N
S
Ньютон
Лондон
Берлін
Париж
Лейбніц
Декарт
Віет
Мадрид
Рим
Кардано
Елея
Стагіра
Стамбул
Афіни
Мілет
Перга
Фалес
Сіракузи
Кнід
Архімед
Піфагор
Кірена
Діофант
Александрія

А. Г. КОНФОРОВИЧ

КОЛУМБИ МАТЕМАТИКИ

КИЇВ „РАДЯНСЬКА ШКОЛА" 1982

22.1 г
К 65

Оформлення та малюнки художника
П. А. Крисаченка

КОНФОРОВИЧ А. Г. Колумбы математики.– К.: Рад. школа, 1982.–223 с., ил. – 50 к. 80 000 экз. 4802020000.

Книга повествует о жизни и творчестве наиболее выдающихся математиков со времен Древней Греции до начала XVIII столетия, когда была завершена работа по созданию одного из наиболее глубоких и важных для практики разделов математики — анализа бесконечно малых.

За это время математика прошла большой путь от добытых полуэмпирическим путем правил решения отдельных задач до создания теорий, ставших мощным орудием познания законов окружающей действительности.

Краткие эпилоги и справки о современниках эпохи, о математиках, которым не посвящены отдельные очерки, помогут читателям понять преемственность математических идей, усмотреть глубокие связи в творчестве ученых различных времен и народов.

Книга предназначается учащимся старших классов, учащимся ПТУ и средних специальных учебных заведений. Будет полезна организаторам внеклассной работы и всем, кто интересуется математикой.

Рукопис рецензували: кафедра математики Бердянського педагогічного інституту та вчитель математики заочної СШ з м. Ананьєва *Ю. М. Больсен.*

К $\frac{4802020000-242}{М210(04)-82}$ 361 82

ПЕРЕДМОВА

Математика — одна з найдревніших наук. Перші математичні уявлення і поняття людина формувала в глибокій давнині, розв'язуючи найпростіші задачі практичного характеру. Ускладнювалися форми трудової діяльності, і перед людиною поставали складніші задачі, для розв'язування яких вона формувала нові математичні поняття, створювала математичні теорії. Отже, математика розвивалася під впливом двох головних стимулів: потреб практичної діяльності людини і логіки розвитку самої математики.

В епоху науково-технічної революції, наголосив у Звітній доповіді ЦК КПРС XXVI з'їздові партії Генеральний секретар ЦК КПРС товариш Л. І. Брежнєв, наука, і зокрема математика, стала важливим рушієм розвитку переважної більшості теоретичних і практичних галузей знань.

За періодизацією видатного радянського математика академіка А. М. Колмогорова математика пройшла чотири основні періоди розвитку.

1. Зародження математики — від глибокої давнини до VI—V ст. до н. е., тобто до того часу, коли математика стає самостійною галуззю теоретичного знання зі своїм власним предметом і методом.

2. Елементарна математика — від VI—V ст. до н. е. до кінця XVI ст. У цей час формувалися основні теорії, що стосуються математики сталих величин.

У надрах математики сталих величин зароджувалися і розвивалися ідеї, які на кінець XVI ст. привели до створення передумов відкриття аналітичної геометрії і аналізу нескінченно малих — двох основних дисциплін класичної вищої математики. Вони вивчають вже не стани, а закономірності змінних величин. Багатство і різноманітність цих ідей, їх діалектичну суперечливість і зв'язок з реальним світом прекрасно передає «Меланхолія» видатного живописця німецького Відродження Альбрехта Дюрера (1471—1528), відтворена на обкладинці цієї книжки.

3. Створення математики змінних величин — кінець XVI — середина XIX ст. На початку цього періоду французький учений Р. Декарт створює аналітичну геометрію, а англійський учений І. Ньютон і німецький учений Г. Лейбніц — аналіз нескінченно малих. За невеликий проміжок часу до середини XIX ст. у математиці склалися майже всі математичні теорії, які нині називають класичними основами сучасної вищої математики.

4. Сучасна математика характеризується швидким зростанням об'єму просторових форм і кількісних відношень. У зв'язку з цим розширилася сфера застосування математики, виникло багато нових математичних теорій, які привели до створення електронних обчислювальних машин. Останні стали потужним знаряддям дослідження глибинних закономірностей природи і розв'язування найскладніших задач у різних галузях практичної діяльності людини.

Перший період історії математики безіменний, хоча математику завжди творили люди. Саме завдяки героїчним зусиллям тисяч і тисяч першопрохідців математичного пошуку зароджувалися і формувалися найпростіші математичні уявлення і поняття. Але імена перших колумбів математики загубилися. Тому ми починатимемо з біографій перших відомих математиків другого періоду історії математики і розповідатимемо про найвидатніших її діячів до початку створення математики змінних величин включно.

У кожний період історії науки видатні математики є першовідкривачами невідомих раніше теорем, розв'язків задач, за якими часто відкривалися нові горизонти науки. Учені, про життя і діяльність яких розповідається в цій книжці, мають найбільше право називатися колумбами математики. Про їхні прізвища ми дізналися з назв теорем, алгоритмів розв'язування задач, математичних теорій, поставлених нових проблем, деякі з них й до нашого часу залишаються нерозв'язаними.

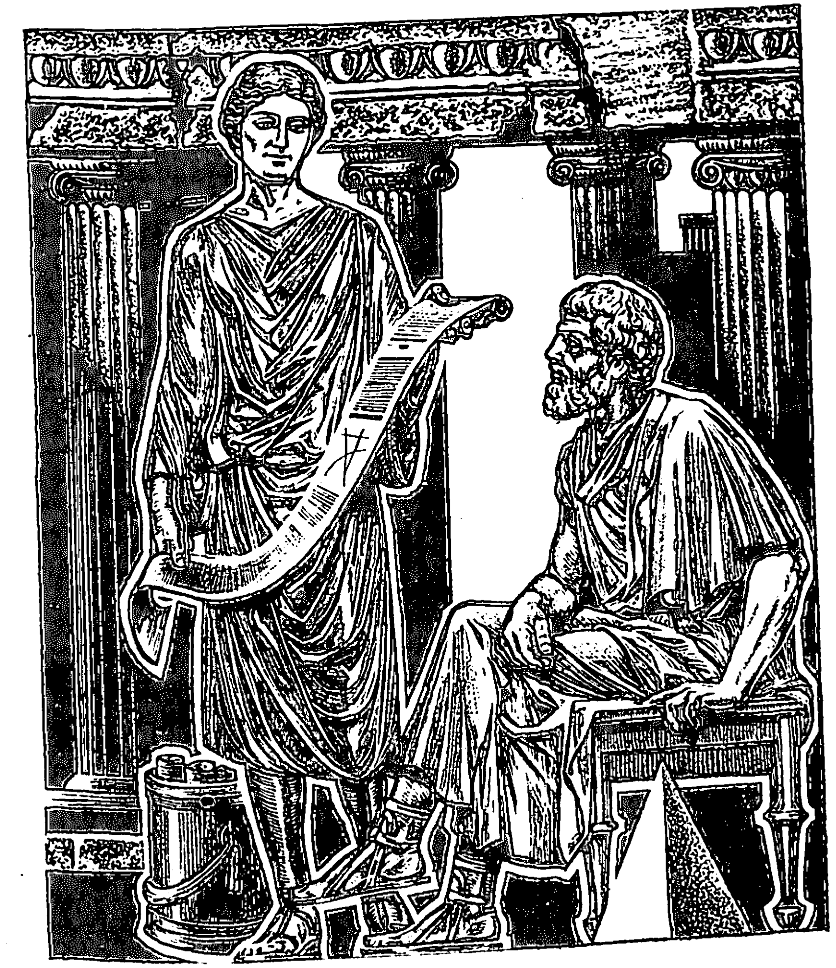
У вчених були різні долі. Одні зажили слави і безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи, поділити трагічну долю цілих народів, які ставали жертвами кривавих воєн і політичних переворотів. Багато визначних математиків стали зразками беззавітної відданості науці, патріотами свого народу. А. Ейнштейн писав, що «...моральні якості видатних людей мають, можливо, більше значення для даного покоління і всього ходу історії, ніж чисто інтелектуальні досягнення. Останні залежать від величі характеру значно більшою мірою, ніж прийнято вважати». (Див.: Э й н ш т е й н А. Физика и реальность. М., 1965, с. 116.)

Звичайно, поза нашою увагою залишилося ще багато імен, історичних подій і фактів, бо пропонований твір не довідник, а тільки книжка для позакласного читання. Однак ми подаємо короткі довідки про інших визначних учених відповідних епох, а в коротких епілогах підсумовуємо головні здобутки епохи.

Можливо, шлях у далекі моря та океани не обов'язково починається з власних кораблів, але шлях у математику завжди починається власними, самостійно розв'язаними задачами. Тому біографію кожного математика ми закінчуємо невеликою добіркою задач з його праць або пов'язаних з його ім'ям. Розв'язування їх — невід'ємна частина роботи майбутніх читачів.

Список літератури допоможе допитливим читачам продовжити подорож неспокійними шляхами математичного пошуку вчених різних епох, ознайомитися з їхнім життям.

ГРЕКИ ВІДКРИВАЮТЬ НОВУ ЕПОХУ



ФАЛЕС МІЛЕТСЬКИЙ

(бл. 625—547 до н. е.)

Учителів він не мав, якщо не враховувати того, що він їздив у Єгипет і жив там у жерців.

ДІОГЕН ЛАЕРТСЬКИЙ

Фалес Мілетський — один із семи великих мудреців, «батько грецької науки», а також один з перших відомих в історії математиків. Він народився і жив в іонійському місті Мілеті на малоазійському узбережжі. Іонія з її м'яким теплим кліматом і родючим грунтом, вигідним географічним положенням на перехресті торгових шляхів з Азії і Африки в Європу в VII—VI ст. до н. е. стала домінуючою країною басейну Егейського моря.

На час життя Фалеса припадають соціальні революції в іонійських полісах. Поліси були невеликими країнами, які складалися з міста — столиці і прилеглих до нього земель. У процесі революційних переворотів політичну владу в рабовласницької родової аристократії забирала заможна олігархія, а іноді й рабовласницька демократія. Ці соціальні зрушення сприяли духовному і культурному розвитку суспільства, одним з виявлень якого була діяльність самого Фалеса Мілетського, родоначальника античної і європейської науки, засновника стихійно-матеріалістичної мілетської натурфілософської школи. Він був виключно обдарованим і різностороннім ученим — займався політикою, технікою, філософією, астрономією, математикою, торгівлею. Фалес, за переказами, був автором творів на природничі і філософські теми, але жодного рядка з них до нас не дійшло.

Офіційних посад учений не займав, хоч прославився як політичний діяч своїми далекоглядними рекомендаціями з питань військової тактики. Як інженер Фалес відомий тим, що за його порадою для форсування річки провели канал, у який тимчасово відвели її русло. Воїни перейшли річку, не замочивши й ніг. Знаменитий давньогрецький історик Геродот (бл. 485—бл. 425 до н. е.) писав у своїй «Історії», що під час битви між лідійцями і мідянами на прикордонній річці Галісі «день перетворився на ніч». Воїни так налякалися, що відмовилися воювати, і ворогуючі сторони помирилися. Сонячне затемнення в тому році завбачив лідійцям Фалес. Сучасні обчислення свідчать, що йдеться про затемнення 28 травня 585 р. до н. е.

Почесне місце займає Фалес в історії філософії. Першоосновою всього він вважав матеріальне начало — воду, а це було справжньою революцією в поглядах на світобудову.

Ім'я Фалеса стоїть першим і в історії математики. За даними більшості джерел родоначальники грецької науки свої наукові знання здобували, подорожуючи в Фінікію, Вавілон, Єгипет. З'ясуємо коротко, які ж математичні знання греки могли вивезти звідти.

Шумеро-вавілонська і єгипетська математика — вершини першого періоду розвитку математичного знання. Два основні математичні тексти Стародавнього Єгипту — папірус Ахмеса (переписаний у XVIII ст. до н. е. з тексту XX—XIX ст. до н. е.) і Московський (переписаний в XVIII—XVI ст. до н. е.) —

містять відповідно 84 і 25 задач і свідчать про великий обсяг математичних знань. Єгипетські переписувачі того часу знали чотири арифметичні дії над натуральними числами і дробами виду $\frac{1}{n}$. Вони розв'язували задачі на арифметичні та геометричні прогресії, пропорційний поділ. Задачі на обчислення «аха» (купи, кількості) були першими задачами абстрактного характеру, з яких пізніше сформувалася алгебра. Чимало задач мають прикладний характер — на обчислення кількості хліба, який можна випекти з даної кількості зерна; кількості робітників, потрібних для виконання певної роботи, продуктів, щоб прогодувати працюючих, та ін.

Площі трикутника, прямокутника і трапеції вони вже обчислювали за точними відомими нам формулами, а площу круга — з точністю, якій відповідає добре наближення для числа $\pi : \pi \approx 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}1605...$. Вершиною єгипетської геометрії є обчислення об'єму правильної зрізаної чотирикутної піраміди за точною формулою $V = (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \frac{h}{3}$, де h — висота піраміди, а S_1 і S_2 — площі верхньої і нижньої її основ. Уже з цього далеко не повного переліку можна зробити висновок, як багато різних математичних алгоритмів розв'язування задач, у тому числі і досить складних, знав або принаймні мав знати єгипетський писець того часу.

Ще більшими були досягнення шумеро-вавілонських математиків. Вони створили хоча ще й не послідовну, шістдесяткову позиційну систему числення, розробили алгоритми виконання чотирьох арифметичних дій над натуральними числами і дробами, записаними в цій системі.

Були виявлені в формі задач найпростіші типові зв'язки між величинами; своєрідною праалгеб-

рою стали створені вавілонянами і єгиптянами деякі загальні методи розв'язування арифметичних задач. З великого числа уявлень і понять людина виділила три центральні поняття: поняття фігури, числа й величини — і сформувала деякі класи геометричних фігур. Вавілоняни впевнено розв'язували квадратні рівняння та їх системи, окремі рівняння вищих степенів, широко використовували теорему Піфагора до розв'язування геометричних задач практичного характеру.

Математична думка пройшла вже величезний шлях і відкрила надзвичайно багато властивостей чисел, закономірностей і відношень різних просторових форм. Це був тривалий період збирання в процесі спостережень і експериментів емпіричного матеріалу. Але математики, як дедуктивної науки з характерними для неї ланцюгами логічно доводжуваних тверджень, створено ще не було.

Приблизно на такому самому рівні були математичні знання і в Стародавній Греції в VIII—VII ст. до н. е. Наприклад, в Єгипті Фалес вразив місцевих землемірів (гарпедонавтів — натягувачів вірьовки) тим, що визначив висоту піраміди не в найпростішому випадку, коли довжина тіні вертикально поставленої віхи дорівнює довжині самої віхи, а в загальному, скориставшись методом встановлення пропорційного відношення між трьома величинами, які можна виміряти, і шуканою величиною — висотою піраміди.

Система лічби була ще не досконалою. Аттична, або геродіанова, непозиційна нумерація була ієрогліфічною. Числа до 4 позначали вертикальними паличками, число 5 — символом Г, 10 — Δ, 100 — Н, 1000 — Х, 10 000 — М.

До греків ні в кого не виникало потреби вимагати доведень справедливості очевидних математичних тверджень. Наприклад, про те, що діаметр ділить коло на дві рівні частини, що вертикальні кути або кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Ніхто не цікавився, чому саме так, а не інакше потрібно розв'язувати задачу.

В єгипетських папірусах розв'язування багатьох задач супроводжується вказівкою «Роби, як робиться, і ти дістанеш правильне». Єгипетським писцям цього було достатньо. Їх задовольняла відповідь на запитання «як?»: як виміряти площу або об'єм певної геометричної фігури; обчислити, скільки потрібно робітників, щоб викопати рів, звести стіну, побудувати дорогу; скільки треба хліба, щоб прогодувати працюючих?

Грецькі вчені пішли далі — вони шукали відповідь на запитання «чому?»

Від вавілонян Фалес міг дізнатися, що площа круга дорівнює $3|r|^2$, єгипетські гарпедонавти стверджували, що вона дорівнює $\left(\frac{8}{9}|d|\right)^2$. Як можна було дізнатися, хто правий? Зрозуміло, лише за допомогою логічно пов'язаної системи міркувань. А оскільки вчені ще тільки вчилися будувати такі доведення, то починати треба було з найпростіших, азбучних істин, у справедливості яких ніхто не сумнівався. Для Фалеса очевидність вже не була доведенням, тому він справедливо заслужив слави родоначальника математики як теоретичної галузі знань з характерним для неї логічним доведенням тверджень — теорем. Від нього починається формування таких основоположних математичних понять, як доведення і теорема. Матеріал, яким скористався Фалес, був відомий і єгипетським гарпедонавтам, і вавілонським чиновникам. Але раніше це було зібрання рецептів, правил, здогадів, емпірично здобутих і ще не підданих логічній обробці. Безсмертна заслуга Фалеса в тому, що він перший

зайнявся логічною організацією цих емпіричних рецептів і тим самим оформив їх у систему математичних фактів. Тому й вважають, що з Фалеса Мілетського єгипетська і вавілонська емпірична математика поступово перетворюється в грецьку дедуктивну науку.

Фалес займався вивченням фігури, яка утвориться, якщо в прямокутнику, вписаному в коло, провести діагоналі. При цьому він переконався, що кут, вписаний у півколо, завжди прямий. Це дало можливість вписувати в коло прямокутні трикутники і доводити теореми про суму внутрішніх кутів трикутника, а також про те, що кути можна додавати так само, як відстані.

Великою заслугою вченого було й те, що він зробив світоглядні висновки з науки і почав перетворювати міфологічні погляди в філософські.

Доведіть теореми, що їх довів Фалес:

1. Вертикальні кути конгруентні.
2. Діаметр ділить круг пополам.
3. Кути при основі рівнобедреного трикутника конгруентні.
4. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно конгруентні стороні й двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники конгруентні.
5. Якщо на одній стороні кута відкласти послідовно кілька конгруентних відрізків і через їх кінці провести паралельні прямі, які перетнуть другу сторону кута, то утворені на ній відрізки конгруентні між собою (відома в науці як *теорема Фалеса*).

ПІФАГОР САМОСЬКИЙ

(бл. 580 — бл. 500 до н. е.)

Суть піфагорійського вчення про світ — математично організований космос. Усе буття для них, починаючи з неорганічної природи і закінчуючи розумом, душею, богами, знаходить своє вираження в числах. Усі тіла математичні...

Г. В. ВОЛКОВ

Легендою і джерелом дискусій Піфагор став ужс в стародавні часи. У 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам'ятник в римському форумі. З тих часів мало прояснилося в біографії Піфагора та в історичній ролі організованого ним союзу, клубу чи ордену піфагорійців. І досі висуваються нові гіпотези, тлумачення щодо діяльності стародавнього мудреця та його послідовників. Його біографія поповнювалася все більшою кількістю деталей, що дало підставу піддати сумніву їх вірогідність. Різні перекази скоріше ознайомлюють нас з легендами про Піфагора, ніж з його біографією і вченням, але ж і легенди зберігають зерна істини.

Перекази про Піфагора дають змогу намалювати правдоподібний образ цієї дивовижної, складної і суперечливої людини. Учень давньогрецького філософа Платона Гераклід Понтійський (IV ст. до н. е.) назвав Піфагора найученішим із сучасників, хоча вважав, що на його геніальності позначилося «недостойне мистецтво» — числова магія. А через 22 століття Карл Маркс шанобливо назвав його «статистиком світобудови».

Народився Піфагор на о. Самосі, біля узбережжя Малої Азії. Його батько Мнесарх із знатного, але збіднілого роду, був каменерізом. Як і інші великі греки, Піфагор здійснив традиційну подорож до Єгипту, де жив близько 22 років і витримав немало випробувань, перш ніж жерці Мемфіса і Діосполіса відкрили йому «дивовижне чергування чисел, хитромудрі правила геометрії, науку про зорі, медицину». До вавілонських магів і халдеїв він потрапив проти своєї волі — як полонений перського царя Камбіза, який завоював на той час Єгипет. Там мандрівник прожив 12 років і вивчив у халдеїв релігійні таїнства та математику. Переказують, що він побував і в Індії, де спілкувався з брахманами, від яких засвоїв не тільки філософію, зокрема вчення про переселення душ, а й секрети вправ для тіла.

Повернувшись у Грецію, Піфагор оселився на півдні італійського півострова в полісі Кротоні. Його появі передували чутки про зроблені ним чудеса, а його виступи перед кротонцями були першими кроками на шляху досягнення моральної і політичної влади.

Незабаром навколо Піфагора згуртувалися однодумці, організувавши аристократичний за духом, таємний релігійно-політичний союз — гетерію. Незабаром і в інших полісах південної Італії та Греції виникли піфагорійські гетерії, в яких поряд з науковими проблемами — математичними, філософськими, етичними — розглядалися релігійні й політичні.

Піфагорійський союз складався з акусматиків і математиків. Перші тільки слухали загальні істини і не бачили самого вчителя. Другі, пройшовши випробування мовчанням, діставали право висловлюватися і засвоювати вчення.

Кілька років випробувань готували до певного способу життя в гетерії, яка була співдружністю

ПІФА
(бл. 5

Суть п
вчення
матем
космос
почин
приро
розум
знахо
в числ
матем

Г. В.

однодумців зі своїм уставом і спільною власністю.

Претендентів стати послідовниками Піфагора перевіряли. Тих, хто додержував пропагованого ним способу життя, чекало вічне блаженство. Райдужне майбутнє обіцяв не тільки Піфагор. У ту епоху існувало багато релігій, пророки яких щедро роздавали міфічні блага своїм послідовникам, правда, завжди в невизначеному майбутньому. Щось від таких пророків було і в Піфагора. Але від усіх інших його відрізняло те, що шлях до вічного блаженства він вбачав у пізнанні гармонії чисел. Йдеться про математику, яка стала складовою частиною його життя і вчення.

Виникнення піфагорійського союзу припало якраз на той час, коли в Елладі продовжувалися соціальні революції. Неможливо однозначно відповісти на запитання: чиї інтереси захищали в цій боротьбі піфагорійці? До багатства вони ставилися негативно й уникали приймати багатих у свої ряди. Піфагор твердив, що дві речі роблять людину схожою на бога: жити на благо суспільства і говорити правду. Отже, піфагорійці не могли бути ідеологами багатих. Проте піфагорійський союз не був однорідним. У ньому були консерватори і радикали. Сам Піфагор найімовірніше належав до консерваторів.

Боротьба, яка точилася в еллінському світі проти панування аристократії, захопила й піфагорійців. Коли ж перемогли консерватори, це викликало обурення народу і визначило результат боротьби. Піфагорійці зазнали поразки. «В Італії, яка називалася тоді Великою Грецією,— писав римський історик Полібій,— в зручний час спалили будинки, де проходили засідання піфагорійців... У тих місцях еллінські міста наповнилися кровопролиттям, розбратом і різного роду безладдям». Рятуючись від небезпеки,

Піфагор переселяється в Метапонт, але тут теж неспокійно, і в одній з нічних сутичок він загинув. Інших піфагорійців спіткала така сама трагічна доля. Деякі джерела свідчать, що спалення будинків і розправи над піфагорійцями були близько 440 р. до н. е., тобто вже після смерті Піфагора. Багато з його послідовників все ж врятувалися, переселившись в різні райони Греції. Політична поразка піфагорійців відіграла позитивну роль в історії грецької науки. Раніше їхнє вчення і відкриття тримали в таємниці. Втративши контрольовану територію і розселившись по всій Греції, вони змушені були заробляти на життя викладанням. А щоб здобути популярність в учнів, дехто, порушуючи дану клятву, розголошував таємниці вже неіснуючого союзу. Традиції піфагорійства виявилися надзвичайно життєздатними. Протягом дев'яти поколінь жили послідовники його ідей. Серед них визначний політичний діяч, математик і астроном Архіт Тарентський (бл. 440—360 до н. е.). У І столітті н. е. піфагорійство відроджується, а окремі ідеї Піфагора знайшли відображення в наступних культурах, аж до наших часів.

