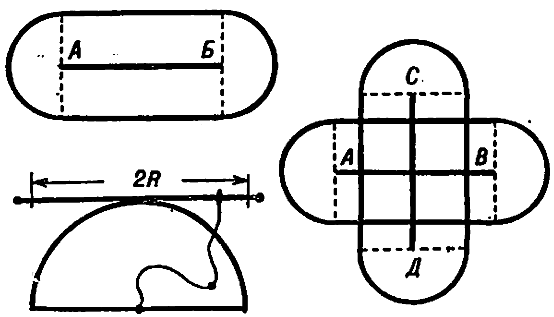
4. За три хвилини.

5. Отак розрізали торти:



6. 186859+96959=283 818; 305×124=37 820.

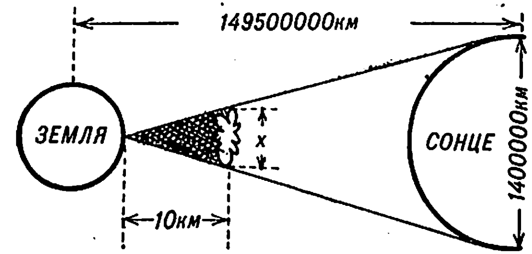
7. Корова на пасовиську:



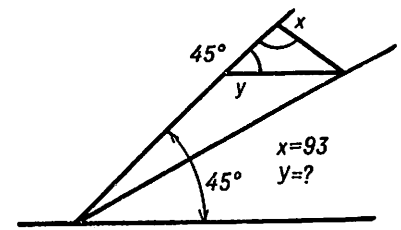
8. При складанні частин перекроєної плитки шоколаду частини не пристають одна до одної щільно. Між ними утворюються щілини, площа яких і дорівнює площі двох дольок, які «утворилися» в результаті перекроювання.

9. 20 корів.

10. Якщо розглядати випадок, коли тінь від хмари на землю не падає, то, позначивши через x ширину хмари, можна скласти пропорцію $\frac{10}{149\,500\,000}=\frac{x}{1\,400\,000}$, звідки $x \approx 0{,}093$ км = 93 м.



Визначивши приблизно кут, під яким падають на землю промені, Ігрек-нульовий встановив довжину хмари з таких залежностей, як показано на другому рисунку.



В КРАЮ БИЛИННИХ ГЕРОЇВ

2. «Що скаже твій товариш про ці двері?»

3. Позначимо вільнодумців, які мали вагу в 76, 66 і 36 кг відповідно через A, B, C. Втечу їм запропонували здійснити в такий спосіб:

I корзина	II корзина
з брилою — вниз	порожня — вгору
з брилою — вгору	із C — вниз
з брилою — вниз	порожня — вгору
із C і брилою — вгору	з B — вниз

з брилою — вниз	порожня — вгору
із C — вниз	з брилою — вгору
з B і C — вгору	з A і брилою — вниз
із C — вниз	з брилою — вгору
порожня — вгору	з брилою — вниз
з B — вниз	з C і брилою — вгору
порожня — вгору	з брилою — вниз
з C — вниз	з брилою — вгору.

5. Наближаючись до берега, Івасик-Телесик мусить плисти так, щоб центр озера знаходився між ним і Бабою-Ягою на одній прямій. Якщо, рухаючись таким чином, Телесик віддалиться від центра на 0,25 радіуса озера, то має далі рухатися по радіусу. Тоді Івасикові лишиться пропливти $0{,}75|r|$, а Бабі-Язі пролетіти $\pi|r| = 3{,}14|r|$.

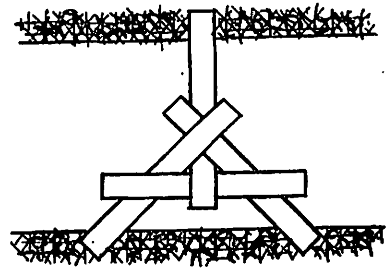
6. Радник міркував так: «Коли б на мені була біла шапка, то один з моїх суперників легко визначив би, що на ньому самому чорна. Коли б на ньому була біла, то третій з нас, бачачи дві білі шапки, відразу відгадав би, що на ньому чорна. Але оскільки вони обоє мовчать, то на мені чорна шапка».

7. Припустимо, що такий поділ можливий. Назвемо одну з частин першою. Пройдемо по її границі і занумеруємо решту частин в тому порядку, в якому вони будуть зустрічатися: 2-га, 3-тя, 4-та, 5-та. Пройдемо тепер по такому замкненому маршруту: з 1-ї в 2-гу, потім прямо в 4-ту (бо в них є спільна границя), потім знову в 1-шу. Цей замкнений маршрут ділить площину на дві області. При цьому 3-тя лежить в одній, а 5-та — в другій. Отже, 3-тя і 5-та не можуть мати спільної границі.

8. Змія Горинича подолав Добриня Нікітич. Богатир міг відтяти голови в такому порядку: $1000-21\cdot47\to13-1\to\to12+10\to22-21\to1-1\to0$.

9. Пройти половину відстані від дуба до сосни, повернути наліво під прямим кутом і пройти ще таку відстань. У кінцевій точці другого відрізка і закопано скарб.

10. Дід Омелько спорудив місток у такий спосіб, як показано на рисунку.



У СВІТІ ВИПАДКОВОСТЕЙ

1. г) 0,004; д) 0.

2. Нехай придатних для вилову риб було x. Тоді відношення помічених риб до кількості всіх риб: $100:x$. В результаті другого вилову маємо число помічених до числа виловлених: $2:200$. Припустивши, що помічені риби рівномірно розмістилися, принаймні в даному районі озера, одержимо рівність: $100:x=2:200$. Звідки $x=10\,000$.

4. На 100 випущених машин 70 зійшли з першого конвейєра і 30 — з другого. З них вищого сорту $70\cdot0{,}83+30\times\times0{,}63=77$. Отже ймовірність підійти до машини вищого сорту дорівнює: $77:100=0{,}77$.

ЗМІСТ

Научно-популярное издание

Конфорович Андрей Григорьевич
Сорока Николай Алексеевич

ДОРОГАМИ УНИКУРСАЛИИ

Математические путешествия

(На украинском языке)

Для среднего школьного возраста

Художник
Желудев Юрий Ефимович

Издание третье, дополненное

Киев «Вэсэлка»

Редактор Л. С. Каткова
Художній редактор Є. О. Ільницький
Технічний редактор С. І. Павлюк
Коректори І. Ю. Павлоцька, Н. В. Зубанюк

ИБ № 4911

Здано на виробництво 28.08.87. Підписано до друку 28.01.88. Формат 70×108/32. Папір друкарський №1. Гарнітура літературна. Друк високий. Умовн. друк арк. 13.65. Умовн. фарб.-відб. 13,869. Обл.-вид. арк. 11,35. Тираж 50000 пр. Зам. 837. Ціна 70 к.

Ордена Дружби народів видавництво «Веселка», 252655, Київ МСП, Мельникова, 63.

Білоцерківська книжкова фабрика. 256400, Біла Церква-400, К. Маркса,4.