Піфагорійське вчення — окремий випадок формування філософії, в якій міфологічні погляди під впливом математики еволюціонували в наукові.

Анархії і беззаконню піфагорійці протиставляли царство законів, справедливість влади богів. Але еллінські боги все більше ототожнювалися з числами і геометричними фігурами, тобто математизувалися. Джерелом усіх законів ставала космічна гармонія, істинна керівниця світу, бо, як проголошувала їхня основна теза, «порядок і симетрія прекрасні і корисні, а безпорядок і асиметрія — потворні та шкідливі». Цей складний процес виразно розкрив визначний учений Стародавньої Греції Арістотель (384—322 до н. е.). Він писав: «...так звані піфагорійці, зайнявшись математикою, перші розвинули її і, оволодівши нею, стали вважати її початками всього існуючого. А оскільки серед цих початків числа від природи є першими, а в числах піфагорійці вбачали (так їм здавалося) багато подібного до того, що існує і виникає,— більше, ніж у вогні, землі та воді (наприклад, така-то властивість чисел є справедливість, а така-то — душа й розум, інша — удача), бо далі вони побачили, що властивості та співвідношення, притаманні гармонії, можна подати в числах; оскільки їм здавалося, що все інше за своєю природою явно уподібнюється числами і що числа — перше в усій природі, то вони припустили, що елементи чисел є елементами всього існуючого і що все небо — це гармонія чисел». Піфагорійці, йдучи шляхом болісних пошуків, які іноді заганяли їх у безвихідь, але частіше розкривали дивовижні числові закономірності, висували сміливі гіпотези, які завоювали право на життя і в сучасній математиці.

Сам Піфагор — постать суперечлива. Він в самому епіцентрі болісного народження філософської думки.

Перекази про те, як Піфагор, зважуючи ковальські молоти, виявив, коли під час ударів вони звучали в консонансі, експерименти з різнонатягнутими струнами, монохордами й іншими музичними інструментами — все це, мабуть, історичні анекдоти, хоча певні фізичні досліди, очевидно, були поставлені. Піфагорійці, безперечно, узагальнювали спостереження за явищами навколишньої дійсності, коли відкривали або й здогадувалися про унікальну роль числа, але цю роль трактували в магічно-міфологічному контексті. Про це свідчать висловлення піфагорійців про числа: «Що божество? Одиниця! Тільки через співвідношення чисел можна пізнати істину. Усі речі — числа», «Де немає числа і міри — там хаос і химери», «Наймудріше — це число», «Числа керують світом». Список афоризмів, багато з яких приписують Піфагорові, можна продовжувати й далі, і є своя логіка в тому, що піфагорійці не зупинилися на тлумаченні чисел, як програмістів усього, що відбувається в світі, а оголосили їх своєрідною праматерією. Останній термін, особливо популярний у наш час, Піфагор використав, щоб наголосити на структурній організованості, упорядкованості, симетричності навколишнього світу.

Такі погляди не відповідали традиціям того часу, і для того, щоб їх пропагувати, потрібна була не тільки фанатична віра, а й мужність. Чудеса, які приписували Піфагорові, були фантастично перемішані з міфами, але з усієї цієї суміші потім з'являється математика і математичне природознавство.

Неможливо відділити те, що належить самому Піфагорові, від того, що зробили його учні, бо всі відкриття приписували йому. Тому, коли ми говоритимемо про Піфагора, слід розуміти, що йдеться про його школу.

Піфагор займає почесне місце в історії математики. Він відкрив нову епоху в еволюції наукової думки. Піфагорійці перетворили давно відомі практичні правила в наукові положення, обгрунтовані точними доведеннями. Піфагор увів загальновизнаний тепер дедуктивний метод, суть якого полягає в тому, що, крім невеликої кількості прийнятих без доведень первісних положень, які називаються аксіомами, всі інші твердження математики виводяться логічними міркуваннями.

Основним змістом піфагорійської математики є вчення про число. Як і вавілонські маги, піфагорійці вважали надзвичайно важливими різні властивості чисел і відношення між ними. І коли відсіяти полову — числову містику, виявиться, що вони ввели багато фундаментальних теоретико-числових понять, виявили і дослідили глибокі властивості чисел і поставили такі питання, які й сьогодні залишаються предметом досліджень багатьох учених і все ще чекають свого розв'язання.

Найважливішою властивістю чисел піфагорійці вважали парність і непарність і першими ввели поняття парного і непарного числа, простого і складеного, розробили теорію подільності на два, дали кілька класифікацій натуральних чисел. Наприклад, розглядали числа трикутні, які є сумами натуральних чисел від 1 до n:

$1, 3, 6, 10, .., \frac{n(n+1)}{2}$; квадратні: $1, 4, 9, ..., n^2$; плоскі: $2, 6, 12, ..., n(n+1)$, п'ятикутні: $\frac{1}{2}n(3n-1)$ і т. д. Одиницю означали як те, з чого складено числа, і не визнавали її числом, але, розміщуючи одиниці у вигляді правильних геометричних фігур, діставали ряди різних фігурних чисел: трикутних, квадратних, прямокутних і т. д. Зображення чисел точками допомогло виявити нові цікаві теоретико-числові властивості й відношення. Наприклад: 1) кожне квадратне число, починаючи з другого, дорівнює сумі двох послідовних трикутних чисел; 2) п'ятикутне число є сумою свого номера в ряді таких чисел, трикутного числа і подвоєного трикутного числа з попереднім номером. Справді, для $n=5$, тобто п'яте п'ятикутне число дорівнює $\frac{1}{2}\cdot 5\times$ $\times(3\cdot 5-1)=35$. Але $35=5+\frac{4(4+1)}{2}+2\frac{4(4+1)}{2}$. Зображення чисел точками унаочнює цю і багато інших числових залежностей, які широко використовували

математики в своїх теоретико-числових пошуках (див. табл. 1). Зрозуміло, що відкриті закономірності слід було потім довести логічними міркуваннями і лише після того вони набували статусу математичного факту.

Піфагорійці вважали унікальними такі числа, в яких сума власних дільників, тобто дільників, менших від самого числа, дорівнює самому числу. Наприклад: $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. Такі числа назвали *досконалими*. Знаменитий старогрецький математик Евклід (III ст. до н. е.) довів, що *коли числа* p і 2^p-1 *прості, то число* $2^{p-1}(2^p-1)$ *досконале*. Формула Евкліда допомогла обчислити ще два досконалих числа 496 і 8128. Дальші пошуки виявилися складнішими. Микола Геразький (I ст. н. е.) писав: «Досконалі числа красиві. Але відомо, що красиві речі рідкісні і нечисленні, а потворних зустрічається багато». У 1971 р. за 40 хвилин роботи потужна ЕОМ знайшла найбільше на той час просте число виду 2^p-1: $2^{19937}-1$, якому відповідало 24-е досконале число: $2^{19936}(2^{19937}-1)$. У 1978 р. ЕОМ вже працювала 440 годин, щоб дійти до наступного простого числа виду 2^p-1: $2^{21701}-1$. Йому відповідає 25-е досконале число: $2^{21700}(2^{21701}-1)$. У 1980 р. за допомогою ЕОМ вдалося обчислити 27-е просте число виду 2^p-1: $2^{44497}-1$. Йому відповідає 27-е досконале число $2^{44496}(2^{44497}-1)$. Ці числа приховують і сьогодні багато загадок. Невідомо, скінченна чи нескінченна їхня множина. Усі відкриті досконалі числа парні. Учені довели, що має бути не менше 10^{36} непарних досконалих чисел, але жодного з них ще не знайшли. Вважають, що навіть найменше з непарних досконалих чисел має бути надзвичайно великим. Постають і інші питання, відповіді на які шукає багато математиків-теоретиків.

Узагальнивши поняття досконалого числа, піфагорійці розглядали *співдружні* числа: пари чисел, кожне з яких дорівнює сумі дільників іншого. Співдружніми є 220 і 284, бо $1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110=284$ і $1+2+4+71+142=220$. Піфагорійці знали тільки цю пару і вважали її символом дружби. Вважалося, що талісмани з числами 220 і 284 сприяють зміцненню любові. Другу пару (17 296, 18 416) відкрив у 1636 р. знаменитий французький математик П'єр Ферма (1601—1665). Його земляк Рене Декарт (1596—1650) обчислив третю пару (9 363 584, 9 437 056). Геніальний Леонард Ейлер (1707—1783) дав список 64 пар співдружніх чисел, хоча, як з'ясувалося пізніше, дві пари потрапили туди випадково. У 1867 р. шістнадцятирічний італієць Ніколо Паганіні (тезка знаменитого скрипаля) здивував математиків повідомленням, що 1184 і 1210 — співдружні числа. Цю найближчу до 220 і 284 пару пропустили всі знамениті математики, які «чаклували» над числами двадцять п'ять століть.

Нині відомо більше як 600 пар співдружніх чисел. І досі вчених турбує багато різних питань: скільки існує співдружніх чисел; у кожній вже обчисленій парі співдружніх чисел обидва числа парні чи непарні; чи існують співдружні числа різної парності? Доведено, що коли m і n становлять таку пару, то кожне з них має бути більшим від 10^{23}, а число $m \cdot n$ повинно мати більше як 20 простих дільників. Багато ще загадок співдружніх чисел чекають на своїх колумбів.

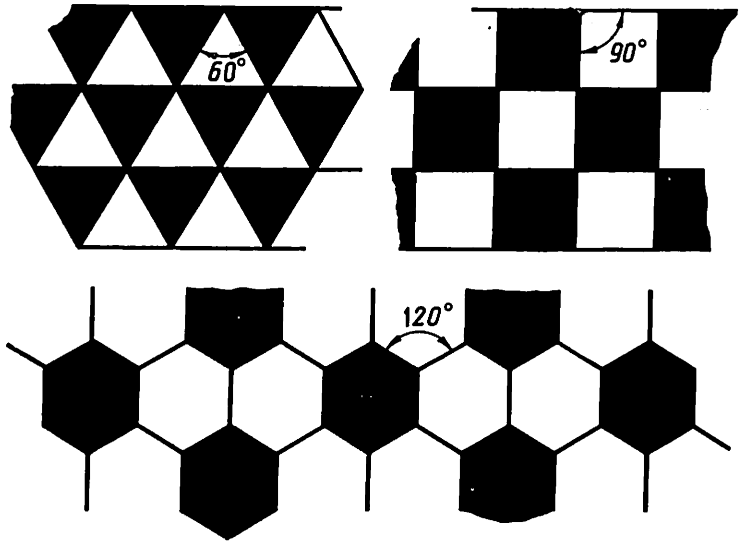
Почувши ім'я Піфагора, ми відразу пригадуємо знамениту теорему: «Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи». Переказують, що на честь такого відкриття Піфагор приніс у жертву бика, навіть гекатомбу — жертву із ста биків. А втім, якщо Піфагор справді був у Вавілонії, він міг довідатися про те, що шумеро-вавілонські математики знали і

використовували під час розв'язування задач теорему, названу пізніше його ім'ям, десь за 1500 років до народження Піфагора. А щодо жертви богам, то Піфагор був непримиренним противником жертвування тварин, особливо великої рогатої худоби, і не зробив би такого вчинку. Присвоєння цій знаменитій теоремі імені Піфагора свідчить про те, якого значення надавали в той час доведенню математичних тверджень.

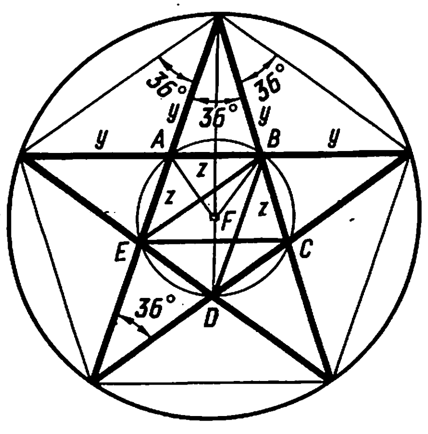
Теорема Піфагора — фундаментальне співвідношення евклідової геометрії, яке в XIX ст. було взято за аналог метрик неевклідових геометрій. Теорема допускає багато красивих доведень, в тому числі і на основі розрізування та перекроювання фігур (див. табл. 2). Американський любитель математики Е. Луміс зібрав і опублікував 367 різних доведень цієї знаменитої теореми, і колекція їх поповнюється й далі.

Піфагорові приписують й інші теореми: про суму внутрішніх кутів трикутника; про те, що площину навколо точки можна заповнити лише трьома видами правильних многокутників: рівносторонніми трикутниками, квадратами і правильними шестикутниками (мал. 1). Можливо, він знав теорему про те, що площі подібних фігур відносяться, як квадрати відповідних сторін, і був обізнаний з трьома правильними многогранниками: тетраедром, кубом і додекаедром. Сторонами додекаедра є правильні п'ятикутники. Якщо в правильному п'ятикутнику провести всі діагоналі, дістанемо піфагорійську зірку, або пентаграму,— улюблену фігуру піфагорійців (мал. 2). Вона була для них священним знаком, символом здоров'я і радості, а також паролем.

Піфагорійська зірка приховує в собі надзвичайно багато цікавих геометричних залежностей, в тому числі й знамените відношення золотого поділу, яке



Мал. 1.



Мал. 2

полягає в тому, щоб одиничний відрізок поділити на частини $|x|$ і $1-|x|$ ($|x|>1-|x|$) так, щоб $1:|x|=|x|:$ $:(1-|x|)$. Величину $|x|$ позначають грецькою літерою τ (тау), $\tau=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618033989...$. Легко довести, що діагоналі BD і EC п'ятикутника $ABCDE$ в точці перетину F діляться в «середньому і крайньому відношеннях», тобто утворюють золотий поділ: $|EF|:|FC|=|BE|:|DC|=\tau$, $|EC|:|AB|=|EC|:|EF|=\tau$.

У школі Піфагора було зроблено відкриття, яке започаткувало нову епоху в історії математики і завдало нищівного удару по піфагорійських поглядах на число. Шукаючи спільну міру між стороною і діагоналлю квадрата, піфагорійці відкрили, що ці відрізки спільної міри не мають, тобто не існує числа, яким би можна було виразити відношення цих відрізків.

Доведення піфагорійцями несумірності сторони і діагоналі квадрата — перше відоме в історії математики доведення «від супротивного» (міркування, при якому виходять з істинності твердження, протилежного доводжуваному, і приходять до суперечності). Наведемо міркування піфагорійців і з'ясуємо суть цієї форми доведення. Якщо сторона і діагональ квадрата сумірні, то існує такий відрізок (ми його візьмемо за одиничний), який відкладається на стороні m раз, а на діагоналі — n раз, де $n, m \in N$. Тоді за теоремою Піфагора

$$m^2+m^2=n^2, \text{ або } 2\,m^2=n^2$$

або

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=2. \qquad (1)$$

Але чи можлива така рівність? Дріб $\frac{n}{m}$, очевидно, нескоротний, тобто $D(n, m)=1$. У загальному випадку це можливо тоді, коли одне з чисел n або m парне, а інше — непарне. Припустимо, що m — парне, тобто має форму $2k$, де $k \in N$, тоді n — непарне. Підставивши в рівність (1) замість m його значення $2k$, дістанемо $2n^2 = (2k)^2$, $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$. Остання рівність показує, що й число n — парне, бо легко довести, що квадрат парного числа є парним числом.

Приходимо до висновку, що числа n і m парні, але це суперечить припущенню, що дріб $\left(\frac{n}{m}\right)$ нескоротний.

Наше тимчасове припущення про те, що сторона і діагональ квадрата мають спільну міру, призвело до хибного наслідку, тому істинним є доводжуване твердження. Про це доведення говорить Арістотель у «Першій аналітиці», його наводить також великий учений античної Греції Евклід у X книзі свого славнозвісного твору «Начала». Тому є достатньо підстав вважати, що його винайшли піфагорійці. Сам же метод доведення «від супротивного» розробив визначний давньогрецький математик Евдокс Кнідський (див. наступний нарис). Це відкриття несумірності приголомшило піфагорійців. Виходило, що число не всесильне, воно може не все, йому не все підкоряється, коли навіть відношення двох відрізків, які легко побудувати, не вдається виразити ніяким числом, точніше ніяким додатним раціональним числом, бо тільки такі числа й знали на той час учені. Не зрозумівши величезного значення відкриття несумірності, вони прагнули будь-що приховати його існування. Гіппас, який, очевидно, належав до радикального крила піфагорійців, розголосив таємницю, за що був підданий найвищій мірі осуду — символічному похованню, бо він ніби вмер для піфагорійців. Існує легенда, що боги покарали порушника, він скоро загинув у морській аварії.

Цей неповний перелік основних досягнень піфагорійської математики свідчить про те, який величезний крок зробила грецька математика за кілька десятиріч від Фалеса до Піфагора.

Досягнення калокагатії — грецького ідеалу людини, який поєднував у собі етичне й естетичне,— було, на думку піфагорійців, неможливе без занять спортом. Закономірно, що вони приділяли йому багато уваги. Сам Піфагор віддав належне здоровому тілу і брав участь у кулачному бою на 58-й Олімпіаді, яка проходила в 548 р. до н. е. Переказують, що через малий зріст Піфагора судді не хотіли допустити його до змагань.

— Можливо,— заперечив Піфагор,— мій вигляд і не викликає у вас довір'я. Але я буду наносити удари з такою математичною точністю, що супротивникові стане жарко. Моя глибока віра в число — це моє життєве кредо.

І він додержав свого слова — став чемпіоном з цього виду спорту і утримував цей титул ще на кількох олімпіадах.

Першим болільником, який, за свідченням літописців, помер на трибуні Олімпійського стадіону, був один із семи живих чудес Стародавнього світу Фалес Мілетський. Філософ, який учив, що все пішло з води і складається з неї, помер від спеки і спраги на олімпіаді, яка стала для Піфагора спортивним тріумфом. Можливо, він помер саме під час бою Піфагора, за якого дуже хвилювався.

Від напівміфічного мудролюба нас відділяють не тільки тисячоліття. І одночасно нам зрозумілі і близькі загадки науки, людського буття, які хвилювали легендарного самосця. Йдучи нехоженими шляхами пізнання, Піфагорові та його учням важко було не помилитися, все ж вони допомогли людству зробити ще один крок до розкриття таємниць природи.

Задачі

1. Сума довільного числа послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці, є точний квадрат.
2. Кожне непарне число, крім одиниці, є різницею двох квадратів.
3. Існує нескінченна множина трійок чисел x, y, $z \in N$, які є розв'язками рівняння $x^2+y^2=z^2$.
4. Сторона і діагональ квадрата несумірні.
5. Знайдено багато найрізноманітніших доведень знаменитої теореми Піфагора. Індійський математик Бхаскара II подав його у формі креслення (див. табл. 2), під яким було написано лише одне слово «Дивись!». Як міркував учений, коли дістав із цього креслення доведення теореми Піфагора?

У південно-західній частині Малої Азії — місті Кніді народився один з найвизначніших учених Стародавньої Греції, математик, астроном, філософ, географ і медик, прекрасний оратор Евдокс Кнідський. Сучасники називали його Eudocsos — знаменитий. Йому було 23 роки, коли він приїхав у Афіни, щоб слухати лекції в Академії Платона, на вході в яку було викарбувано знаменитий вислів: «Нехай не входить сюди не навчений математиці». Тут він розв'язав поставлену Платоном складну астрономічну задачу — створив модель, у якій видимий рух Сонця, Місяця і планет подавався як комбінація рівномірних кругових рухів концентричних сфер, у центрі яких знаходилася Земля. Модель Евдокса знаменувала початок нової ери в історії астрономії та її математичного апарату. Потім була подорож до Єгипту. Евдокс спілкувався з місцевими жерцями, щоб проникнути в здобуті ними в результаті тривалих спостережень закономірності руху небесних світил, таємниці світобудови, числові відношення. Повернувшись, учений заснував у місті Кізікі на березі Мармурового

ЕВДОКС КНІДСЬКИЙ

(бл. 408 — бл. 355 до н. е.)

Слава його поширювалася і за ті закони, які він написав для співгромадян, ... і за його астрономію, і за його геометрію, і за інші вікопомні праці.

ДІОГЕН ЛАЕРТСЬКИЙ

моря школу математиків і астрономів, при якій обладнав одну з кращих для свого часу астрономічну обсерваторію. Тут уперше в Греції вели систематичні астрономічні спостереження, на основі яких було складено перший у Греції зоряний каталог. У 365 р. до н. е. Евдокс удруге, тепер із своїми учнями, відвідав Афіни, де мав тривалі бесіди з Платоном на різні наукові, насамперед філософські, теми.

Авторитет і слава вченого привертали до нього численних учнів, яким він передавав здобуті знання, розробляв разом з ними нові наукові проблеми, виховуючи нових дослідників. Помер він, здобувши заслужені славу й почесті.

Жодна з праць Евдокса не збереглася до наших днів. Тому історикам науки довелося провести велику дослідницьку роботу, щоб з книг інших авторів, побіжних згадок виявити його внесок у скарбницю математичних знань.

На перший погляд може здатися, що математик відкриває і доводить свої теореми незалежно від подій навколишнього світу, його тривог, сподівань і радостей. Біографії більшості математиків, зокрема й Евдокса, переконують нас у тому, що це не так. Щоб зрозуміти стимули математичних пошуків Евдокса, досить хоча б побіжно ознайомитися з обстановкою в грецькій математиці того часу.

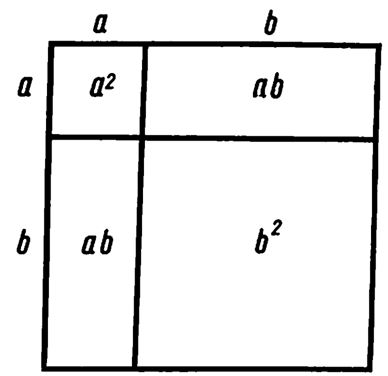
Відкриття несумірності завдало нищівного удару піфагорійській філософії всесилля додатного раціонального числа.

Математики ще жили під гнітом цієї несподіванки, коли філософ Зенон Елейський (бл. 490—бл. 430 до н. е.) сформулював свої 45 апорій (грецьк. ἀπορία — безвихідь), у яких показав суперечливість понять руху, простору і часу, нескінченності і неперервності, а також труднощі вираження руху в логіці понять.

Відкриття несумірних відрізків і апорії Зенона Елейського зумовили першу кризу методологічних основ математики, оскільки показали, що деякі важливі математичні поняття вимагають глибшого вивчення, уточнення, а теоретичні основи всієї математики — перебудови і зміцнення.

Розв'язанню цих проблем, які нині належать до математичного аналізу, і віддав свій математичний геній Евдокс Кнідський, створивши нові теоретичні основи математики — насамперед загальне вчення про відношення, яке в основному збігається з теорією дійсних чисел. Її побудував лише в 1872 р. німецький математик Ріхард Дедекінд (1831—1916). Він відкрив також строгі методи граничних переходів, за допомогою яких вдалося розв'язати багато задач на обчислення площ і об'ємів криволінійних фігур. Це був знаменитий «метод вичерпування». Евдокс також був автором методу доведення, який у XVII ст. назвали «аподиктичним», або «методом зведення до абсурду».

Грецькі математики розробили два шляхи подолання кризи теоретичних основ своєї науки. Демокріт з Абдер (бл. 460—370 до н. е.) пропонував розглядати точки як неподільні атоми, причому в кожному відрізку їх завжди скінченне, хоча й надзвичайно велике число. Тоді площина утворена з прямих, на зразок того, як тканина зіткана з ниток. Геометричні тіла Демокріт уявляв утвореними з паралельних пластинок, товщина кожної з яких дорівнювала атому. У демокрітовій атомістичній математиці всі відрізки сумірні, але в ній виникають нові суперечності. Наприклад, якщо відрізок складається з парного числа точок, то перпендикуляр, проведений до його середини, не матиме спільної точки з таким відрізком, він пройде десь між точками, а відрізок з непарним числом точок неможливо буде поділити на дві конгруентні частини.



Мал. 3

Другим був шлях так званої геометричної алгебри. Оскільки множина геометричних фігур, наприклад відрізків, виявилася потужнішою від множини чисел, теореми і задачі подавали мовою відношень різних геометричних фігур. Наприклад, справедливість формули квадрата суми двох чисел $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ доводили за допомогою креслення (мал. 3). Було розроблено графічні (звичайно, наближені) методи обчислення додатних коренів рівнянь першого степеня і квадратних. Однак методи геометричної алгебри виявилися безсилими перед рівняннями вищих степенів, результати були наближеними і подавалися завжди у формі якихось геометричних фігур.

Греки першими почали оперувати з дробами виду $\frac{m}{n}$, хоча до IV ст. до н. е. ще не було достатньо обгрунтованої теорії введення в науку цих нових математичних об'єктів і теорії операцій з ними. Математика вже вимагала більшого. Потрібна була теорія, яка б вводила операції, застосовані як до раціональних, так і до ірраціональних чисел, бо тільки за допомогою множини дійсних чисел можна обгрунтувати теорію вимірювання різних величин. Дивує вже те, що грецькі вчені розуміли необхідність такої теорії. А Евдокс Кнідський побудував її з такою глибокою і логічною досконалістю, що всю велич його творіння зрозуміли лише математики кінця XIX і навіть по-

чатку XX ст. Коли було розроблено теорію дійсного числа, з'ясувалося, що вона тільки термінологією й окремими деталями відрізняється од теорії відношень Евдокса Кнідського.

На основі системи аксіом учений увів поняття величини у формі відношення натуральних чисел $\frac{m}{n}$, яке охоплювало числа й неперервні величини. Аксіоматика задавала рівність і нерівність та операції над відношеннями. А щоб вилучити з розгляду актуально нескінченно малі й актуально нескінченно великі величини, було введено знамениту аксіому, відому в математиці під назвою аксіоми Архімеда: *Для будь-яких величин a і b $(a>b)$ завжди існує таке число n, що $bn \geqslant a$.* Величини, для яких виконується ця аксіома, називаються *архімедовими*.

В основі «методу вичерпування» Евдокса лежала основна лема: *Якщо дано дві величини a і b $(a>b)$, то, віднімаючи від a більше $\frac{1}{2}a$, від різниці, яку дістали,— більше половини різниці, від другої різниці — більше половини її і т. д., дістанемо через скінченну кількість операцій різницю $a_n \leqslant b$, тобто як завгодно малу величину.*

За допомогою «методу вичерпування» Евдокс строго довів ряд відомих, але не обгрунтованих тоді ще теорем (див. далі задачі 1—3). Його застосовували Евклід і Архімед для обчислення площ, об'ємів і центрів ваги геометричних фігур. Тепер такі задачі розв'язують за допомогою інтегрального числення. Метод Евдокса був скоріше методом доведення відомих фактів, ніж відкриття нових. Разом з тим це було перше вчення про границі. За допомогою цього методу можна було обчислювати границі широкого класу послідовностей.

Теорії Евдокса зміцнили теоретичні основи математики, поклали кінець першій кризі, повернули вченим упевненість у надійності математичних теорій і відкрили шляхи застосування їх до розв'язування складних теоретичних і практичних задач.

Теореми, доведені Евдоксом за допомогою «методу вичерпування»

1. Площі двох кругів відносяться, як квадрати їх діаметрів.

2. Об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ об'єму призми з тими самими основою і висотою.

3. Об'єм конуса дорівнює $\frac{1}{3}$ об'єму циліндра з тими самими основою і висотою.

ЕВКЛІД

(бл.365 — бл.300 до н.е.)

Геометрія Евкліда — це чудо думки, логічна система, висновки якої з такою точністю випливають один з одного, що жодний з них не був підданий якомусь сумніву.

А. ЕЙНШТЕЙН

Ми вступаємо в нову історичну добу — епоху еллінізму. Хронологічними межами її є час від завойовницьких походів Александра Македонського за межами Греції (333—323 до н. е.) до взяття римлянами столиці елліністичної країни Птолемеїв — Александрії (31 до н. е.).

На завойованих Александром Македонським величезних територіях після його смерті утворилися елліністичні країни. У них відбувався своєрідний синтез грецької культури і культур підкорених народів, хоча офіційною мовою науки була грецька.

Головним науковим і культурним центром елліністичного світу стає засноване Александром Македонським у гирлі Нілу місто Александрія, столиця країни Птолемеїв. Тут було засновано Мусейон — Будинок муз, великий науковий центр, де працювали запрошені найвидатніші вчені з багатьох країн світу. При Мусейоні діяла велика бібліотека, яка нараховувала понад 700 000 рукописів з усіх галузей знань.

Серед запрошених був і найвидатніший математик свого часу Евклід. Він заснував у Александрії математичну школу, для слухачів якої і написав свою славнозвісну книгу «Начала».

Великого математика спіткала дивна доля. Написана ним книга затьмарила славу самого автора. До нас дійшли два-три епізоди, можливо історичні анекдоти. Перший малює Евкліда людиною принциповою. Коли цар Птолемей І зажадав короткого шляху для вивчення геометрії, математик відповів: «У геометрії немає царської дороги». (А в Єгипті, як і в інших країнах, справді, існували дороги, їздити по яких мали право тільки цар, вищі сановники і царські кур'єри). Разом з тим, учений був дуже доброзичливим до всіх, хто зробив хоча б якийсь внесок у математику, яку він цінував понад усе. Один з юнаків, вивчивши кілька перших теорем «Начал», запитав у автора: «А що я можу заробити, якщо вивчу все?» Евклід покликав раба і наказав: «Дай йому три оболи, бідолаха хоче заробити грошей своїм навчанням». Уже перший коментатор його книг Прокл Діадох (бл. 410—485) не знав, де і коли народився знаменитий математик, їх розділяло вісім століть. Це все одно, що для нас відстань до автора «Слова о полку Ігоревім».

Евклід був різностороннім ученим. До нас дійшли його твори: «Феномени» присвячений елементарній сферичній астрономії, «Оптика» — теорії перспективи, «Переріз канону» — теорії музики. Це були перші дослідження в галузі математичної фізики. У книжці «Дані» Евклід показав, як задання одних геометричних фігур є одночасно заданням інших. Книгу «Псевдарій» вчений присвятив помилкам у геометричних доведеннях. На жаль, жодного рядка із цього першого збірника математичних софізмів і парадоксів до нас не дійшло.

Безсмертну славу принесли Евкліду «Начала». Ця дивовижна книга пройшла крізь політичні катастрофи і війни 22-х століть, вистояла, вціліла, відіграла виключну роль в історії математики і математичної освіти в усьому світі. Щоб зрозуміти, чому так трапилося, спинимося на ній детальніше.

Спроби викласти головні розділи математики були й до Евкліда. Александрійський математик зробив це настільки досконало, що всі інші твори такого роду було забуто, і жодний з них не зберігся до наших днів.

Евклід осмислив, підсумував і виклав в цільній, логічно пов'язаній системі теорем найвидатніші досягнення грецької математики за трьохсотрічний період її розвитку. Його твір — перший з тих, що дійшли до нас, блискуче реалізований приклад аксіоматичного викладу геометрії. Евкліда вдосконалювали, коментували, пояснювали, але ніхто не насмілювався піддати сумніву правильність його трактування основних положень геометрії в 13-ти книгах його «Начал».

Основу «Начал» становлять означення, постулати й аксіоми. Означення Евкліда — це підсумок багатовікової абстрагуючої діяльності людини. Вони довели свою практичну значущість на численних застосуваннях і тому сприймалися як безпосередньо очевидні. Постулати були основою геометричних алгоритмів, які використовувалися в процесі вивчення геометричних фігур, а аксіоми — недоводжувані твердження — для описування властивостей усіх величин. Вибір аксіом настільки вдалий, що майже всі вони ввійшли в сучасну аксіоматику. Але їх усе одно було недостатньо для дедуктивної побудови геометрії. Евклід не сформулював багато з того, чим користувався далі. Наприклад, у нього немає стереометричних постулатів, аксіом руху. І все ж потрібно врахувати, що перших успіхів у створенні системи аксіом геометрії, які відповідали зростаючим вимогам математичної строгості, було досягнуто лише на кінець XIX ст.

Спираючись на розроблені вихідні основи (поняття, постулати і аксіоми) і використовуючи закони формальної логіки, Евклід логічними міркуваннями доводить 465 тверджень, поданих у «Началах».

«Начала» стали невичерпним джерелом нових математичних досліджень, на які вони надихали покоління математиків різних країн. Евклід з дивовижною глибиною розв'язав багато складних теоретичних і методологічних проблем математики. Достатньо назвати історію знаменитого V постулату про паралельні прямі. Багато математиків понад два тисячоліття намагалися виправити Евкліда. Вірили, що він помилково вніс у число недоводжуваних істин твердження, яке є теоремою, тобто може бути доведене. На пошуки його було витрачено чимало зусиль. Уже в XIX ст. король математиків, як називали сучасники К. Ф. Гаусса, змушений був зізнатися: «І все ж, якщо хочемо говорити чесно й відверто, потрібно сказати, що, по суті, ми не пішли в цьому питанні далі, ніж Евклід, за 2000 років». А хто краще за Гаусса — найвидатнішого вченого свого часу, який багато і настирливо думав над таємницею паралельних прямих і V постулату, міг про це знати! 23 лютого 1826 року геніальний російський математик М. І. Лобачевський (1792—1856) у своєму виступі на засіданні фізико-математичного факультету Казанського університету виголосив доповідь на тему «Стислий виклад принципів геометрії зі строгим доведенням теореми про паралельні прямі», в якій показав, що V постулат логічно не залежить від інших постулатів і аксіом Евкліда і його не можна довести на їх основі. Виявилося, що Евклід не помилився. День виголошення М. І. Лобачевським доповіді відкрив

нову сторінку не тільки в геометрії, а й в усій математиці. Із цього часу відлічують народження першої неевклідової геометрії. З'ясувалося, що евклідова геометрія побудована геніально, але є тільки наближеною математичною моделлю фізичного простору. Геометрія Лобачевського розкрила глибинні, складніші властивості простору, які виявляються на рівні мікросвіту і у велетенських масштабах.

Аксіоматична побудова геометрії справила глибоке враження на мислителів усіх часів. Виявилося, що достатньо зовсім невеликої кількості аксіом, щоб можна було вивести необмежену кількість теорем. При цьому, якщо якимось чином можна було переконатися в істинності аксіом, у чому ніхто фактично й не мав сумніву, то це вже забезпечувало істинність доводжуваних на їх основі теорем. Тому для поколінь учених різних епох і країн аксіоматичний виклад геометрії в «Началах» Евкліда був ідеальним зразком подання наукових теорій. Його наслідував геніальний англійський математик І. Ньютон (1643—1727) у своїй основоположній праці «Математичні начала натуральної філософії». Ця книга не тільки назвою, а й методом свого викладу копіює твір Евкліда. Схеми «Начал» додержував нідерландський філософ-матеріаліст Б. Спіноза (1623—1677), викладаючи систему етики.

Евклід блискуче розв'язав і методичне завдання, адже він писав не науковий трактат, а навчальний посібник для учнів своєї школи, який став посібником для поколінь учнів.

До 1880 р. «Начала» витримали 460 видань і продовжують друкуватися до наших днів. Перші вісім книг «Начал» було надруковано російською мовою в 1739 р., усього твір Евкліда видавався російською мовою 6 раз, хоча всі дореволюційні видання були неповними. Повне видання «Начал» російською мовою з докладними коментарями та історичними довідками вийшло в трьох томах у 1948—1950 рр.

Задачі

1. З усіх паралелограмів, уписаних у даний трикутник, найбільшу площу має той, основа якого дорівнює половині основи трикутника. (Кн. VI, твердження 27).

2. Даний відрізок $|AB|=1$ поділити на такі дві частини $|x|$ і $1-|x|$ $(|x|>1-|x|)$, щоб $1:|x|=|x|:(1-|x|)$, тобто здійснити «золотий поділ» $|AB|$. (Кн. VI, твердження 30).

3. Множина простих чисел нескінченна. (Кн. IX, твердження 20).

4. Якщо числа p і 2^p-1 прості, то число $2^{p-1}(2^p-1)$ дорівнює сумі своїх дільників (відмінних од самого себе), тобто є числом досконалим. (Кн. IX, твердження 36.)

5. Площі двох кругів відносяться, як квадрати їх діаметрів. (Кн. XII, твердження 2.)

АРХІМЕД

(бл. 287—212 до н. е.)

Хто оволодів творіннями Архімеда і Аполлонія, менше дивуватиметься відкриттям найвидатніших людей нашого часу.

Г. ЛЕЙБНІЦ

Найвидатніший учений стародавнього світу, геній усіх віків народився в місті Сіракузах в знатній, але небагатій сім'ї астронома, і мав успадкувати професію батька. Трапилося так, що один з родичів Архімеда, повернувшись в Сіракузи з успішного військового походу на чолі війська, захопив владу і оголосив себе царем. Ставши родичем царя, Архімед дістав можливість продовжувати освіту. Він поїхав у Александрію, де встановив наукові контакти з визначними вченими того часу: астрономом і математиком Кононом Самоським, ученим Ератосфеном Кіренським та іншими, з якими, повернувшись додому, обмінювався науковими працями. Тому багато робіт вченого написано у формі наукових листів.

Перебуваючи в Александрії, Архімед оволодів усім тим, чого досягли на той час математика, астрономія, фізика. Тоді ж Архімед виявив себе як видатний інженер і винахідник. В Єгипті він керував спорудженням дамб і гребель. Відкривши гвинтову лінію, винайшов «архімедів гвинт», або «кохлею»,— механізм, який широко застосовується в найрізноманітніших галузях науки, техніки і в побуті. Гвинтова авіація, гвинтові кораблі, турбіни, різні види шнеків, шнекові преси, гвинтові насоси, вентилятори та багато інших приладів, механізмів і знарядь є нащадками архімедового гвинта.

Скоро ім'я Архімеда стало відомим у багатьох країнах, слава його досягла Сіракуз, де так був потрібний його талант ученого й інженера. Сіракузи переживали тривожні часи. Вони балансували між двома ворогуючими могутніми країнами — Римом і Карфагеном, очікували, щоб стати союзником того, хто переможе в затяжній війні. Архімед, за настійним проханням сіракузького царя Гієрона, повертається в Сіракузи, де понад 25 років віддає науковій та інженерно-винахідницькій роботі, працюючи і головним інженером-теоретиком, і виконавцем широких оборонних робіт. На цей час припадають найзначніші його відкриття.

У жодному із своїх творів і наукових листів Архімед не обмовився про свої інженерні винаходи. Даремно дехто робить із цього висновок, що вчений вважав їх заняттям другорядним, недостойним справжнього вченого. Це зовсім не так. Уся справа в тому, що його діяльність мала життєво важливе значення для країни і була військовою таємницею.

У 215 р. Гієрон помер. А незабаром Сіракузи виступили проти Риму. Щоб приборкати бунтівну державу, в Сіцілію вирушили дві римські армії. Нещадно розправившись з мирним населенням, римляни з суші і моря обложили Сіракузи.

Денний і нічний штурм Сіракуз було відбито з великими втратами для римлян. Цих втрат завдали римлянам машини, виготовлені за проектами і під керівництвом Архімеда. На той час це була небачена зброя. Машини Архімеда засипали ворога камінням,

списами, стрілами, руйнували кораблі і штурмові машини, піднімали в повітря воїнів.

До недавнього часу вважали легендою перекази кількох древніх авторів про те, що за допомогою системи дзеркал Архімед на відстані польоту стріли спалював римські кораблі. Лише останнім часом вчені довели, що «вогонь Архімеда» не легенда, а вірогідний факт. Споруджуючи пам'ятник своєму великому земляку, сіракузці поставили його біля зброї, яка до недавнього часу вважалася легендарною, а в дійсності була в арсеналі сіракузців у ті далекі роки тяжких випробувань.

Лише після тривалої облоги, восени 212 р. до н. е., коли зрадники відкрили одну з віддалених від центру брам, римляни проникли в місто. Взяття римлянами міст, як правило, супроводжувалося страхітливою жорстокістю. Повну міру розгулу завойовників пізнали і підступно захоплені Сіракузи. Однією з жертв цієї жорстокості став і Архімед.

Існує кілька версій загибелі вченого. Розповідають, що він так поринув у доведення якоїсь теореми, що не помітив, коли римляни захопили місто. Солдатові, який заніс над ним меча, лише вигукнув: «Не чіпай моїх креслень!» (З інших переказів — «Розбий голову, але не чіпай моїх креслень!»). Пишуть також, що він просив солдата дати йому час завершити доведення. Таким зображали Архімеда автори проримської орієнтації, прагнучи показати вченого далеким від життя. Та навряд, щоб Архімед залишився байдужим до того, що робиться в місті, обороні якого він віддав свій різносторонній геній. Хоча відданість його науці передано правильно. У мить смертельної небезпеки він залишався вірним собі — захищав, можливо, знайдене щойно розв'язання якоїсь складної задачі, забувши про себе.

У діяльності Архімеда тісно поєднано розв'язання конкретних технічних задач, висунутих суспільними потребами, з глибокими теоретичними узагальненнями, які приводили його до відкриття нових важливих залежностей, прокладання шляхів до формування цілих теорій.

Як інженер учений розв'язував задачі будівельної механіки, що вимагали точного розрахунку ваги важких підвішених тіл, рівноваги важких балок і плит, що спираються на одну або кілька колон. Для кораблебудування він знайшов знамениту умову рівноваги плаваючих тіл, розв'язав важливу для практики задачу спускання корабля на воду та витягання його з води.

Люди з давніх-давен використовували важіль, коловорот, блок та інші прості механічні пристрої. Не знайшовши законів дії цих механізмів, приписували їм магічні властивості. Архімед не поділяв таких поглядів на різні явища природи, властивості чисел та геометричних фігур. Він розумів, що все пояснюється реально існуючими причинами, підпорядкованими певним законам, і питання полягає лише в тому, щоб відкрити ці закони. Такою була методологічна позиція вченого, яка допомогла йому здійснити геніальні відкриття.

Одним з таких відкриттів є закон обернено пропорційної залежності між силою і плечами важеля. Переказують, що, відкривши цей закон, Архімед переможно вигукнув: «Дайте мені точку опори, і я зрушу Землю!» Щоправда, вчені не вірять в істинність цих слів. Архімед був хорошим математиком і знав, якої довжини потрібний був би важіль і на яку відстань треба було б перемістити один його кінець, щоб другим зрушити Землю хоча б на сантиметр.

Закон Архімеда про те, що тіло, занурене в рідину, втрачає в своїй вазі стільки, скільки важить витіснена ним рідина, лежить в основі всієї сучасної гідро- і аеростатики.

І все-таки Архімеда вважають насамперед математиком. Він творив у «золотий вік» геометрії, і вона була головною справою його життя. Провідна ідея математичної творчості Архімеда, яка є безпосереднім продовженням ідей, закладених його попередниками,— це обчислення площ і об'ємів різних фігур. Обчислення площі многокутників звели до обчислення площі квадратів. Не вдалося квадрувати лише круг. Архімед показав, що визначення поверхонь конуса, циліндра і кулі зводиться до знаходження площі круга, а визначення об'єму кулі (та її частин), еліпсоїда, параболоїда і гіперболоїда обертання — до визначення об'єму конуса і циліндра. Отже, елементарними фігурами для Архімеда були квадрат і круг, куб і циліндр. Поверхні й об'єми складніших геометричних фігур він подавав у відношенні до рівновеликих елементарних фігур.

У зрілому віці, коли вченому було близько п'ятдесяти років, він написав найвизначніші із своїх праць, які ввійшли неоціненним надбанням у скарбницю світової наукової думки. Серед них: «Квадратура параболи», «Про кулю і циліндр», «Про спіралі», «Про коноїди і сфероїди», «Вимірювання круга». У цих творах розв'язано багато нових задач на обчислення площ і об'ємів геометричних фігур, знаходження центрів їх ваги. Здобуті при цьому результати мали величезне значення для науки.

Вражає велика кількість доведених автором теорем і розв'язаних задач. Перелічимо хоча б деякі з них.

Архімед двічі повертався до знаменитої задачі квадратури круга. У книжці «Вимірювання круга» він уперше знайшов надзвичайно точне подання довжини кола, площі круга і його частин через радіус.

З основних результатів Архімеда про довжину кола і площу круга назвемо три.

1. *Площа круга дорівнює площі прямокутного трикутника, один катет якого конгруентний радіусу круга, а другий — довжині кола цього круга.*

2. *Площа круга відноситься до площі описаного навколо нього квадрата приблизно, як 11 до 14.*

3. *Відношення довжини кола до діаметра* (в сучасних позначеннях — число π) *знаходиться в межах:* $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. Цей результат учений здобув, обчислюючи периметр правильного 96-кутника, вписаного і описаного навколо одиничного круга. Так зване архімедове наближення числа $\pi\approx\frac{22}{7}$ було найкращим до епохи Пізнього Відродження, а на практиці його застосовують і в наш час. Метод, яким учений розв'язував цю задачу, і сьогодні розглядається в підручниках багатьох країн світу.

Площа сегмента параболи дорівнює $\frac{4}{3}$ *площі вписаного в цей сегмент трикутника.*

Площа поверхні кулі дорівнює збільшеній учетверо площі її великого круга.

Площа кульового сегмента дорівнює площі круга, радіус якого дорівнює відстані од вершини сегмента до його кругової периферії.

Об'єм циліндра відноситься до об'єму вписаної в нього кулі, як 3 до 2, а повна поверхня цього циліндра дорівнює $\frac{3}{2}$ *поверхні вписаної в нього кулі.* (Ці два відкриття Архімед особливо високо цінував; креслення кулі, вписаної в циліндр, він заповів викарбувати на своєму надгробку).

Площа, обмежена першим витком спіралі $\rho=a\varphi$ (тепер ця крива названа ім'ям Архімеда), *дорівнює*

$\frac{1}{3}$ *площі круга, радіус якого конгруентний радіусу-вектору кінця витка спіралі.*

Архімед не просто розв'язував задачі. Він прокладав нові шляхи в математиці. Обчислюючи довжини кривих ліній, площі криволінійних поверхонь, об'єми криволінійних фігур, центри ваги геометричних фігур, завбачив багато для наступного розвитку основних розділів вищої математики — інтегрального та диференціального числення, побудованих через два тисячоліття Кеплером, Кавальєрі, Ферма, Лейбніцом і Ньютоном. Архімед розвинув і поглибив метод вичерпування Евдокса Кнідського. До відкриття інтегрального числення це був єдиний науково обгрунтований метод дослідження граничних процесів. Архімед знайшов метод, який у багатьох випадках давав можливість розв'язати найважчу частину задач на знаходження площ і об'ємів геометричних фігур — обчислити границю, до якої прямує довжина (площа або об'єм) системи прямолінійних фігур, вписаних у дану криволінійну фігуру і описаних навколо неї. Особливість цього методу — органічне поєднання суто математичних міркувань і широке застосування засобів механіки й статики (див. табл. 3).

Обчислюючи значення геометричних величин, Архімед, по суті, застосовував нижні та верхні інтегральні суми, які тепер називаються сумами Дарбу. Так, шукаючи величину V геометричної фігури (довжини, площі або об'єму), Архімед вписує в цю фігуру і описує навколо неї послідовності фігур, які складаються з елементарних частин, величини яких нам відомі. Підсумовуючи ці частини, Архімед дістає значення величин $\overline{S}$ (описаної) і $\underline{S}$ (вписаної) фігур. Тоді $\underline{S}<V<\overline{S}$. Встановлюючи, що $\overline{S}-\underline{S}$ може бути як завгодно малою, знаходить V як спільну границю $\overline{S}$ і $\underline{S}$ (в усіх розглядуваних ним випадках $\overline{S}$ була монотонно спадна, а $\underline{S}$ — монотонно зростаюча).

Як і інші математики Стародавнього світу, Архімед викладав готові результати, не розкриваючи шляхів, якими їх було знайдено. І це мовчання було для вченого великою трагедією. Адже метод його давав прекрасні результати, хоч був «незаконним», засудженим і відкинутим законодавцями з питань методології науки — ідеалістом Платоном та його учнем матеріалістом Арістотелем. Очевидно, вже десь на схилі творчого шляху Архімед прочитав праці вченого-матеріаліста Демокріта з Абдер (460—бл. 380 до н. е.) і виявив, що знаменитий філософ у своїй концепції атомістичної математики (див. стор. 31) був його однодумцем, він також уявляв тривимірні фігури утвореними з сукупності двовимірних, останні з прямих, а прямі — з неподільних далі точок — атомів.

Дуже можливо, що тоді Архімед і вирішив припинити мовчання. Його «Послання Ератосфену про механічні теореми» розкривало всі таємниці творчого методу, всі «єретичні», з погляду вимог офіційної науки, прийоми пошуку істини. Послання Ератосфену, яке ще називають «Ефод» («Про метод»), спіткала трагічна доля праць Демокріта. Майже всі копії «Ефода» були знищені послідовниками Платона і Арістотеля. Тільки в 1906 р. учені випадково натрапили на слід однієї з копій цього твору, в якому Архімед відкривав своєму александрійському колезі, а через нього і всім математикам секрети деяких своїх квадратурних і кубатурних теорем.

Ось міркування, за допомогою яких він дістав точну формулу для об'єму кулі. Нехай $[AC]$ і $[BD]$ — два взаємно перпендикулярні діаметри великого круга кулі із центром K, а AFE — осьовий переріз конуса, основи якого куля дотикається в центрі — точці C (мал. 4). Другий кінець діаметра AC збігається з вершиною конуса. На крузі з діаметром $|FE|$ (основі конуса) побудуємо ще циліндр, висота якого дорівнює $|AC|$. Осьовий переріз циліндра — $GFEL$. На малюнку подано осьовий переріз комбінації трьох геометричних фігур: циліндра, вписаного в нього конуса й кулі, діаметр якої конгруентний висоті циліндра (і конуса).

Відкладемо $|AH|=|AC|$ і розглянемо рівноплечий важіль HAC з точкою опори в A. Через будь-яку точку S діаметра AC побудуємо площину, перпендикулярну до AC. Вона перетне циліндр по кругу діаметра $|MN|$, кулю — по кругу діаметра $|PO|$ і конус — по кругу діаметра $|RQ|$. Очевидно, що $|MS|=|AC|$ і $|QS|=|AS|$. Тому $|MS|\cdot|SQ|=|AC|\cdot|AS|=|AP|^2$. Потім $|AP|^2=|PS|^2+|AS|^2=|PS|^2+|SQ|^2$. Оскільки $|AH|=|AC|$, то $|AH|:|AS|=|AC|:|AS|=|MS|:|SQ|=|MS|^2:(|MS|\cdot|SQ|)$, або, на основі попередньої рівності, $|AH|:|AS|=|MS|^2:(|SP|^2+|SQ|^2)$. Помноживши члени другого відношення на π, матимемо

$$\frac{|AH|}{|AS|}=\frac{\pi|MS|^2}{\pi|SP|^2+\pi|SQ|^2},$$

або

$$|AH|\cdot(\pi|SP|^2+\pi|SQ|^2)=|AS|\cdot\pi|MS|^2.$$

Тепер уявімо, що круги з діаметрами $|MN|$, $|OP|$ і $|RQ|$ виготовле-

Мал. 4

но з однорідних, наприклад металевих, платівок, тоді утвореній рівності можна дати таке механічне тлумачення: якщо круг з діаметром $|MN|$ підвісити в точці S, він зрівноважить на утвореному нами важелі круги з діаметрами $|OP|$ і $|RQ|$, підвішеними в точці H. Але те саме можна сказати відносно всіх трійок відповідних кругів, утворених при перетині даної фігури довільною площиною $N_iM_i \perp AC$. Звідси випливає: коли в H підвісити всі круги діаметра типу OP (вони будуть різної довжини, а разом утворять кулю з діаметром AC) з усіма кругами різних діаметрів типу PQ (тобто конус), то вони зрівноважать круги з діаметрами, конгруентними $|MN|$, кожний з яких залишається на своєму місці, тобто циліндр, маса якого ніби зосереджена в точці K. Умовно встановлене відношення рівноваги нашого уявлюваного важеля можна записати так: (маса конуса + + маса кулі) $\cdot |AH| =$ (маса циліндра) $\cdot |AK|$ (див. табл. 3). Оскільки $|AH| = 2 \cdot |AK|$ і об'єм (а відповідно і маса) конуса становить третину об'єму (відповідно маси) циліндра, матимемо: 2 $\cdot$ (маса конуса + маса кулі) = 3 маси конуса. Звідси маємо: дві кулі рівновеликі за об'ємом одному конусу. Оскільки ж $|AC| = 2|AK|$ і об'єм конуса AEF у 8 раз більший від об'єму конуса з основою діаметра $|BD|$, дістаємо, що $V_{\text{кулі}} = 4V_{\text{конуса } ABD}$. Якщо через R позначити довжину радіуса кулі, то шуканий її об'єм V дорівнюватиме:

$$V = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi |R|^2 \cdot |R| = \frac{4}{3}\pi |R|^3.$$

Евклід довів у «Началах», що існує тільки п'ять типів опуклих многогранників, у яких всі грані — конгруентні правильні многокутники і всі многогранні кути конгруентні. Такі многогранники називаються *правильними*. Це тетраедр, гексаедр

(або куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр. Архімед узагальнив поняття правильного многогранника і відкрив нові математичні об'єкти — напівправильні многогранники. Так він назвав многогранники, в яких всі грані — правильні многокутники більш як одного роду, а всі многогранні кути конгруентні. Тільки в наш час вдалося довести, що тринадцятьма відкритими Архімедом напівправильними многогранниками вичерпується вся множина цих геометричних фігур. Чотирнадцятий напівправильний многогранник, що його відкрив радянський математик В. Г. Ашкінузе, вже дещо відрізняється від архімедових (див.: Квант, 1976, № 1). (Див. табл. 4).

Незважаючи на блискучі успіхи грецької математики в галузі геометрії, мистецтво лічби і техніка обчислень залишалися занедбаними. Алфавітна нумерація була справжнім гальмом у розробці обчислювальних алгоритмів. У праці «Псамміт» («Числення піску») Архімед намагається виправити таке становище в грецькій системі числення. Він розв'язує задачу обчислення кількості піщинок, які містилися б у масі піску, яка заповнила б «весь Всесвіт».

Ця задача й приводить Архімеда до розробки принципово нової, позиційної системи числення. В її основу було покладено октаду, яка дорівнює міріаді міріад (у греків міріада дорівнювала 10^4), тобто 10^8. Числа до 10^8 називалися «числами першими», 10^8 — одиниця «чисел других», $(10^8)^2$ — одиниця «чисел третіх» і т. д. Усі вони становлять перший період чисел, за ним йшли числа до 10^8-го періоду. Найбільше число, яке можна було виразити цим численням октадами, дорівнювало $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8}$. Число ж піщинок, яке задовольняло умову поставленої задачі, дорівнювало лише 10^{63}.

У «Псамміті» вперше була чітко висловлена ідея нескінченності ряду натуральних чисел. Ідея настільки нова, що тільки через багато століть вона стала загальновизнаною. Тут Архімед блискуче розв'язав і чимало астрономічних проблем. Наприклад, він експериментально встановив, що діаметр Сонця знаходиться в межах $32°27' < d < 35°55'$, 5 Коперник вважав, що $d = 31°48'$, істинне ж значення цієї величини $31°28'$ в апогеї і $32°37'$ — в перигеї. Отже, верхня межа, яку знайшов Архімед, не гірша від знайденої Коперником.

Архімеда вважають автором «Задачі про биків Геліоса (Сонця)». Він послав її александрійським ученим в одному з листів Ератосфену Кіренському. На основі ряду залежностей пропонувалося обчислити кількість биків чотирьох мастей, які паслися в чотирьох отарах і належали самому Сонцю. Задача зводилася до невизначеного рівняння $t^2 - 4\,729\,494u^2 = 1$. Загальна кількість биків, яка задовольняє умову задачі,— число порядку $7766 \cdot 10^{206541}$. Для того щоб записати всі вісім чисел відповіді, потрібна була б книжка в 660 сторінок, якщо на кожній сторінці друкувати по 2500 цифр. Таку задачу, на думку Архімеда, має розв'язати вчений, якщо він хоче вважати себе таким, що «в цій мудрості все до кінця перевершив». Зрозуміло, що він поставив завдання, виконати яке вченим того часу фізично було не під силу.

Незважаючи на те, що Архімед дуже багато часу відводив на розв'язання складних задач з фізики, математики і техніки, він ще займався математичними іграми (навіть був автором однієї з них — Стомахіона). У перекладі із старогрецької *стомахіон* означає те, що викликає злість. Прямокутник, довжини сторін якого відносяться, як 1:2, потрібно

розрізати на 14 частин. Тоді виявляється, що з них можна скласти силуети різних тварин, предметів, споруд і т. д. (див.: Квант, 1978, № 8). Випробувавши свою кмітливість у цій грі, ви переконаєтеся, що назва її цілком виправдана. Гра виховує винахідливість, тренує зір, вміння бачити геометричні форми в навколишніх предметах. Стомахіон — патріарх серед математичних ігор-головоломок, він витримав 2000-річне випробування і не застарів, як не застаріли теореми і задачі геніального вченого (див. табл. 5).

У 75 р. до н. е. римський сенат призначив Ціцерона (106—43 до н. е.) квестором у Сіцілію.

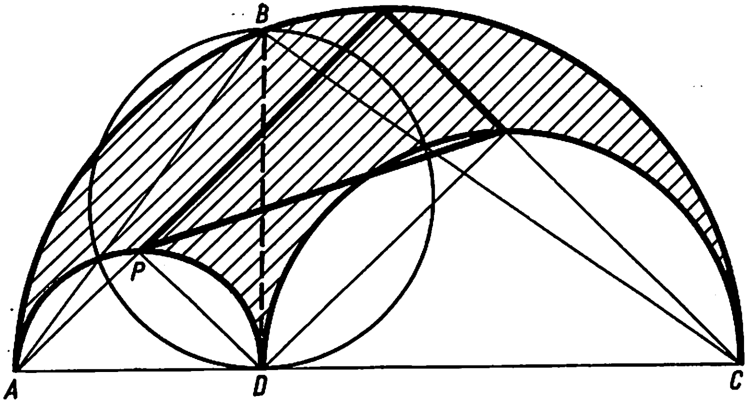
Ціцерон особисто взяв участь у пошуках і знайшов могилу Архімеда. Він пам'ятав вірші і креслення, викарбувані за заповітом ученого на його пам'ятнику: циліндр з вписаною в нього кулею. А згодом із захопленням описав деталі пошуку і наказав відремонтувати напівзруйнований, забутий пам'ятник на могилі великого сіракузця.

Тисячоліття запорошили сліди тих далеких років. Лише слава Архімеда вистояла проти їх руйнівної ходи. Вистояла, бо Архімед створив пам'ятник, який не піддається руйнівній ході тисячоліть.

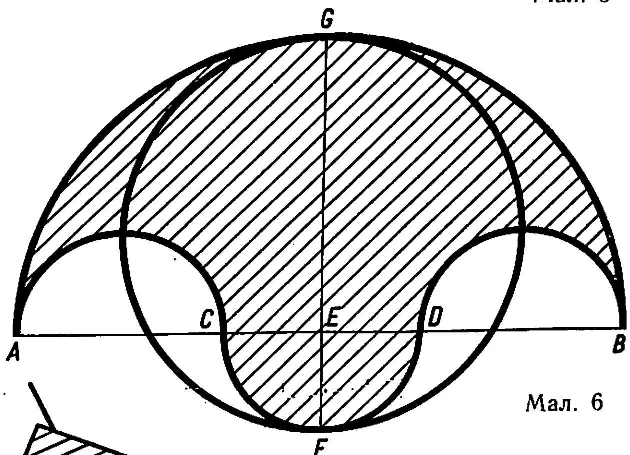
Задачі

1. $[BD] \perp [AC]$ (мал. 5). На $[AD]$ і $[DC]$, як на діаметрах, проведено ще два півкола. Довести, що площа утвореної фігури — арбелона, або «ножа шевця», рівновелика площі круга, побудованого на $[BD]$, як на діаметрі.

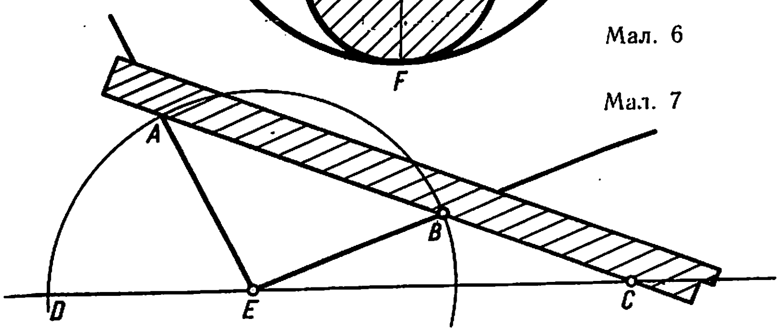
2. Зрозуміло, як побудовано ще одну фігуру Архімеда. Вона називається саліоном (бочонок для солі) (мал. 6). Довести, що площа круга рівновелика площі саліона (заштрихована частина).



Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7

3. Переказують: сіракузькому царю Гієрону виготовили золоту корону, пішли чутки, що майстер підмінив частину золота сріблом. Архімед, якому доручили розплутати цю справу, знайшов розв'язок у момент, коли сидів у ванні. Не чуючи себе від радості, з вигуком «Еврика!» кинувся на вулицю. Адже йшлося не просто про задачу скупуватого царя, а відкриття найважливішого закону гідростатики.

Нехай корона, виготовлена із золота і срібла, має вагу 10 кг, а у воді вага її становить лише 99,55% її ваги в повітрі. Знаючи, що 1 кг золота втрачає у воді $\frac{9}{77}$ кг, а срібло $9\frac{11}{21}$% своєї ваги у повітрі, визначити, скільки срібла і скільки золота пішло на виготовлення корони.

4. Архімед знайшов красиве некласичне розв'язання однієї з трьох знаменитих задач давнини, а саме: поділ кута на три рівні частини (трисекція кута) за допомогою методу вставки. Щоб поділити на три конгруентні частини $\widehat{AED}$, виконаємо такі побудови: з вершини $\angle AED$ (мал. 7), як із центра, опишемо коло довільного радіуса. Візьмемо лінійку з двома позначками B і C, нанесеними так, що $|BC| = |BE| = |R[$. Прикладемо лінійку в точці C так, щоб B знаходилася на колі і A, B і C на одній прямій. Тоді $\widehat{BEC} = \frac{1}{3}\widehat{AED}$. Довести, що це справді так.

АПОЛЛОНІЙ ПЕРГСЬКИЙ

(бл. 260—170 до н. е.)

Як геометр цього типу — синтетичний «чистий» геометр — Аполлоній не мав рівних аж до Штейнера, який жив у XIX столітті.

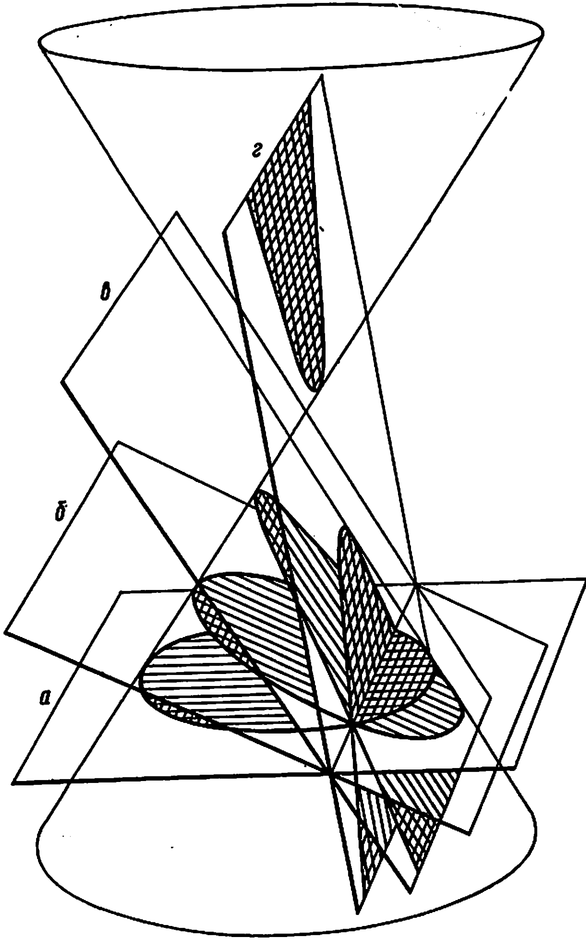
Є. Т. БЕЛЛ

Аполлоній Пергський — останній з трьох великих математиків епохи еллінізму. Молодим він приїхав до Александрії і вивчав математику в послідовників Евкліда в Мусейоні. Потім жив і працював у другому центрі грецької культури — місті Перга.

Аполлоній — автор багатьох математичних праць, найвизначнішою з яких є «Коніка» («Конусні»). Із восьми книг цього твору збереглися сім. «Коніка» присвячена конічним перерізам, або кривим другого порядку. Їх вивчали і до Аполлонія. Є свідчення, що учень Евдокса Кнідського — Менехм (бл. 360 до н. е.) — відкрив еліпс, гіперболу і параболу («тріада Менехма»), вивчив їх властивості і застосував до розв'язання задачі подвоєння куба (делоської задачі). Конічні перерізи вивчали Евклід, Архімед та інші вчені. Один з біографів Архімеда навіть звинувачував Аполлонія в плагіаті, хоча аналіз «Коніки» свідчить, що для цього немає підстав. Попередники Аполлонія розглядали конічні перерізи за умови перпендикулярності площини перетину до твірної конуса. Якщо конус прямокутний, утворювалася

парабола, гострокутний — еліпс, а якщо тупокутний — вітки гіперболи. Аполлоній розглядає загальний випадок утворення конічних перерізів при перетині довільного кругового двопорожнинного конуса площиною під будь-яким кутом (мал. 8). Учений дістає еліпс, параболу або гіперболу залежно від того, перетинає площина всі твірні тільки однієї порожнини конуса, паралельна вона одній твірній чи перетинає обидві порожнини. Аполлоній увів назви параболи, гіперболи й еліпса. Для кожної із цих кривих Аполлоній відкриває і доводить основні її властивості. Зокрема, в першій книзі «Коніки» за основу класифікації кривих прийнято, по суті, властивості їх алгебраїчних рівнянь, які Аполлоній записував в словесно-геометричній формі і називав симптомами кривої. Із сучасного погляду можна сказати, що Аполлоній досліджував властивості конічних перерізів відносно прямокутної системи координат, у якій одна вісь збігалася з головним діаметром кривої (в еліпса — це була велика вісь), а друга — проходила через вершину кривої. При цьому вчений досліджував саме ті властивості, які залишаються незмінними (інваріантними) при допустимих перетвореннях. Ця ідея стала зрозумілою лише в XIX ст., коли німецький математик Ф. Клейн (1849—1925) у своїй знаменитій Ерлангенській програмі запропонував розглядати кожну геометрію (синтетичну, аналітичну, проективну, афінну, топологію і т. д.) як теорію, що вивчає геометричні властивості фігур, інваріантних відносно певної спеціальної групи перетворень площини або простору. Зокрема, евклідова геометрія — це наука, яка вивчає інваріанти метричної групи перетворень.

У семи книгах «Коніки» подано формулювання і доведення 387 теорем, в яких детально розглянуто найголовніші властивості кривих другого порядку.



Мал. 8

Немає жодної можливості передати все багатство змісту «Коніки». Досить сказати, що навіть сучасні університетські курси аналітичної геометрії не охоплюють всіх властивостей конічних перерізів, відкритих і доведених Аполлонієм. При відсутності

аналітичного методу дослідження, виконане вченим, вимагало велетенської роботи.

Праця Аполлонія — класичний приклад створення математичних теорій з логіки розвитку самої науки (див. табл. 6). Справді, в математичному природознавстві конічні перерізи тривалий час не знаходили застосування (хіба що крім параболічних дзеркал). Криві другого порядку привернули увагу вчених у XVI ст., коли невтомний шукач розгадок таємниць природи Й. Кеплер (1571—1630) поборов тисячолітню традицію і дійшов висновку, що планети обертаються навколо Сонця не по колах, як у це вірили всі від піфагорійців до Коперника, а по еліпсах. Отже, ідея Аполлонія відродилася лише в XVII ст. Багато визначних математиків присвятили свої дослідження різним питанням теорії конічних перерізів. Сьогодні ж властивості еліпса, параболи, гіперболи широко застосовуються в техніці, при дослідженні законів природи. Теоретичний фундамент цих застосувань створив учений, який навіть не уявляв їх величезного обсягу. Це теж не випадково. Відкинувши безліч другорядних властивостей, учений дістав у чистому вигляді певні просторові форми та кількісні відношення, які характеризували вже не окреме явище, а цілий клас подібних за певними числовими характеристиками явищ. Як кожна правильно побудована наукова теорія, «Коніка» діждалася свого часу, щоб допомогти людині глибше проникнути в таємниці закономірностей природи і використовувати їх у своїй практичній діяльності.

Різні автори називають ще інші праці Аполлонія з математики, астрономії, оптики, але жодна з них до нас не дійшла, хоча відомо, які проблеми розв'язував в них учений. У «Загальному трактаті» він вивчав загальні, недоводжувані поняття геометрії — аксіоми, постулати та їх відношення до реальної дійсності. Аполлоній обчислював значення числа π і дістав таке наближення:

$$\pi \approx \frac{62832}{20000} \approx 3{,}1416.$$

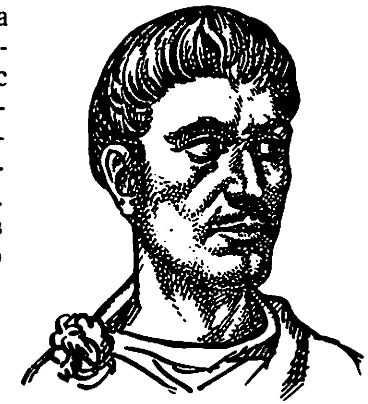
Він запропонував аналогічну розробленій Архімедом позиційну систему числення за тетрадами (степенями міріад, тобто 10 000). Окремі праці вчений присвятив невпорядкованим ірраціональностям і запалювальним дзеркалам.

У двотомній книжці Аполлонія «Про дотики» було вміщено його знамениту задачу: «Дано три фігури, кожна з яких може бути точкою, прямою або колом. Побудувати коло, яке проходило б через дані точки (або точку) і дотикалося до даних кіл або прямих». Розв'язання задачі самим Аполлонієм до нас не дійшло. Його вдруге знайшов відомий французький математик Франсуа Вієт (1540—1603). Пропоновані далі задачі на побудову — п'ять з десяти можливих окремих варіантів задачі Аполлонія. Легко побачити, що кожний варіант має кілька окремих випадків, залежно від розміщення даних фігур на площині.

Задачі

1. Побудувати коло, яке: а) дотикається до двох даних прямих і кола; б) дотикається до двох даних кіл і прямої; в) дотикається до двох даних кіл і проходить через дану точку; г) дотикається до даних кола та прямої і проходить через дану точку; д) дотикається до трьох даних кіл.

2. Довести, що множина точок площини α, відстані од яких до двох даних точок A і B ($A, B \in \alpha$) знаходяться в даному відмінному од нуля відношенні r ($r \in R$), є колом. (Його називають колом Аполлонія).



ДІОФАНТ АЛЕКСАНДРІЙСЬКИЙ
(III ст.)

Діофант — одна з найважчих загадок в історії науки. Праці його подібні до сяючого вогню посеред повно непроникної пітьми.

І. Г. БАШМАКОВА

Із часів Евкліда й Архімеда змінюються зміст і форма античної математики. Процес формування нових теорій сповільнюється, а згодом припиняється й зовсім. Але він був тривалим і позначився не відразу. Найвиразніше він виявився в творчості останнього видатного математика античного світу — Діофанта Александрійського.

Історія майже нічого не зберегла про його життя. Тільки опосередковано вдалося встановити, коли приблизно він жив. А в популярному в X—XIV ст. збірнику віршованих арифметичних задач «Грецька антологія» вміщено задачу під назвою «Епітафія Діофанта» такого змісту:

Прах Діофанта гробниця ховає: вдивись — і камінь
Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина,
А ще половину шостої — стрів із пушком на щоках.
Тільки минула сьома, з коханою він одружився.
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та півжиття свого тішився батько лиш сином:

Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина.
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний...

Задача приводить до рівняння першого степеня, розв'язавши яке дізнаємося, що Діофант жив 84 роки. Ось і всі відомості про його життя.

Ще більшою загадкою, ніж біографія Діофанта, стала для науки його «Арифметика», з тринадцяти книг якої збереглося лише шість. У них подано 189 задач з розв'язаннями і поясненнями. За формою «Арифметика» просто збірник задач, але за змістом — унікальне явище, справжнє чудо історії математики.

Уже вступ до книги свідчить про великий крок уперед, який зробив Діофант порівняно з математиками класичної давнини. Для них одиниця ще була неподільна, її частини, тобто дроби виду $\frac{m}{n}$, були тільки відношеннями цілих чисел, а не числами, $\sqrt{2}$ — відношенням діагоналі квадрата до сторони. Про від'ємні числа ще й не йшлося. Діофант шукає розв'язки задач у додатних раціональних числах, а в проміжних обчисленнях користується і від'ємними числами. Він перший вводить буквену символіку для перших шести степенів невідомого і вільного члена, знак від'ємного показника степеня та рівності. Діофант формулює правило додавання до обох частин рівняння однакових членів, зведення подібних. Назви степенів змінної ще мають геометричну інтерпретацію (квадрат, куб), які збереглися й до наших днів, але вчений розглядає квадрато-квадрати і квадрато-куби як числа і підсумовує квадрат з кубом і т. д. Отже, алгебру Діофант будує вже не на геометрії, як це робив Евклід, а на арифметиці, при цьому зі своєю мовою і символікою. Природно, що такі ідеї мали бути результатом певного розвитку мате-

матичної думки. Проте ми не бачимо в творця «Арифметики» попередників і не зрозуміло, як здійснювалася еволюція його поглядів, що була, здається, під силу лише поколінням учених. Це найбільша загадка математики.

Діофант вражає й тим, які задачі він ставить і як він їх розв'язує. Задачі «Арифметики» взято з алгебри і теорії чисел. Розв'язування їх приводить до рівнянь або систем рівнянь з цілими коефіцієнтами, для яких шукають цілі або раціональні розв'язки, при цьому число змінних більше від числа рівнянь. Такі рівняння та їх системи називають *діофантовими*, або *невизначеними*. Розв'язання в раціональних числах діофантового рівняння від двох змінних геометрично означає відшукання координат раціональних точок алгебраїчної кривої, яка описується рівнянням $f(x, y) = 0$.

Найпростіші діофантові рівняння розв'язували вже шумеро-вавілонські математики, піфагорійці й Евклід. Діофант розробляє, по суті, цілу теорію таких рівнянь. З неї в сучасній науці сформувалася окрема галузь математики — діофантовий аналіз, або діофантова геометрія.

Розглянемо, наприклад, задачу 34 з другої книги «Арифметики»: «Знайти три таких числа, щоб квадрат кожного з них, складений із сумою трьох цих чисел, давав квадрат». Задача приводить до розв'язання системи діофантових рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_1 + x_2 + x_3) = y_1^2, \\ x_2^2 + (x_1 + x_2 + x_3) = y_2^2, \\ x_3^2 + (x_1 + x_2 + x_3) = y_3^2, \end{cases}$$

яку задовольняють числа: $\frac{22}{6}$, $\frac{8}{6}$ і $\frac{2}{6}$.

Ідеям і задачам Діофанта судилася довга й щаслива доля. Він передав їх математикам Середньої Азії, Близького Сходу та Індії. У XVII ст. їх висвітлив по-новому П'єр Ферма (1601—1665). Відтоді проблеми, які заповів нащадкам Діофант, привертають увагу найвидатніших учених. Деякі з них розв'язані, інші — не розкрито й досі. Дві проблеми Діофанта особливо пам'ятними сторінками вписані в історію математики.

У 1900 р. видатний німецький математик Д. Гільберт (1862—1943) на другому Міжнародному математичному конгресі виголосив доповідь «Математичні проблеми», в якій поставив перед вченими 23 задачі з різних розділів математики, розв'язання яких мало важливе значення для подальшого розвитку математики.

Десятою проблемою була «задача про розв'язність діофантового рівняння», сформульована так: «Нехай дано діофантове рівняння з довільними невідомими і цілими раціональними числовими коефіцієнтами. Назвіть спосіб, за допомогою якого можна після скінченного числа операцій встановити, чи розв'язне це рівняння в цілих раціональних числах».

Найпростіші діофантові рівняння 1-го степеня з двома невідомими $ax+by=c$ $(a, b, c \in z)$ розв'язали піфагорійці. До діофантового рівняння привело розв'язання знаменитої задачі Архімеда про биків. Індійські математики розв'язали рівняння $ax^2+b=y^2$ і його окремий випадок $ax^2+1=y^2$. Ж.-Л. Лагранж (1736—1813) дослідив розв'язки рівняння $ax^2+bxy+cy^2+x+y+f=0$.

Учені дістали багато інших важливих результатів. Та все це було лише початком у дослідженні надзвичайно складної загальної проблеми про розв'язність загального діофантового рівняння n-го степеня від m змінних.

Відповіді довелося чекати 70 років. У 1970 р. на Міжнародному математичному конгресі в Ніцці двадцятирічний радянський аспірант Юрій Володимирович Матіясевич сколихнув математичний світ справжньою сенсацією століття — доповів про розв'язання 10-ї проблеми Гільберта. Він довів, що ніякого загального методу для розв'язання діофантового рівняння не існує.

Доведення Матіясевича дало ще побічні результати, яких він не шукав і які буквально приголомшили математиків своєю несподіванкою. Виявилося, що існує цілочисловий многочлен (щоправда, досить високого степеня і від великого числа змінних) — такий, що при всіх цілих значеннях змінних, коли він додатний, він подає *тільки* прості числа. Виявляється, що універсальний генератор простих чисел, за яким полювали математики від Ейлера до наших днів, не казкова жар-птиця. Існує й такий многочлен, усі цілі значення якого (при цілих значеннях змінних) подають послідовність: 2^2; 3^{3^3}, $4^{4^{4^4}}$, і тільки такі числа. Результати Матіясевича проливають світло на існування глибоких ще не розгаданих залежностей на множині цілих чисел. (Див.: Делоне Б. Н. Десятая проблема Гильберта решена.— Природа, 1972, № 5, с. 94—95).

Велика теорема Ферма — одна з невзятих фортець математики — також побудована на ідеях «Арифметики» Діофанта. І хто знає, до яких відкриттів приведе облога її потужними методами сучасної математики. (Докладніше про неї див. с. 145).

У другому томі «Математичної енциклопедії» (М., Советская энциклопедия, 1979) дев'ять статей («Діофантів аналіз», «Діофантів предикат», ...) названо ім'ям ученого, ідеї якого живуть і в наш космічний вік.

1. Знайти два числа, які знаходяться в певному відношенні і такі, що сума їх квадратів знаходиться в заданому відношенні до їх суми. (Кн. I, № 34.)

2. Знайти два таких числа, щоб квадрат кожного з них разом із сумою двох дорівнював квадрату. (Кн. II, № 22.)

3. Знайти три числа, сума яких дорівнює квадрату, і такі, що сума кожних двох з них є квадрат. (Кн. III, № 6.)

4. Знайти такі два числа, що сума їх кубів дорівнює сумі самих чисел. (Кн. IV, № 10.)

5. Задане число розкласти на три числа так, щоб сума будь-яких двох з них була квадратом. (Кн. V, № 13.)

Історія математики багата на славні імена. Проте немає можливості розповісти про кожного з них. Але щоб у читача не склалося враження, що видатні математики жили в математичному вакуумі, потрібно згадати хоча б найвідоміших із сучасників, соратників або суперників. Тому коротко згадаємо і тих, хто залишився поза сторінками нашої книжки. Вони по праву належать до славного племені колумбів математики.

Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.) — давньогрецький математик, жив і навчав математики в Афінах. Автор першого систематичного твору з геометрії, але твір не зберігся. У пошуках квадратури круга відкрив три види квадрованих серпків.

Феодор Кіренський (V ст. до н. е.) займався математикою, астрономією, механікою і теорією музики. Довів, що сторони квадратів, площі яких дорівнюють 3, 5, 6, 17 кв. од., несумірні зі стороною одиничного квадрата. Розробив основні ідеї теорії ірраціональних величин.

Платон (429—348 до н. е.) — видатний давньогрецький учений, родоначальник філософської течії — об'єктивного ідеалізму. Після тривалих подорожей повернувся до Афін, де близько 387 р. до н. е. заснував філософську школу (Академію), яка проіснувала до 529 р. і відіграла велику роль в історії науки, зокрема математики. На вході в Академію був напис: «Негеометр — хай не ввійде». Багато працював він над філософськими проблемами математики й окремими математичними задачами. Йому приписують оригінальне розв'язання задачі подвоєння куба. Платон виявив велику роль логічних означень і понять у науковому пізнанні, роль понять як абстракцій і відкрив понятійну природу мислення, відмінну од чуттєвого сприймання; надавав великого значення математичній підготовці майбутніх філософів і державних діячів.

Теетет з Афін (бл. 410—368 до н. е.) — учень Феодора Кіренського. Класифікував ірраціональності, завершив побудову п'яти правильних многогранників, розробив загальну теорію подільності. Представник алгебраїчного напряму в класичній грецькій математиці.

Гіппій з Еліди (V ст. до н. е.) — знаменитий філософ школи софістів, мав великі знання з математики, астрономії, археології. Для розв'язання задачі трисекції кута відкрив першу трансцендентну криву — квадратрису $y = x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2a}$. За допомогою квадратриси вдалося здійснити й некласичну квадратуру круга.

Архіт Тарентський (428—365 до н. е.) — видатний різносторонній учений, винахідник і політичний діяч. Розробляв теорію пропорційних та ірраціональних величин, теоретик музики, теорії акустики. Дав красиве кінематичне розв'язання делоської задачі.

Диностраm (IV ст. до н. е.) — учень Платона і Евдокса Кнідського. Досліджував конічні перерізи. Застосував квадратрису Гіппія для квадратури круга, тому квадратрису часто називають квадратрисою Динострата.

Арістарх Самоський (бл. 320—230 до н. е.) — давньогрецький астроном, розробив метод безпосереднього визначення відстаней до небесних тіл. Розробив і пропагував геліоцентричну систему світу, за що був звинувачений в єресі і змушений втекти з Афін.

Ератосфен з Кірени (бл. 276—194 до н. е.) — різносторонній учений, математик, астроном, філолог, філософ, поет. Керував Александрійською бібліотекою. Перший виміряв дугу земного меридіана. Широко відоме решето Ератосфена для складання таблиці простих чисел. Сконструював прилад (мезолябій) для розв'язування делоської задачі.

Герон Александрійський (I ст.) — математик, інженер, автор праць з прикладної математики, прикладної механіки, винахідник приладів і автоматів. У «Метриці» наведено відому формулу Герона для обчислення площі трикутника за довжинами сторін.

Менелай (I—II ст.) — математик і астроном. У «Сфериці» вперше викладає тригонометрію окремо від геометрії, хоча поняття тригонометричної функції в нього ще немає. Увів поняття сферичного трикутника. Відома теорема Менелая про трансверсалі, яку вчений поширив на сферичні трикутники.

Клавдій Птолемей (пом. бл. 170) — знаменитий астроном, географ, оптик. У «Математичному зібранні в XIII книгах» (арабізована назва «Алмагест» — «Величніша побудова») подав виклад всіх астрономічних знань епохи. У ній докладно викладено геоцентричну систему світу і тригонометрію.

Папп (III ст.) — математик, автор ряду праць. Книга «Зібрання», або «Математична колекція», містить великий матеріал з різних розділів геометрії і механіки. Стисло, зі знанням справи Папп створив вичерпний посібник з геометрії, навів багато історичних довідок, які є цінним джерелом з історії математики.

ЕПІЛОГ ЕПОХИ

Останні два століття до нашої ери грецьке суспільство переживало страхіття римських завоювань. У 146 р. римляни завоювали майже всю материкову Грецію, в 86 р.— війська Сулли взяли Афіни.

Місто на три дні було віддане на пограбування і насильства солдатам. Сулла мав намір зрівняти його із землею, і старійшини ледве вмовили його не робити цього. Квітучі міста й цілі країни перетворювалися на пустині. Гинули люди і витвори людського генія, безцінні пам'ятники культури. Усе це, звичайно, не сприяло роботі вчених, і грецька наука гине разом з грецьким рабовласницьким світом.

На початку нашої ери виникає нова релігія — християнство, яка скоро стала найлютішим ворогом не тільки язичеської релігії, а й всієї язичеської науки і мистецтва. Церковники почали повсюдні погроми культурних і наукових центрів. Серед них було розгромлено і Мусейон. У 391 р. було спалено значну частину знаменитої Александрійської бібліотеки. Жертвою християнських ченців стала відома жінка-математик, коментатор праць Діофанта Гіпатія Александрійська (370—415). Натовп ченців по-звірячому вбив її тільки за те, що вона не прийняла християнства і залишалася вірною язичеській релігії. Нарешті, в 529 р. імператор Юстініан закрив останній центр грецької науки — Афінську академію. До цього періоду належать і декрети, в яких під загрозою смертної кари заборонялося займатися математикою. Дальший розвиток її пов'язаний з діяльністю вчених Середньої Азії і Близького Сходу. Звідси пройшли караванні шляхи математичної думки, пробилися в середньовічну Європу, щоб в нових історичних умовах продовжити розвиток математичної теорії, так успішно закладеної математиками Стародавньої Греції.

КАРАВАННІ ШЛЯХИ МАТЕМАТИКИ

АЛ-ХОРЕЗМІ

(ал-Хорезмі Абу Абдалла Мухаммед ібн Муса ал-Маджусі 787—бл. 850)

...Я склав коротку книжку про числення алгебри і альмукабали, яка містить у собі прості та складні питання арифметики, бо це необхідно людям під час розподілу спадщин, складання заповітів, розподілу майна і розгляду судових справ у торгівлі і всіляких угод, а також при вимірюванні земель, проведенні каналів, у геометрії та інших різновидностях подібних справ.

АЛ-ХОРЕЗМІ

Кілька слів про незвичне прізвище вченого. Слово «Хорезмі» означає місце народження, як, наприклад, Евдокс Кнідський, Кирик Новгородець та ін. Частка «ал» в арабській мові не перекладається, її пишуть для милозвучності. Слово «Ібн» (син) означає, що батька вченого звали Муса, а «Абу» (батько), що він сам є батьком Абдалли. Отже, йдеться про Мухаммеда Хорезмського, сина Муси, батька Абдалли, вихідця з маджусів — послідовників релігії вогнепоклонників.

Хорезмі був першим учнем у місті і в питаннях науки розбирався краще від своїх учителів. Він багато читав, займався самоосвітою, вивчив перську, арабську, давньотюркську мови, санскрит. Щоб поповнити знання, багато подорожував. У 25 років він досяг Багдада, де на той час уже діяв науковий центр, своєрідна академія наук — «Будинок мудрості». При ньому працювали астрономічна обсерваторія і велика бібліотека. Тут молодий Хорезмі вивчив давньогрецьку мову, твори Архімеда, Евкліда, Аполлонія, став ведучим ученим Середнього Сходу, а в 35 років очолив бібліотеку і став організатором

наукових робіт у «Будинку мудрості». Він проводить важливі астрономічні дослідження, керує вимірюванням довжин земного меридіана і дістає для його дуги в 1° величину 111 851 м, що досить близько до сучасних даних — 110 938.

Хорезмі багато подорожує, виконує відповідальну дипломатичну місію в столиці поволзьких хазар м. Ітіль, очолює групу з 70 географів, які займалися складанням атласу світу.

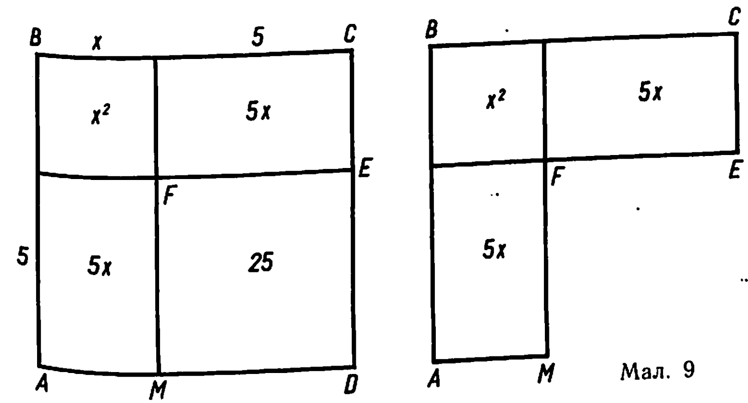
Наукова робота Хорезмі не раз приводила його до висновків, які суперечили догмам священної книги мусульман — корану. Учений виявляв справжню мужність і залишався вірним науковій істині. Іноді він потрапляв у небезпечні ситуації в питаннях віри. Так, в XVIII розділі корану розповідається, що у Візантії є священна печера, в якій милістю аллаха сплять сім підлітків. Каліф вирішив перевірити істинність переказу і послав у Візантію експедицію на чолі з Хорезмі. Відмовитися од поїздки, заявивши відразу, що це неправда, було рівнозначне самогубству. Тому Хорезмі сказав про це після повернення, тобто на конкретному прикладі спростував коран.

Світову славу принесли Хорезмі його математичні праці: трактати «Про індійську лічбу» і «Коротка книжка про числення ал-джабр і ал-мукабали».

Історична місія першого трактату полягає в тому, що завдяки йому стало відомим відкриття індійських математиків — десяткова позиційна система числення. Видатний французький математик, основоположник небесної механіки П'єр Лаплас (1749—1827) писав про нього: «Думка подавати всі числа небагатьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, настільки проста, що саме через цю простоту важко оцінити, наскільки вона дивовижна. Як нелегко прийти до цього, ми бачимо ясно на прикладі найвидатніших геніїв грецької вченості — Архімеда і Аполлонія, від яких ця думка залишилася прихованою». Хорезмі зрозумів і по-справжньому оцінив винахід індійських учених. У своєму арифметичному трактаті він описав дев'ять індійських цифр і «маленький кружечок», на зразок «*O*», який відповідав порожньому розряду; докладно пояснив чотири арифметичні дії і добування квадратного кореня з індійськими цифрами, дії із шістдесятковими і звичайними дробами і добування квадратних коренів. Посібник Хорезмі (у виданні математичних трактатів ученого він займає лише 16 сторінок) ознайомив учених середньовічної Європи з десятковою позиційною системою числення і заснованою на ній арифметикою. Латинізована форма прізвища вченого Algorismus, або Algorithmus, означала тоді всю систему десяткової позиційної арифметики. У сучасній математиці поняття алгоритму — одне з фундаментальних понять всієї математики і означає інструкцію про виконання в певному порядку деякої системи операцій, за допомогою яких розв'язуються задачі певного класу.

Алгебраїчний трактат Хорезмі дав ім'я одному з важливих розділів математики — алгебрі. У книжці викладено початки алгебраїчного числення — правила алгебраїчних перетворень, дії з одночленами і многочленами, включаючи правила «ал-джабр» і «ал-мукабала». За допомогою двох останніх операцій будь-яке квадратне рівняння і рівняння першого степеня можна було звести до однієї із шести канонічних форм: $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $bx=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=b$, $bx+c=ax^2$.

Операція «ал-джабр» (зведення, виправлення) полягає в перенесенні членів з однієї частини в другу так, щоб в обох частинах рівняння були тільки додатні члени. В іспанській і португальській мовах слово «algebra» означає хірургію взагалі і мистецтво



Мал. 9

хірурга відновлювати пошкоджені органи. В рівнянні перенесення від'ємних членів з однієї частини в другу (звичайно, з протилежними знаками) теж ніби відновлення, зведення рівняння до однієї з канонічних форм. «Ал-мукабала» — це почленне віднімання від обох частин рівняння однакових членів. Наприклад, застосування до рівняння $3x^2+3x+3=2x^2-7x+$ $+42$ операції «ал-джабр» приводить до рівняння $3x^2+10x+3=2x^2+42$, застосування «ал-мукабали» до рівняння

$$x^2+10x=39. \qquad (1)$$

Сформульовані правила стосуються додатних коренів. Невідома величина x зображується відрізком, x^2 — квадратом, побудованим на x. Ось знамените розв'язання Хорезмі рівняння (1). Легко зрозуміти побудови (мал. 9), які приводять до висновку, що площа чотирикутника $MFED$ дорівнює 25 кв. од., але за умовою (1) площа фігури $ABCEFM$, яку називають гномоном, дорівнює 39. Тоді площа квадрата $ABCD$ дорівнює $39+25=64$ кв. од., звідки $|AB|=8$, але $|AB|=x+5$, тобто $x+5=8$, або $x=3$.

У своєму трактаті Хорезмі дає також короткі відомості про дії з алгебраїчними виразами, приклади алгебраїчного розв'язання трикутників і велику добірку задач на поділ спадщини. Такі задачі відігравали велику роль у суспільному житті, оскільки попереджали розорення несправедливо скривджених. Для книжки Хорезмі характерні чіткість і ясність викладу, тісний зв'язок розв'язуваних прикладів з життям, практикою. Учений розглядає математику як потужне знаряддя полегшення праці людей, розвитку культури. Автор дбає про свого читача, тому докладно пояснює теоретичні положення, попереджає від можливих помилок.

Алгебраїчний трактат — вершина творчості Хорезмі. Робота мала величезний вплив на поширення математики в Західній Європі. Її багато разів перекладали на латинську мову, і саме за цією книжкою покоління учнів робили перші кроки в математиці.

Задачі

1. Десять поділили на дві частини і перемножили. Потім добуток поділили на різницю між їх сумою і подвоєною однією частиною. Частка дорівнює $5\frac{1}{4}$. Чому дорівнює кожна частина?

2. У трикутної ділянки землі дві сторони по десять ліктів, а третя — 12. Усередині трикутної ділянки — квадратна ділянка землі. Обчислити сторону квадратної ділянки.

3. Різницю після віднімання від майна його третини і ще трьох дирхемів (дирхем — дрібна монета) помножили на саму себе і дістали все майно. Чому дорівнює майно?

БІРУНІ

(Абу Рейхан Мухаммед Ібн-Ахмед ал-Біруні, 973—1048)

Твори його численні, досконалі і гранично надійні.

АБУ-Л-ФАРАДЖ

Великий учений-енциклопедист середньовічного Сходу ал-Біруні (або ал-Беруні) народився в м. Кяти, стародавній столиці Хорезму (тепер м. Біруні Каракалпацької АРСР). Він належав до того населення середньовічного Хорезму, від якого походять сучасні хорезмійські узбеки, і тому по праву вважається славним сином і гордістю узбецького народу.

Хорезм був на той час великим культурним центром із школами і бібліотеками, там жили і працювали вправні майстри-ремісники. Тут рано виникли й початки точних наук — астрономії, геодезії, математики, математичної географії. Знання із цих галузей знань були необхідними для будівництва складних зрошувальних систем, багатоповерхових споруд і фортець.

Біруні — справжній син трудового народу — не зрікся і не соромився походження з безвісного роду. Мати його була носильницею дров. Прізвисько Біруні, що давньохорезмійською мовою означає «людина з передмістя», тобто видає плебейське походження, він узяв за прізвище, чим ще раз висловив зневагу до вельможної знаті.

Злиденне дитинство аль-Біруні ділив між пошуками шматка хліба і знань. З ним щедро ділились знаннями нечисленні грамотії з передмістя Кяти. А згодом він уже сам вбирав знання з книжок і народної мудрості — поем, легенд, висловлювань. Його цікавило все: астрономія, фізика, математика, ботаніка, географія, геологія, мінералогія, історія, філологія, звичаї різних народів, філософія. З часом заманулося йому на власні очі побачити країни і людей, про яких читав і чув перекази. Заради цього найнявся до караванника. І яке щастя, що одна з доріг звела молодого Біруні з видатним ученим Ібн Іраком! Двоюрідний брат хорезм-шаха емір Абу Наср Мансур Ібн Ірак став учителем Біруні, в сім'ї видатного математика і астронома його оточили увагою. Згадуючи на схилі років своє дитинство, Біруні в одному з віршів писав: «Сім'я Іраків вигодувала мене своїм молоком, а їхній Мансур узявся виростити мене». Допомога Ібн Ірака дала можливість Біруні здобути широку і різносторонню освіту. Сімнадцятирічним юнаком він розпочав самостійні наукові дослідження як астроном-спостерігач, а в 21—22 роки сконструював астрономічні інструменти і застосував їх для визначення координат багатьох населених пунктів Хорезму.

Одночасно молодий учений спостерігає сонячне затемнення, будує один з перших земних глобусів, визначає кут нахилу екліптики, пише астрономічні трактати. Разом з Ібн Іраком Біруні проводить дослідження зі сферичної тригонометрії.

Дві пристрасті полонили вченого на все життя — невгамовна спрага до нових знань і бажання передати іншим відкриті закони природи.

Незабаром бурхливі політичні події і криваві війни перервали наукові заняття. На початку 990-х років правителі Хорезму — хорезмшах з Кяти Му-

хаммед і емір з Ургенча Мамун були втягнуті у війну кочівників, а потім розпочали міжусобну боротьбу. Війська Мамуна взяли Кяту і нещадно розправилися з населенням. Місцевого правителя було вбито. Тоді вперше Біруні і пізнав важкий шлях на чужину.

У 992 р. він тікає в м. Рей поблизу Тегерана. Близько 998 р. після смерті Мамуна Біруні на короткий час повертається в Кяту, а потім переїздить до м. Гурган — столиці однойменного князівства на південно-східному узбережжі Каспійського моря. Були сподівання, що при дворі правителя Гургана Кабуса, який набув репутації покровителя наук, буде можливість займатися науковими дослідженнями. Якоюсь мірою ці сподівання виправдалися. Тут Біруні прожив близько шести років і створив одну з визначних своїх книг — «Хронологію» («Пам'ятники минулих поколінь»), у якій зібрав і критично переробив відомі йому досягнення з астрономії. Окремі розділи твору присвячено історії культури і літератур різних народів. Після цієї книги Біруні став відомим далеко за межами Гургана. Тут він написав трактат, присвячений спростуванню астрологічних пророкувань, та інші праці. Він зробив спробу виміряти градус земного меридіана, але без матеріальної підтримки не міг здійснити свого задуму. Неприємності розпочалися після того, як учений відмовився зайняти високу посаду візира. Бажаючи й надалі займатися науками, Біруні відхилив почесну пропозицію, і це зіпсувало його стосунки з правителем. До того ж походження Біруні вплинуло на його суспільно-політичні погляди і наукову позицію, які багато в чому розходилися з догмами офіційного мусульманства. Його називали боговідступником, єретиком, дияволом, бо він не боявся твердити, що до релігії звертаються ті, хто нездатний знайти правильну відповідь у науці.

У 1004 р. учений прийняв запрошення нового
хорезмшаха Мамуна II і оселився в його столиці —
Ургенчі. Тут він зустрів свого вчителя Ібн Іракa,
видатного лікаря і філософа Ібн-Сіну (Авіценну),
лікаря, філософа і астронома аль Масіхі, якого нази-
вав своїм наставником. В Ургенчі вчені організували
науковий гурток «Академію Мамуна», що сприяло
інтенсивним науковим дослідженням Біруні та інших
учених. Протягом кількох років Біруні служив також
близьким радником хорезмшаха, докладаючи багато
зусиль, щоб зберегти мир і незалежність країни.
Період відносного спокою був коротким. Могутній
султан м. Газни (тепер це невелике місто поблизу
Кабула), релігійний фанатик Махмуд хижо зазіхав
на плодючі землі Хорезму. Він ставив все нові і зу-
хвалі ультиматуми хорезмшаху. Серед них була й
вимога, щоб усі відомі вчені були доставлені до нього
в Газну. Хорезмшах надав ученим можливості самим
вирішувати, як діяти. Авіценна і Масіхі, переодягнув-
шись в лахміття, вирушили в Гурган. Коли вони
переходили через Каракуми, втікачів захопив страш-
ний піщаний ураган. Масіхі не витримав злигоднів
дороги і загинув, до міста дістався один Авіценна.
Біруні вирішив не залишати у важкий час хорезм-
шаха, який доброзичливо ставився до нього. Але ско-
ро Мамун II загинув у результаті двірцевої змови,
і полчища Махмуда вдерлися в Хорезм. Вони нищи-
ли людей, руйнували безцінні витвори їхньої думки
і рук. Біруні разом зі своїм учителем Ібн Іраком по-
трапив у полон і був вивезений в Газну. Тут його
чекало ув'язнення, суд і жорстокий вирок. Як невірно-
го його мали скинути з фортечної стіни. Але при дворі
Махмуда знайшлися й друзі вченого, які врятували
його від загибелі. Вони виклали під стіною на місці
падіння лантухи з бавовною і вчений тільки трохи
забився і вивихнув палець. Забобонний султан не

наважився страчувати вдруге хорезмійця, якому сам
аллах подарував життя. У нелегких умовах Біруні
продовжував наукові дослідження, хоча над його
головою за 13 років полону не раз збиралися грозові
хмари гніву правителя і підступні інтриги при-
дворних.

Саме в цей період учений створив свої основні
праці. Кілька разів він просив дозволу відвідати
батьківщину. Але султан боявся, що Біруні підніме
повстання проти нього, і кожного разу відмовляв.
Зате йому вдалося відвідати завойовані Махмудом
північні райони Індії, де місцеві вчені прихильно
зустріли хорезмійця. Адже й вони були полоненими.
У Індії Біруні виміряв довжину градуса земного
меридіана, а вивчивши санскрит, ознайомився з на-
уковими працями індійських учених. Він переклав на
санскрит «Начала» Евкліда, «Альмагест» Птолемея,
свій трактат «Астролябії», а в 1030 р. закінчив вели-
ку книжку «Індія». Написання цього твору було
справжнім науковим подвигом, героїзмом ученого і
людини-гуманіста. Ортодоксальний іслам розглядав
індійців як ворогів — невірних, культура яких мала
бути знищена, або, в кращому разі, заслуговувала
на зневагу. Біруні ж у своїй роботі без будь-якої
упередженості оцінив досягнення індійських учених.

Становище вченого покращало тільки після
1030 р., коли помер Махмуд, а султаном став старший
син Махмуда Масуд. Йому Біруні присвятив свій го-
ловний твір «Канон Масуда з астрономії зірок»,
який закінчив у 1036—1037 рр. Проте доля ще не
вичерпала всіх випробувань, відпущених вченому.
Газнійська держава зазнала нападу кочівників-
сельджуків. Масуд в 1040 р. потрапив у полон і заги-
нув, більша частина його імперії увійшла до складу
держави сельджуків. Сину Масуда — Маудуду діста-
лося тільки невелике володіння. При дворі Маудуда

Біруні і провів останні роки свого неспокійного життя.

Важко назвати наукову галузь, у якій не працював би Біруні. Він і сьогодні вражає широтою своїх інтересів. Серед наук, що привертали увагу вченого, була й математика. Практично він працював у всіх галузях сучасної йому математики.

У галузі теоретичної арифметики вчений займався підсумуванням рядів і комбінаторними задачами. В Індії він почув задачу, яку задав винахідник гри шатрандж (арабська назва шахів) царю Шераму, і обчислив суму 64 членів геометричної прогресії: $1+2+2^2+2^3+\dots$.

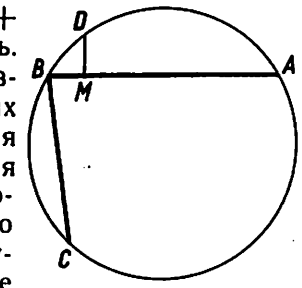
Біруні високо цінував математичне дослідження структури індійського вірша, виконане індійським математиком Брахмагуптою (бл. 598—660). Вивчення теорії індійського вірша і привело Біруні до комбінаторних задач.

Викладаючи системи числення, Біруні розглянув десяткову «індійську» позиційну систему і шістдесяткову «арабську», в якій для нуля використовувався спеціальний знак. Окремий трактат учений присвятив широко відомому на Середньому і Близькому Сході, а потім і в Європі методу практичної арифметики — «правилу трьох».

У багатьох творах ученого знаходимо численні зауваження з проблем ірраціональностей. Докладніше він торкається цієї теми при розгляді способів обчислення числа π. Навівши в одній з праць наближене значення числа π, Біруні висловлюється за розширення поняття числа, тобто в наших термінах,— за введення множини дійсних додатних чисел.

Серед праць, які дійшли до нас, немає спеціально присвячених алгебрі. Але в інших творах знаходимо багато алгебраїчного матеріалу. У «Науці зірок» дається класифікація квадратних рівнянь, способи

розв'язування рівнянь виду $ax+b=c$, систем лінійних рівнянь.



Мал. 10

В інших книжках Біруні розглядає розв'язання квадратних рівнянь. До кубічного рівняння зводить він задачу визначення довжини хорди круга, тобто сторони правильно вписаного в коло дев'ятикутника. Способу розв'язування кубічних рівнянь Біруні не дає, проте зазначає, що вони розв'язуються «послідовним добором», і докладно описує обчислення довжини хорди $^1/_9$ круга за допомогою спеціального ітераційного алгоритму.

У трактаті «Хорди» Біруні дає різні доведення теореми Архімеда про властивості ламаної, вписаної в коло. Ця теорема полягає в тому, що коли в коло вписано ламану, яка складається з двох ланок AB і BC, і з середини дуги AC, яка стягується ламаною, опущено перпендикуляр DM на більшу її ланку (мал. 10), то останній ділить ламану на рівні частини, тобто $|AM|=|MB|+|CB|$. Біруні наводить три доведення цієї теореми, які належать самому Архімеду, двадцять — математикам середньовічного Сходу і вісім власних. У цьому самому трактаті Біруні доводить відому теорему Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{де}\ p=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

та її узагальнення — теорему про визначення площі чотирикутника, вписаного в круг, за його сторонами:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Використовуючи доведені ним властивості ламаної, вписаної в коло ($|AB|\cdot|BC|+|BD|^2=|AD|^2$ і $|AB|\cdot|BC|+|AD|^2=|DB|^2$), Біруні обчислює сторони правильних трикутника і шестикутника, вписаних у коло. Він також дає правила для обчислення сторін правильних чотирикутника, п'ятикутника і десятикутника. Про сторону правильного вписаного семикутника, обчислення якої зводиться до рівняння $x^3+x^2-2x-1=0$, яке не можна звести до квадратного із цілими коефіцієнтами, вчений зауважує: «Це те, до чого і в наш час немає шляху».

Особливо велику увагу він приділив одній з відомих задач давнини — трисекції кута. У задачі треба поділити довільний кут на три рівні частини за допомогою лише циркуля і лінійки без поділок.

Якщо позначити даний кут через 3α, то, як відомо,

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

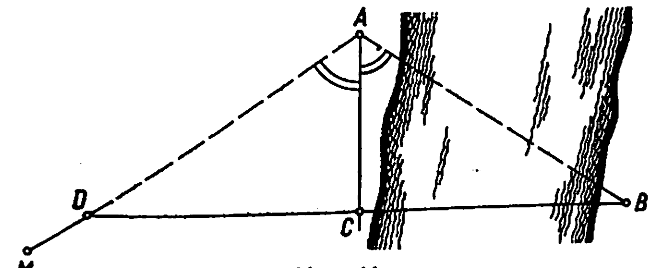
або

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha.$$

Позначимо $2\cos 3\alpha$ через a, а $2\cos\alpha$ — через x. Дістанемо рівняння $x^3-3x-a=0$.

Щоб довести, що цю задачу не можна розв'язати в загальному вигляді, досить зазначити принаймні один кут, для якого трисекція не здійснюється. Нехай $3\alpha=60°$, тоді $\cos 3\alpha=\frac{1}{2}$, і рівняння набере вигляду: $x^3-3x-1=0$. Це рівняння не має раціональних коренів, бо раціональними коренями цього рівняння можуть бути лише дільники вільного члена, тобто числа 1 або -1. Але ні те, ні друге число рівняння не задовольняють. За іншою теоремою, якщо корінь зведеного кубічного рівняння з раціональними коефіцієнтами можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, то це рівняння має принаймні один раціональний корінь.

Отже, в загальному випадку трисекцію кута за допомогою циркуля і лінійки виконати неможливо.



Мал. 11.

Але її можна розв'язати за допомогою так званого способу вставки, користуючись циркулем і лінійкою з поділками. Учений наводить дванадцять способів трисекції кута, в тому числі і знайдений ним самим.

І нині не втратив практичного значення спосіб Біруні для визначення відстаней до неприступних точок. Якщо треба обчислити ширину $|BC|$ річки або, наприклад, яру (мал. 11), то, побудувавши два конгруентні прямокутні трикутники ABC і ACD, це легко зробити. Тоді $|BC|=|CD|$.

Особливе місце в математичній творчості Біруні займає тригонометрія. Одним з перших він дав означення всіх шести тригонометричних ліній у крузі.

Узагальнюючи правила, рівносильні сучасним формулам:

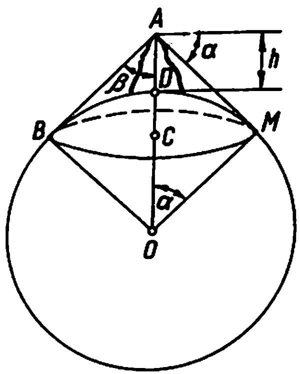
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \sin\frac{\alpha}{4} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}},$$

Біруні виводить такі формули:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos\alpha},$$

$$\sin\frac{\alpha}{4} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\alpha}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}.$$



Мал. 12.

Теореми плоскої і сферичної тригонометрії Біруні широко використовував для проведення різноманітних геодезичних і астрономічних робіт. Так, перебуваючи в Індії, він обчислив довжину радіуса $|R|$ Землі. Для цього він використав гору, яка височіла серед рівнинної місцевості. Вимірявши висоту h гори і кут «зниження горизонту» (α), він знайшов, що

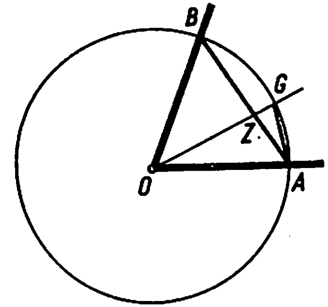
$$|R| = |R| \cdot \cos\alpha + h \cdot \cos\alpha$$

(мал. 12), звідки $|R| = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. Виконавши обчислення, Біруні знайшов $|R| \approx 6339{,}58$ км (за іншими даними 6403 км), що є достатнім наближенням до сучасних результатів ($|R| \approx 6371{,}11$ км). Учений розумів складність задачі, а також і те, що знайдений ним результат лише наближений і може відрізнятися од вимірювань інших авторів.

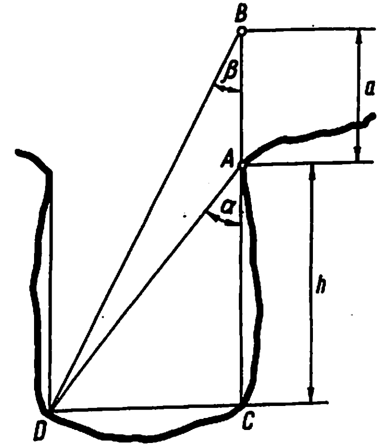
Швидко пролетіли роки спокійної праці. У 1041 р. Масгуд гине від руки меншого брата. А згодом державу газневидів завойовують турки-сельджуки. Газна стає однією з провінцій держави сельджуків. У ній, при дворі сина Масгуда і дожив решту свого неспокійного життя великий вчений. Помер він близько 1048 року. В історії науки назавжди лишиться ім'я палкого патріота, мужнього борця проти релігійного фанатизму, безстрашного шукача і поборника істини в науці та справедливості в житті.

Задачі

1. *Трисекція кута ал-Біруні методом вставки.* Дано $\angle AOB$. Проведемо $[OG)$ так, щоб $|AZ| =$



Мал. 13



Мал. 14

$= |AG|$ ($[AZ] \in [AB]$), тоді $\widehat{AOG} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$ (мал. 13).

2. Обчислити довжину хорди одиничного кола, яка стягує центральний кут 20°.

3. Довести, що глибину (h) криниці можна обчислити за формулою

$$h = \frac{a}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{ctg}\alpha \text{ (мал. 14).}$$

4. Розв'язуючи знамениту шахову задачу, ал-Біруні обчислив, що винагорода винахіднику шахів має становити 18 446 744 073 709 551 615 зерен пшениці. Перевірте правильність здобутого результату.

5. Якщо дуга AC ділиться точкою D на дві конгруентні частини, а точкою B на дві неконгруентні частини, то $|AB| \cdot |BC| + |BD|^2 = |CD|^2$.

ОМАР ХАЙЯМ

(Хайям Абу-л-Фатх Омар Ібн-Ібрахім 1048—1131)

Якби творцем я був,
я б ці коловоротні
Мінливі небеса у світові безодні
Повергнув без жалю й такі створив, щоб завжди
Могли сповнятися бажання благородні.

ОМАР ХАЙЯМ

У 1851 р. був опублікований німецькою мовою і вперше став доступним європейським математикам алгебраїчний трактат майже невідомого раніше вченого середньовічного Сходу Омара Алькайямі. А через вісім років європейські поети відкрили для себе перського поета Омара Хайяма. Його блискуче написані чотиривірші — рубаї скоро зайняли почесне місце у світовій поезії.

Багато енциклопедій кінця XIX — початку XX ст. вміщали біографічні довідки про математика Алькайямі і поета Хайяма.

Пройшов час, і вчені зробили сенсаційне відкриття — математичний трактат і рубаї, як й інші математичні, філософські трактати і астрономічні таблиці, належать перу однієї людини — видатного різностороннього вченого і великого поета Омара Хайяма.

Народився Омар Хайям на північному сході Ірану в головному місті провінції Хорасан — Нішапурі.

Слово «Хайям» означає наметний майстер і вказує на професію батька або діда вченого. Збереглося дуже мало відомостей і спогадів сучасників про його життя. Деякі з них знаходимо в чотиривіршах. Проте вони дуже скупо розкривають біографію славнозвісного поета, математика і філософа.

Завдяки надзвичайній пам'яті і постійному прагненню до освіти Хайям у сімнадцять років здобув глибокі знання з усіх областей філософії. Але самостійну наукову творчість довелося відкласти до кращих часів. Уже на початку творчого шляху молодий учений зазнав тяжких випробувань.

Рятуючись від незгод, Хайям залишає Хорасан і знаходить притулок в Самарканді, де продовжує і завершує більшу частину свого алгебраїчного «Трактату про доведення задач алгебри і альмукабали». Після завершення навчання Хайям працює вчителем. Робота ця була малооплачувана і тимчасова. Багато що залежало від прихильності господарів і правителів.

Ученого підтримував спочатку головний суддя Самарканда, потім бухарський хан, а в 1074 р. його запросили в Ісфаган до двору самого султана Малік-шаха. Тут він керував спорудженням і науковою роботою астрономічної обсерваторії, розробив новий календар. У 1077 р. Хайям закінчив другий математичний трактат «Коментарі до важких постулатів книги Евкліда».

Несприятливо для вченого складалися його відносини з наступниками Малік-шаха. Вище духовенство не прощало йому насичених глибоким гумором і великою викривальною силою віршів, у яких він висміював і звинувачував усі релігії, виступав проти соціальної несправедливості.

Траплялося, що, забуваючи про небезпеку, поет відкрито висміював усі релігії. В одному чотиривірші він писав:

У Каабі, в капищах,— дух рабства і покори.
Співають рабству гімн церковні дзвони й хори,

Міхраби, храми, хрест — та це ж усе ознаки
Терпіння рабського, його міцні підпори!

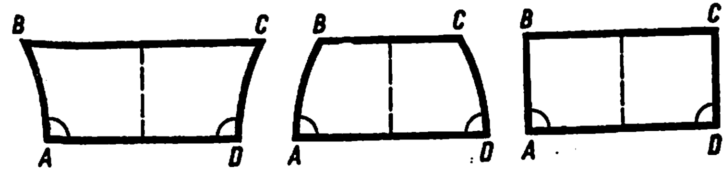
За такі слова можна було поплатитися життям, тому вчений був змушений здійснити паломництво до столиці ісламу — Мекки.

Навряд чи повірили в щирість його каяття переслідувачі вченого і поета. Останні роки він жив відлюдно, цурався людей, серед яких завжди міг бути шпигун, а то й підісланий вбивця. Важкий і небезпечний шлях пройшов поет, бо десь на схилі днів з гіркотою зізнався:

Цей світ і дня мені не дав прожить на волі,
Своїми втіхами не заглушив він болі.
Довгенько вчився я в його суворій школі,
Та не скінчив її, не став я майстром Долі.

Але в тому й велич вченого, що він завжди готовий на жертви в ім'я розкриття нерозгаданих таємниць науки.

Відомі два алгебраїчні трактати Хайяма. Він уперше дає означення алгебри як науки про розв'язування рівнянь, які потім стали називати алгебраїчними. Учений дає класифікацію лінійних, квадратних і кубічних рівнянь зі старшим коефіцієнтом, який дорівнює 1, визначає 25 канонічних видів рівнянь, в тому числі 14 видів кубічних. Загальним методом розв'язування рівнянь визнається графічна побудова додатних коренів за допомогою відшукання абсцис точок перетину кривих другого порядку — кола, параболи, гіперболи. Для кожного класу рівнянь добирається відповідна пара кривих, а потім визначається можливе число і межі додатних коренів рівнянь. Спроби розв'язати кубічні рівняння в радикалах не мали успіху, але вчений проникливо завбачив, що це зробить «хтось з тих, хто прийде після



Мал. 15

нас». Ці відкривачі справді прийшли, тільки через 400 років. Ними були італійські вчені Дель Ферро і Н. Тарталья. Хайям перший зазначив, що кубічне рівняння може мати два корені, хоча й не побачив, що їх може бути й три.

Понад два тисячоліття вчених турбувала таємниця паралельних прямих. Багато уваги приділив їй і Хайям. Він був переконаний у справедливості знаменитого V постулату Евкліда, хоча й вважав його менш очевидним, ніж багато інших тверджень, які Евклід доводив. Хайям відкинув численні відомі йому спроби доведень V постулату як логічно неспроможні. Але, будучи впевненим, що постулат можна довести, він шукає і знаходить своє «доведення». В основу доведення було покладено принцип, який складається з двох тверджень: *дві прямі, які збігаються, перетинаються; неможливо, щоб дві прямі лінії, які сходяться, розходилися в напрямі сходження.* Кожне із тверджень еквівалентне V постулату. Тому й Хайям не уникнув логічного круга в доведенні. Разом з тим, пошуки вченого були значним кроком на шляху розв'язання проблеми паралельних. На відміну од своїх попередників, Хайям увів свій постулат, як основу доведення. Учений розглянув чотирикутник з двома конгруентними сторонами, перпендикулярними до основи AD і конгруентними кутами $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$ (мал. 15). На кресленні сторони $|BA|=|CD|$ зображено у формі кривих, щоб підкреслити суть трьох гіпотез щодо величини $\angle DAB$ і $\angle CDA$. Оскільки ці кути конгруентні, то кожний з них може бути або гострим, або тупим, або прямим. Це так звані гіпотези гострого, тупого і прямого кутів. Якщо справедлива гіпотеза гострого кута, то сума внутрішніх кутів чотирикутника менша від 360°, якщо справджується гіпотеза тупого кута, вона більша від 360° і якщо прямого, то дорівнює 360°. Спростувавши гіпотези гострого і тупого кутів, Хайям довів існування прямокутника, тобто існування чотирикутника, сума внутрішніх кутів якого дорівнює 360°. Це твердження теж еквівалентне V постулату Евкліда і природно, що на його основі було доведено і V постулат. Не дивлячись на невдачу (Хайям був переконаний в успіху!) в розв'язуванні проблеми паралельних прямих, його результати стали істотним кроком в дослідженні цього питання. Шукаючи фактично неіснуюче доведення V постулату, Хайям по суті довів перші теореми неевклідових геометрій Лобачевського і Рімана.

Хайям уперше виклав нову концепцію поняття числа, яка включає й ірраціональні числа. Це був справжній переворот у вченні про число, коли вже стираються грані між ірраціональними величинами і числами. Хайям очолював спеціальну комісію, створену Малік-шахом для впорядкування календаря. Розроблений під його керівництвом календар — найдосконаліший. Він дає похибку в одну добу за 5000 років, у сучасному, григоріанському, календарі похибка в одну добу набігає за 3333 роки. Отже, останній календар менш точний, ніж календар Хайяма.

Задачі

1. Побудувати прямокутний трикутник FEG за даним катетом EG, в якому гіпотенуза $|EF|=|EG|+$ $+|GH|$ і $|EH|=10$ од.

2. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}=1$.

СУЧАСНИКИ ЕПОХИ

Абу-ль-Вафа Мухаммед Ібн-Мухаммед аль-Бузджані (940—998) — математик і астроном з Хорасана. Відомий роботами з геометрії і тригонометрії, автор «Книги про те, що потрібно знати реміснику з геометричних побудов», в якій розв'язав оригінальні геометричні задачі на побудову, зокрема на побудову за допомогою лінійки і циркуля сталого розхилу. Перший довів деякі теореми сферичної тригонометрії, єдиний учений країн ісламу X ст., який застосував від'ємні числа.

Ібн-Сіна Абу Алі аль-Хусейн Ібн-Абдалла (бл. 980—1037) — видатний філософ-природодослідник, лікар, математик і поет. Народився в с. Афшан (поблизу Бухари), працював у Хорезмі й Ірані. У своїх працях багато уваги приділяє питанням математики, зокрема теорії чисел і геометрії.

ат-Тусі Насір ад-Дін Абу Джафар Мухаммед ібн-Мухаммед (1201—1274) — видатний математик і астроном свого часу. Автор понад 100 праць з математики, фізики, астрономії, медицини, філософії, логіки, етики. Заснував і керував астрономічною обсерваторією в азербайджанському місті Марага поблизу Тавріза. Автор першого твору із сферичної тригонометрії, приділив багато уваги теорії паралельних прямих.

аль-Каші Гіяс ад-Дін Джемшід Ібн-Масуд (пом. бл. 1430) — видатний математик і астроном. Працював у знаменитій Самаркандській астрономічній обсерваторії, заснованій прогресивним правителем Самарканда Мухаммедом Тарагаєм Улугбеком (1394—1449). Відкрив десяткові дроби, правила дій над якими описав у цікавій книжці «Ключ до арифметики» (1427). У Західній Європі десяткові дроби відкрив голландський математик і інженер С. Стевін у

1586 р. у «Трактаті про коло» за допомогою правильних вписаних і описаних 805 306 368-кутників аль-Каші дістав результат $2\pi = 6{,}2831853071795865$, де всі цифри правильні. У Західній Європі цей результат знову дістав у 1597 р. ван Ромен за допомогою 2^{30}-кутників. Ученому належать також й інші результати в геометрії, плоскій і сферичній тригонометрії.

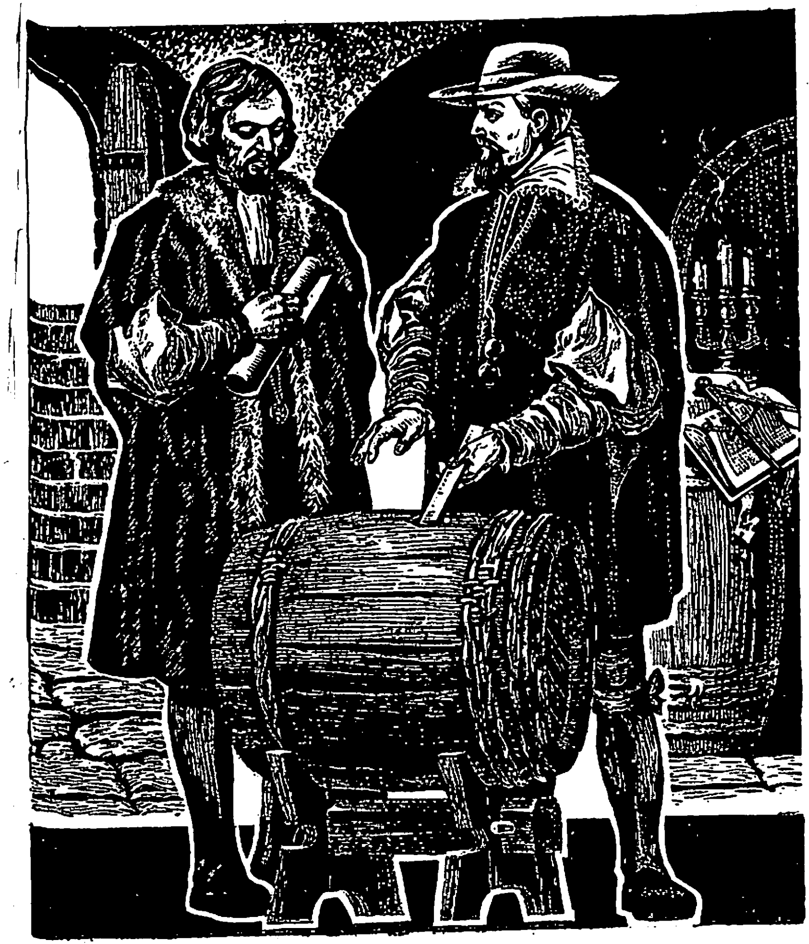
ЕПІЛОГ ЕПОХИ

Діяльність учених країн ісламу мала дуже важливе значення для історії математики, особливо країн Західної Європи. Учені мавританських країн Північної Африки і Піренейського півострова виконали велику історичну місію, ознайомивши європейців з досягненнями математиків країн ісламу, грецьких, індійських і східних попередників.

У X—XI ст. у райони Піренейського півострова, звільнені від влади маврів, приїздили вчені з багатьох європейських країн, щоб ознайомитися з математикою та природничими науками.

Були організовані цілі колегії перекладачів наукових трактатів з арабської мови на латинську. Італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170 — після 1228) у дитинстві оволодів математикою вчених країн ісламу і став палким прихильником і пропагандистом десяткової позиційної системи числення і заснованої на ній арифметики. Його знаменита «Книга про абак» (написана в 1202 році, перероблена в 1228) мала важливе значення для поширення в Європі десяткової арифметики і всієї математики.

ПРОВІСНИКИ НОВОЇ МАТЕМАТИКИ



НІККОЛО ТАРТАЛЬЯ

(бл. 1500—1557)

Геніально обдарованому Тартальї з юнацьких років довелося боротися з вкрай тяжкими умовами, що були наслідком розорення його батьківщини французами.

Г. Г. ЦЕЙТЕН

Історія іноді поєднує долі зовсім несхожих людей. Зустрівшись, вони найчастіше залишаються вірними супутниками, друзями, а буває, й ворогами... Нікколо Тарталья і Джероламо Кардано і були такими несхожими людьми і талановитими математиками, імена яких назавжди залишилися поряд в історії науки. Вони жили в епоху Відродження, виразну характеристику якій дав Ф. Енгельс: «Це був найбільший прогресивний переворот з усіх пережитих до того часу людством, епоха, яка потребувала титанів і яка породила титанів щодо сили думки, пристрасті й характеру, щодо багатогранності і вченості» (Маркс К., Енгельс Ф., Твори, т. 20, с. 326).

Історично склалося так, що саме в цю епоху математика стала в центрі уваги наукового пошуку. Коли на початку середніх віків математиків прирівнювали до астрологів і чорнокнижників, переслідували, то тепер саме в математиці бачили критерій істини. Леонардо да Вінчі писав: «Жодне людське дослідження не може називатися істинною наукою, якщо воно не пройшло через математичні доведення.

Ніякої вірогідності немає в науках там, де не можна застосувати жодної з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою».

Найбільших успіхів досягли математики епохи Відродження в алгебрі. І неабияка заслуга в цьому двох відомих математиків — Тартальї і Кардано.

Нікколо Тарталья народився в італійському місті Брешії в бідній сім'ї. Батько його заробляв на злиденне життя сім'ї, працюючи кінним поштарем. Він помер, коли Нікколо було шість років, залишивши вдову з трьома дітьми без засобів існування.

У лютому 1511 р. французька армія, розбивши венеціанців, захопила і пограбувала Брешію. Багато городян, у тому числі й мати Нікколо з дітьми, рятувалося від жорстокостей завойовників у місцевому соборі. Але стіни храму божого не зупинили озвірілих солдат. Вони вчинили в соборі криваве побоїще. Кілька шабельних ударів досягли й Нікколо. Йому розсікли губи, пошкодили щелепи і піднебіння. Турботи матері повернули покалічене дитя до життя, але хлопчик не міг вільно розмовляти і дістав пря-

ДЖЕРОЛАМО КАРДАНО

(1501—1576)

Кардано — велика людина, незважаючи на всі його недоліки, а без них він був би незрівнянним.

Г. ЛЕЙБНІЦ

звисько «заїка» — tartaglia (Тарталья), під яким він відомий в історії науки. Справжнє його прізвище — Фонтано — забулося. Школу він відвідував лише 15 днів і на цей час встиг вивчити алфавіт до літери К. Щоб не вмерти з голоду, довелося йти працювати, а доучуватися — в короткі години відпочинку. Він не мав ні чим, ні на чому писати і в святкові дні або в місячні ночі йшов на кладовище і писав вугіллям на мармурових надгробках вправи з граматики і математичні розрахунки. Найбільший інтерес виявив Тарталья до математики, яка й стала його професією.

Деякий час юнак мандрував по верхньоіталійських містах, перебиваючись випадковими заробітками, а з 1522 р., оселившись у Вероні, став «магістром абаку» і заробляв на життя викладанням математики та механіки, а також консультував з різних питань математики і техніки майстрів, інженерів, купців, артилеристів і архітекторів. Консультуючи, він ознайомився з найбільш цікавими і важливими для практики задачами, які потрібно було розв'язувати математиці того часу.

Тарталья став представником нового типу вченого, якого наукова теорія цікавить не сама по собі, а насамперед як засіб розв'язування практичних задач.

У Вероні молодий учений опублікував й свою першу книжку «Нова наука», в якій виклав систематизовану і придатну для практики теорію балістики. У Вероні до Тартальї звернувся за допомогою вчитель математики з Брешії де Кої. Він попросив розв'язати кілька задач, більшість яких зводилася до кубічних рівнянь $x^3+6x^2=5$ і $x^3+6x^2+8x=1000$. Візиту де Кої передували події, які, зрештою, втягли Тарталью у вир визначних подій математичного життя XVI ст.

У 1494 р. у Венеції вийшла книжка французького ченця Луки Пачолі (1454—1514) «Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорційності», автор якої стверджував, що кубічні рівняння не можна розв'язати в радикалах і тому їх слід віднести до числа «неможливих». Проте авторитет Пачолі не зупинив творчого пошуку, і десь біля 1515 р. професор математики Болонського університету Сціпіон дель Ферро (1456—1526) відкрив спосіб розв'язування кубічних рівнянь виду

$$x^3+qx=r. \qquad (1)$$

Про це дізналися деякі учні професора і серед них брешіанець Фіоре, який вирішив скористатися секретом свого вчителя. В Італії в XVI ст. стали популярними математичні диспути. У цих поєдинках було ще багато маскарадної декоративності і парадності, але вони привертали увагу суспільства до науки. Успіхи в таких змаганнях приносили грошову винагороду, пошану, збільшували шанси на вищу посаду.

Тарталья відмовився допомогти де Кої, навіть дорікав його за те, що той пропонує йому нерозв'язні задачі. Та через деякий час він знайшов спосіб побудови графіка кубічного рівняння виду (1), яке має даний ірраціональний корінь. Цей маленький успіх окрилив Тарталью, і він скрізь заявляв, що «володіє великим алгебраїчним секретом». Нахваляння Тартальї дійшло до Фіоре. Останній був глибоко переконаний, що «скоріше божественне, ніж людське» відкриття дель Ферро не під силу самоуку Тартальї, і той або помиляється, або просто говорить неправду. Щоб провчити уявлюваного конкурента, Фіоре викликає в 1535 р. Тарталью на публічний диспут. Суперники мали обмінятися через нотаріуса тридцятьма задачами, на розв'язування яких відводилося п'ятдесят днів. Переможцем визнавався той, хто розв'яже більше задач. Той, хто програє, повинен оплатити обід переможцеві і його 29 друзям та ще по 5 сольді за кожну розв'язану задачу. Після укладання умови на диспут Тарталья довідався, що Фіоре знає (від дель Ферро) формулу розв'язання рівнянь виду (1). А коли так, то не було сумніву, що запропонує задачі саме на рівняння цього типу. Тарталья пізніше писав, що «він приклав все своє завзяття, старанність і вміння, щоб знайти правило рівнянь, і це вдалося йому за 10 днів до строку, тобто 12 лютого, дякуючи щасливій долі». Наступного дня Тарталья знайшов спосіб розв'язування кубічних рівнянь виду

$$x^3 = ax + b \tag{2}$$

і сміливо чекав поєдинку. Його прогноз повністю підтвердився. Усі тридцять задач Фіоре зводилися до рівнянь типу (1), і Тарталья розв'язав їх за дві години. Фіоре ж і за 50 днів не розв'язав жодної задачі Тартальї, які він відібрав з різних розділів алгебри і геометрії.

Звістка про блискучу перемогу і відкриття Тартальї швидко поширилася по всій Італії. Турнір приніс переможцеві і славу вченого, і заздрість суперників. Почалося справжнє полювання за методом розв'язування кубічних рівнянь. Приятелі і недруги умовляннями, погрозами або за винагороду прагнули дізнатися у Тартальї його таємницю. Та він збирався опублікувати своє відкриття у великому трактаті з алгебри. Після довгих років поневірянь Тарталья збирався, нарешті, спокійно віддатися улюбленій справі.

Та не так склалося, як гадалося... Задача, яку розв'язав скромний «магістр абаку», стояла в центрі наукових інтересів іншого вченого — Джероламо Кардано. Його біографія, безумовно, заслуговує на детальний виклад і ми ще раз повернемося до початку століття.

Джероламо був позашлюбним сином юриста Фаціо Кардано. У дитинстві він бачив більше різок, ніж ласки. Мати, для якої Джероламо був ганьбою і тягарем, завжди його била, батько, який не жив із сім'єю, обмежив свою участь у вихованні сина теж побоями. Коли хтось з них пропускав нагоду відлупцювати нещасного, це негайно робила тітка. Хлопець дуже часто хворів, тому перші роки свідомого життя залишилися в його пам'яті суцільним болем, страхом і відчаєм. Тяжке дитинство позначилося на характері майбутнього вченого. Він ріс замкненим і похмурим. А в п'ятнадцять років обирає шлях свого життя — прославитися написанням книг. Робота над рукописами двох перших праць показала, як він мало ще знає. Але батько не відпускав його вчитися, і Джероламо потрапляє в компанію сумнівної репутації, де оволодіває мистецтвом азартних ігор і навіть завербовується в запасне військо.

У 1515 р. він став студентом університету в Павії, а завершив освіту по спеціальності медика в Падуанському університеті. Після смерті батька залишилася невелика спадщина, хоча на неї було багато претендентів, і тільки через 23 роки судових перипетій Джероламо довів своє право на спадщину. Студентські роки він згадував, як «мерзоту сарданапальського життя».

У той час ректора університету в Падуанському університеті обирали із студентів. І хоча Джероламо за поганий характер і злий язик боялися професори і ненавиділи студенти, він виставляє свою кандидатуру. Країну роздирали війни, а посада ректора вимагала значних фінансових витрат, тому й мало кого вона цікавила. У нового претендента не було навіть конкурентів. Проте його обрали тільки після двох турів — більшістю в один голос. Посада ректора принесла більше неприємностей, ніж слави. У 1526 р.

Кардано тільки після трьох турів голосування був визнаний достойним ступеня доктора медицини.

Молодий доктор медицини оселився в невеличкому місті Сакко поблизу Венеції. На прохання матері він пробував влаштуватися в Мілані, але устав міської колегії лікарів забороняв приймати в ряди колегії незаконнонароджених. А його батько й мати узаконили свій шлюб тільки в 1524 р. Після одруження він зробив ще одну спробу стати членом міланської колегії лікарів, та, зазнавши невдачі, переїхав у невеличке містечко Галларт у 24 мілях від Мілана.

Про життя в Галларті Кардано пізніше згадував: «...Я перестав бути бідним, бо в мене в той час уже не лишилося нічого». Але й на грані голодної смерті доктор медицини без пацієнтів і засобів на існування самовіддано пише трактати з медицини, філософії, астрології. У цей час він став батьком.

Щоб утримати сім'ю, довелося виконувати будь-яку роботу — складати календарі і гороскопи, давати приватні уроки, платні консультації, читати публічні лекції, підробляти грою в карти і кості. Потім він переїздить у Мілан і, оселившись у будинку для бідняків, робить третю спробу домогтися лікарської практики. І тут до нього нарешті прийшов успіх лікаря: у 1535 р. колегія міланських лікарів дозволяє йому лікувати, хоча тільки після консультацій у повноправних членів колегії. Ображений Кардано відповів на рішення колегії книжкою, яка побачила світ у 1536 р. і стала першим друкованим твором Кардано. Міланських лікарів книжка Кардано, який по суті звинуватив їх у невігластві, розлютила. Вони вважали, що ексцентричний доктор медицини надто захоплюється математикою, астрологією й азартними іграми і тому не може бути хорошим лікарем, а тим більше повчати інших, як лікувати хворих. У рік

виходу книжки в Кардано з'явився майже неписьменний, хоча й надзвичайно обдарований слуга Лодовіко Феррарі (1522—1565). Через деякий час він став секретарем і улюбленим учнем Кардано. Зазнавши невдачі з першою друкованою книжкою, присвяченою медицині, Кардано починає працювати над великим трактатом з арифметики і довідується про відкриття дель Ферро й успіх Тартальї. Він розумів, що це відкриття було б кращою окрасою його книжки, вирішальною сходинкою до слави. Тому, виявивши фантастичну винахідливість і давши клятву нерозголошення, Кардано вирвав секрет у Тартальї. Проте не раз повторена клятва і попередження Тартальї утримали Кардано від порушення даного слова. Книжка побачила світ (1539 р.) без «великого алгебраїчного секрету» Тартальї. Вона принесла авторові великий успіх — стала початком його слави як математика. Кардано вислав Тартальї свою книжку, щоб переконати, що клятва не порушена, бо надрукована книжка не має нічого спільного з відкриттям Тартальї, але приписав, що, як тільки він захоче, опублікує формулу. Звістка міланця стурбувала Тарталью, і він припиняє листування з ненадійним кореспондентом. У рік, коли виходила «Практика арифметики», міланська колегія лікарів прийняла, нарешті, Кардано повноправним членом, змінивши заради цього свій устав: членами колегії тепер могли стати і ті, чиї батьки одружувалися після народження майбутніх лікарів.

Протягом 1540—1545 р. Кардано поширює спосіб Тартальї на розв'язування в радикалах повних кубічних рівнянь, а Феррарі знаходить спосіб розв'язування в радикалах рівнянь 4-го степеня. У 1542 р. Кардано разом з Феррарі побували в Болоньї, де зять Феррарі показав їм математичний рукопис свого покійного тестя. Там вони й побачили формулу, яку Тарталья назвав своєю. Виявляється, він не першим відкрив «велике правило», і тому немає потреби питати в нього дозволу на публікацію.

Кардано починає інтенсивну роботу над систематичним викладом всього, що відомо йому з алгебри, і на початку 1545 р. побачила світ його книжка «Велике мистецтво, або Про правила алгебри», яка принесла авторові найбільший літературний і творчий успіх. «Велике мистецтво» Кардано, «Про обертання небесних сфер» (1542) Коперника і «Про будову людського тіла» (1543) Везалія були вільні від схоластики та сліпого поклоніння традиції і знаменували початок нової науки.

Результати Ферро, Тартальї, Кардано і Феррарі справили глибоке враження на сучасників і мали величезне значення для дальшого прогресу алгебри і всієї математики. Перед наукою відкривалися нові глибокі проблеми, насамперед питання про розв'язність у радикалах рівнянь вищих степенів, яке привело спочатку до створення теоретико-групового методу досліджень, а потім і одного з найбільш глибоких і плідних розділів сучасної математики — теорії груп. Менше ніж за п'ятдесят років Ферро, Тарталья, Кардано, Феррарі вичерпали можливості алгебраїчних методів розв'язування рівнянь. Цей факт, хоча й не зовсім строго, вперше довів теж італійський математик доктор медицини Паоло Руффіні (1765—1822), а остаточно — у 1824 р. геніальний норвезький математик Нільс Хенрік Абель (1802—1829). Він довів, що ні для якого $n \geqslant 5$ не можна назвати формулу, яка подавала б корені будь-якого рівняння n-го степеня через його коефіцієнти за допомогою радикалів.

Міркування Ферро, Тартальї і Кардано дуже близькі до виведення формули розв'язування кубічних рівнянь у сучасних підручниках. Повне кубічне

рівняння $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ підстановкою $y = x - \frac{a}{3}$ зводиться до рівняння відносно змінної x, яке не містить x^2, тобто рівняння

$$x^3 + px + q = 0. \tag{3}$$

Нехай

$$x = u + v, \tag{4}$$

тоді

$$x^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3. \tag{5}$$

Помноживши рівність (4) на $3uv$, дістанемо

$$3uvx = 3u^2 v + 3uv^2, \tag{6}$$

а віднявши почленно від рівності (5) рівність (6), матимемо:

$$x^3 - 3uvx = u^3 + v^3. \tag{7}$$

Порівнюючи рівності (3) і (7), бачимо, що $3uv = -p$, $u^3 + v^3 = -q$.

Тому $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$, $v^3 = -(q + u^3)$, $u^3 (u^3 + q) = \frac{p^3}{27}$, $u^6 + u^3 q - \frac{p^3}{27} = 0$, або

$$z^2 + zq - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{8}$$

де $z = u^3$.

Розв'язуючи рівняння (8), дістанемо:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

звідки

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

і, нарешті, $x = u + v$.

Кардано і його сучасники зустрілися з новим явищем. У випадку, коли всі коефіцієнти і корені рівняння (3) були дійсними, за формулою «великого мистецтва» доводилося під кубічними коренями добувати квадратний корінь з від'ємного числа. Наприклад, для рівняння

$$x^3-21x+20=1 \qquad (9)$$

$$x=\sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}}+\sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}, \qquad (10)$$

хоча воно має дійсні корені: $\{(-5), 1, 4\}$.

Робилися відчайдушні спроби звільнити формулу (10) від добування квадратного кореня з від'ємного числа, що призводило до абсурдних, неіснуючих або софістичних чисел. Але пошуки були марними. Тому цей випадок і було названо незвідним. Так логіка розвитку самої математики змусила математиків зробити наступний крок у розширенні поняття числа — ввести в практику математики комплексні числа. Ці надзвичайно важливі математичні об'єкти виникли з потреб математики, але потім почали широко застосовуватися в найрізноманітніших галузях математики та її практичних застосуваннях — гідро- і аеродинаміці, біології, техніці, космонавтиці тощо.

Користь комплексних чисел розумів уже Кардано, правила дій над ними чітко виклав італійський математик і інженер Рафаель Бомбеллі (бл. 1526— бл. 1573). Він також пояснив, чому кубічне рівняння в незвідному випадку має дійсний корінь, хоча він подається через кубічні корені з уявних чисел.

Не можна позбутися відчуття, що кожний учасник описаного алгебраїчного марафону був все-таки лицарем на годину. Їх вели до слави не круті дороги сходження на вершину, а випадковий азарт, особливо характерний для відчайдушного і на все готового Кардано.

На тому, чим відомі в історії математики Тарталья і Кардано, можна було б ставити крапку. Кожному з них судилося пройти різні дороги, але зоряні години творення були позаду.

Віроломство Кардано обурило Тарталью, і він використав всі доступні йому засоби, щоб помститися відступникові. Кардано тримався в тіні, підставивши для поєдинку з «магістром абаку» Феррарі. Взаємні образи і лайки супротивники відсилали один одному не тільки в листах, їх розповсюджували і друкарським способом.

Нарешті, 10 серпня 1548 р. Тарталья і Феррарі, який захищав честь вчителя, зустрілися в Мілані на публічному диспуті. Тарталья приїхав у невідоме місто лише вдвох з братом, а Феррарі, про якого говорили, що він «людина з обличчям ангела і серцем сатани», привів цілий натовп своїх друзів. Змагання проходило в нерівних умовах. Тарталі майже не давали можливості висловлювати свої думки, в той час як Феррарі навмисне довгими промовами зволікав змагання. Побоюючись, що вночі в невідомому місті диспут можуть завершити наймані вбивці, Тарталья непомітно залишив поєдинок і місто. Це дало підстави його супротивникам вважати себе переможцями. Невдачі чекали покривдженого і в рідному місті. Йому відмовили в роботі, не заплатили навіть за прочитані лекції. Він повернувся до Венеції, де працював і прожив у бідності до самої смерті. За дев'ять років Тарталья опублікував дві книжки «Загальне правило для підняття будь-якого затопленого корабля...» і «Загальний трактат про число і міру».

Перемога Феррарі принесла йому славу, йому пропонували читати лекції, служити в знатних осіб і навіть викладати сину імператора. Він обрав посаду начальника податного відомства в герцогстві Мантуя, потім служив у кардинала Мантуї і нарешті переїхав у Болонью, де дістав кафедру математики, але в жовтні того самого року несподівано помер, ніби від отруєння.

У кінці 1562 р. Кардано переїздить до Болоньї, де працює професором медицини. Продовжує писати нові праці з натурфілософії, медицини, математики. Величезний історичний матеріал учений виклав у книзі «Про ігри в кості». У ній та інших своїх працях Кардано розв'язав цікаві задачі на підрахунок величин ставок під час гри в кості і задачі комбінаторного характеру. Це був значний крок у розвитку теорії ймовірностей, учений підійшов до розуміння статистичної закономірності, висловив деякі міркування щодо питань, з яких пізніше викристалізувалася одна з основних теорем теорії ймовірностей — закон великих чисел. Нарешті, вчений близько підійшов до означення ймовірності через відношення рівноможливих подій.

(Слід віддати належне й Тартальї в становленні комбінаторики і формуванні перших ймовірнісних уявлень. У «Загальному трактаті про число і міру» він розв'язав задачі на поділ ставок у грі, розглядав різні питання комбінаторики, які тісно переплелися з ймовірнісними).

Проте скоро Кардано потрапив у застінки інквізиції, а все його майно конфіскували. Через сім місяців його випустили під заклад, але ще 76 днів учений жив під домашнім арештом, крім того, його позбавили права друкувати свої твори і викладати в університеті.

Впливові друзі виклопотали Кардано невелику пенсію і у вересні 1571 р., назавжди залишивши північну Італію, він переїхав у Рим.

Причиною арешту, очевидно, були необережні висловлювання міланця про релігію. Його звинуватили,

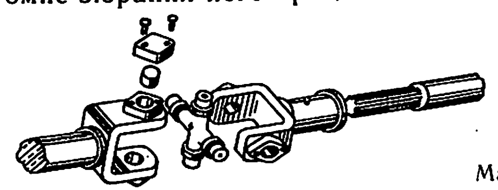
якщо не в атеїзмі, то принаймні в недостатній вірі в християнські догмати. У книжках знаменитого лікаря можна було знайти багато єретичних думок. Чого вартий був один гороскоп Христа! Недаремно в працях видатного італійського філософа атеїста Джуліо Чезаре Ваніні (1585—1619), спаленого за вироком інквізиції, історики нарахували понад 170 посилань на праці Кардано.

Католицька реакція йшла в наступ на все прогресивне, що могло похитнути її безроздільне панування над життям і самою смертю людей.

У 1542 р. папа Павло III заснував у Римі центральний інквізиційний трибунал, а в 1559 — Павло IV видав «Індекс заборонених книг», за яким категорично не дозволялося «переписувати, видавати, друкувати, давати з метою обміну або для якихось інших цілей приймати відкрито або таємно, тримати в себе або віддавати на збереження книжки або рукописи з тих, кого зазначено в цьому індексі святої служби».

У 1575 р. Кардано залишив лікарську практику і почав працювати над однією з останніх своїх книжок — «Про моє життя». Після його смерті поширилася легенда, що він, щоб підтримати свою репутацію знаменитого астролога, уморив себе голодом, коли, згідно з гороскопом, провістив собі кінець. Більшість не вірить у реальність легенди, хоча від такої людини, якою був Кардано, всього можна чекати.

Кардано залишив велику літературну спадщину. Десятитомне зібрання його праць містить 138 робіт,



Мал. 16

які займають 7000 сторінок великого формату — in folio. Кардано обговорював різні проблеми філософії, медицини, політики, юриспруденції, хімії, геології, мінералогії, астрономії і астрології. Його називають першим теоретиком машинобудування. Карданний вал, карданні зчеплення, карданні підвіси або просто кардан — все це його винаходи (мал. 16). І хоча такі підвіси були відомі вже античним і арабським інженерам, цілком можливо, що міланець прийшов до ідеї такого підвісу самостійно. У шифрувальній справі відомі «решітки Кардано», їх широко використовували дипломати XVI і XVII ст. Багато інших складних і дрібних машин, механізмів і пристроїв або винайдені Кардано, або описані з інших джерел і збережені для потомства.

Задачі Тартальї

1. На деякому відрізку AB побудувати за допомогою даного розхилу циркуля, який не дорівнює $|AB|$, і лінійки рівносторонній трикутник.

2. Дехто має 24 фунти дорогоцінного масла. У нього є ще посудини на 13, 11 і 5 фунтів. Як, користуючись ними, розділити масло на три рівні частини?

Задачі Кардано

1. Розв'язати елементарним методом рівняння: а) $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$; б) $2x^3+2x^2+25=16x+55$.

2. Розкласти число 10 на такі два доданки, щоб їх добуток дорівнював 40.

3. Побудувати спільну дотичну до двох даних кіл.

ФРАНСУА ВІЄТ

(1540—1603)

У творах Вієта підводиться своєрідний підсумок математики епохи Відродження.

К. О. РИБНИКОВ

Удосконалення техніки розв'язування рівнянь стимулювалося й розвитком самої математики, і запитами практики — потребами мореплавства, землемірства, астрономії, інженерної, зокрема військової, справи. Але на шляху розвитку загальної теорії алгебраїчних рівнянь і способів їх розв'язування були значні труднощі. Насамперед практична незручність формул Тартальї — Кардано і Феррарі, недосконалість існуючої символіки, яку справедливо називають засобами виробництва математики. Тому з кінця XV ст. відбувається швидкий перехід від словесної (риторичної) алгебри до алгебри символічної, спочатку скороченням слів, а потім і введенням спеціальних символів. Велика заслуга в створенні системи алгебраїчної символіки і вдосконалення на її основі теорії алгебраїчних рівнянь належить видатному французькому математику Франсуа Вієту.

Народився Вієт у місті Фонтене-ле-Конт, провінції Пуату. Закінчивши юридичний факультет університету в Пуатьє, він з 19 років розпочав приватну адвокатську практику в рідному місті. Молодого юриста цікавили природничі науки, насамперед астрономія, і він починає вдосконалювати птолемеєву систему світу. Для цього треба було добре знати математику. Тому вся його робота над математикою мала стати підготовкою до створення великого астрономічного трактату, який з різних причин і не був написаний. Світ математики виявився безмежним і приховував у собі не менше загадок, ніж космос. Їх вистачило на все життя.

У 1567 р. Вієт залишив приватну адвокатуру і перейшов на державну службу членом окружного суду (парламенту) в Ренні. Інтенсивні заняття математикою викликали потребу спілкуватися з іншими математиками. Вієт здійснював це друкуванням невеликих своїх брошур, які розсилав знайомим ученим. Нарешті, в 1579 р. побачили світ дві перші книжки великої праці з тригонометрії «Математичний канон». На жаль, численні друкарські помилки знецінили це видання і, за винятком кількох примірників, автор знищив його.

Щоб особисто ознайомитися з французькими математиками, насамперед із знаменитим філософом і математиком П'єром де ла Раме (Рамусом) (1515—1572), Вієт у 1571 р. переїздить до Парижа, де займається приватною адвокатурою. Тут він пережив страшну Варфоломіївську ніч — масове вбивство католиками протестантів, однією з жертв якої був і Рамус.

Одруження учениці Вієта з герцогом де Роганом сприяло знайомству вченого з майбутнім королем Франції Генріхом III і швидкому просуванню по службі. Він стає приватним радником, а потім «доповідачем з клопотань» короля. Але через придворні інтриги вченого в 1584 р. усунули від посади.

Не дивлячись на тривоги і зигзаги життя, Вієт, замкнувшись у своїй садибі, віддається математиці,

яка остаточно витіснила астрономічні інтереси. Він міг по три доби не відходити від письмового столу. Глибоке вивчення праць Архімеда, Евкліда, Аполлонія і Діофанта, своїх безпосередніх попередників — Тартальї, Кардано, Бомбеллі він поєднував з інтенсивною роботою над власними творами, зокрема найбільшим твором — «Мистецтво аналізу».

Через п'ять років Вієт повертається до служби при дворі і робить королеві послугу, яка принесла вченому популярність, хоча й мало не коштувала життя.

Ворожі королю угрупування змовилися з іспанським двором і в умовах франко-іспанської війни стали великою небезпекою для країни. Свої ворожі дії вони здійснювали таємним листуванням з іспанським двором. Французький двір перехопив кілька таких листів, але ніхто не міг розгадати використаний у них шифр, який складався з п'ятисот знаків. На прохання короля листи іспанських шпигунів почав вивчати Вієт і розкрив секрет їхнього шифру. Це дало значні переваги французам. Знаючи наміри супротивника, французька армія завдала поразки Іспанії. Зрештою, там зрозуміли, що таємницю славнозвісного шифру розкрито, дізналися також, хто це зробив. Оскільки інквізитори вважали, що їхній винахід недоступний людському розуму, то виходило, що Вієт скористався послугами сатани. А тому над життям вченого нависла смертельна небезпека. Навіть королі бували безсилими в поєдинку з католицькою церквою. Так, у 1589 р. Генріха III було вбито за зраду католицької партії. На щастя для науки Генріх IV не видав ученого.

1594 рік приніс Вієту всеєвропейську популярність. Якось нідерландський посол розмовляв з Генріхом IV про видатних учених і зауважив, що Франція не має математиків. Адже нідерландський математик Андріян ван Роомен (1561—1615), посилаючи європейським ученим свою задачу-виклик, не назвав жодного француза. Король заперечив і наказав викликати Вієта. Коли вчений з'явився, посол показав йому задачу Роомена. Треба було розв'язати рівняння 45-го степеня.

Ледве прочитавши умову задачі, Вієт відразу ж написав один розв'язок, а наступного дня прислав ще 22. Згодом Роомен став палким шанувальником таланту Вієта. У 1601 р. він спеціально приїхав для зустрічі з Вієтом. Господар був таким гостинним і щедрим, що оплатив гостеві дорогу назад на батьківщину. Розв'язання цього рівняння, опубліковане в 1594 р., принесло вченому світову славу.

Незадовго до смерті Вієт захворів і відійшов од роботи. Є думка, що агенти інквізиції все-таки вбили його, таємно.

Результати Вієта згадуються в різних розділах математики. Найважливіші з них стосуються алгебри. Він прагнув перетворити алгебру в потужне математичне числення. Успіхи італійських математиків спиралися на ефективність алгебраїчних прийомів. Але число окремих випадків, кожний з яких вимагав особливого алгоритму, швидко зростало. У Кардано їх було вже 66. На порядку денному стояло створення загального методу розв'язування рівнянь у загальнішому виді і з буквеними коефіцієнтами. Такі методи і прагнув створити Вієт. Для цього він розробив символіку, в якій, крім символів змінних, уперше вводилися символи для довільних величин, тобто параметрів. Вієт увів слово «коефіцієнт». Символіка Вієта ще недосконала, громіздка. У ній багато скорочених і навіть нескорочених слів, зберігся вплив геометричних уявлень. Наприклад: Acubus + Bplanum in A 3 aeguatur D solido ($A^3+3AB=D$).

Це був великий крок уперед. Адже вперше стало можливим подати рівняння та їх властивості формулами. Виклад Вієта — це вже не зібрання рецептурних правил, а загальна теорія питань, пов'язаних, наприклад, з розв'язуванням рівнянь перших чотирьох степенів.

Розв'язуючи рівняння, вчений широко використовував метод підстановок $x=y+k$, щоб виключити x^2; $x=\frac{y}{k}$, щоб виключити $\sqrt{x}$; $x=ky$, щоб позбутися дробових коефіцієнтів, і т. д. Знаходив лише додатні корені рівнянь, хоча перетворення $x=-y$ вже було підходом до відшукування й від'ємних коренів.

Розвиваючи результати Кардано, вчений відкрив названу його ім'ям славнозвісну теорему про співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена.

Нехай $f(x)$ — многочлен степеня n з коефіцієнтами з деякої числової множини і старшим коефіцієнтом 1. Тоді над числовою множиною, яка містить усі корені $f(x)$, цей многочлен розкладається на лінійні множники: $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+$ $+a_1x+a_0=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, де α_i — корені $f(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

З теореми Вієта випливають такі відношення:

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n),$$
$$a_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$
$$\alpha_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

Вієт знайшов ці відношення для всіх n, хоча із застереженням — для додатних коренів. Окремим випадком відкритої залежності є теорема Вієта для квадратних рівнянь. (Див.: «Алгебра-7», п. 46).

Вчений розробив також початки теорії симетричних функцій і розкладу многочленів на лінійні множники. Останній результат допоміг ученому відкрити основну теорему алгебри про число коренів алгебраїчного рівняння довільного степеня.

Вієт не вводив від'ємних і комплексних чисел, тобто чисел виду $a+bi$, де $i=\sqrt{-1}$. Але він побудував своєрідне числення трикутників, витримане в стилі античної строгості й одночасно рівносильне численню комплексних чисел. Можливо, що Вієт уже знав про введені італійським математиком Бомбеллі уявні числа та дії над ними ($i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ і т. д.). Він не міг допустити такого нововведення і прагнув надати йому строгості античної геометрії. Справді, введені вченим операції породження з двох даних трикутників третього трикутника відповідають діям множення і ділення комплексних чисел. Користуючись ними, він вивів формулу для $(a+bi)^n$, де $n \in N$.

Будучи блискучим обчислювачем, Вієт розробив метод наближеного розв'язування алгебраїчних рівнянь з числовими коефіцієнтами, який застосовувався до кінця XVII ст., поки Ньютон не винайшов простішого. Йому вдалося встановити, що знаменита задача трисекції кута пов'язана з кубічним рівнянням $x^3-3x=1$ і розв'язання кубічного рівняння в незвідному випадку зводиться до задачі трисекції кута.

З рекурентних відношень виду $\sin(x+y)$ та $\cos(x+y)$:

$$\cos mx=2\cos x\cdot\cos(m-1)x-\cos(m-2)x,$$
$$\sin mx=2\cos x\cdot\sin(m-1)x-\sin(m-2)x,$$
$$\sin mx=2\sin x\cdot\cos(m-1)x+\sin(m-2)x,$$
$$\cos mx=-2\sin x\sin(m-1)x+\cos(m-2)x$$

він відкрив важливі формули для синуса і косинуса кратних дуг:

$$\sin mx=m\cos^{m-1}x\sin x-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}\times$$
$$\times\cos^{m-3}x\sin^3x+\ldots$$
$$\cos mx=\cos^m x-\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\cos^{m-2}x\sin^2x+\ldots$$

Вієт знав алгебраїчні рівняння, що відповідають діленню кута на 5 і 7 конгруентних частин, і закон утворення коефіцієнтів для $\sin mx$ і $\cos mx$. Отже, немає нічого дивного в тому, що вчений швидко розв'язав задачу-виклик Роомена. Учений відразу побачив, що a — сторона вписаного в круг правильного 15-кутника, тобто хорда дуги в 24°, а за коефіцієнтами першого і передостаннього членів рівняння встановив, що x — це хорда $\frac{1}{45}$ дуги в 24°, тобто $\frac{8}{15}$. 22 додатні розв'язки, які повідомив Вієт другого дня, були: $2\sin\frac{360°p+12°}{45}$ $(p=1, 2, \ldots, 22)$.

Незабаром після випадку із задачею Роомена Вієт сам запропонував ученим знамениту задачу Аполлонія, розв'язання якої було втрачене (див. с. 60), і дав красиву геометричну побудову її тільки за допомогою циркуля і лінійки. Цим самим він подав приклад відновлення загублених праць Аполлонія та інших математиків.

Прекрасним зразком синтезу алгебраїчних, геометричних і тригонометричних ідей є оригінальне відкриття — подання числа π у вигляді нескінченного добутку:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots$$

Це був перший випадок використання нескінченних добутків, якими потім блискуче користувався Л. Ейлер.

У творчості Вієта завершувалося формування алгебраїчної символіки. І не дивлячись на те, що в алгебрі було ще багато недоробленого й нез'ясованого, вона являла собою досить повне коло знань і до кінця XVI ст. завершила цикл свого формування.

Математична спадщина Вієта — це своєрідний підсумок математики епохи Відродження. Паралелізм між властивостями рівнянь і геометричними побудовами відіграли свою позитивну роль у формуванні ідей аналітичної геометрії XVII ст. Отже, те, що у Вієта й інших математиків XVI ст. було геометричним рудиментом, стало вихідним пунктом розвитку аналітичної геометрії в наступному столітті.

На порядок денний математики XVII ст. ставили вже інші задачі. Центр ваги зміщувався до математики змінних величин.

Задачі

1. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корені алгебраїчного рівняння $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$, то $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, $a_2 = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$, $a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n), \ldots,$
$a_n = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n$.

2. Якщо y і z — корені рівняння $ax^m - x^{m+n} = b$, то

$$a = \frac{y^{m+n} - z^{m+n}}{y^m - z^m}, \quad b = \frac{y^{m+n}z^m - y^m z^{m+n}}{y^m - z^m}.$$

3. Спростивши добуток $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^3}\ldots$ $\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}$, вивести формулу Вієта для числа $\frac{2}{\pi}$.

ЙОГАНН КЕПЛЕР
(1571—1630)

Серед глибокої темряви незнання, лише обмацуючи всі стіни, міг я добратися до світлих дверей істини.

Й. КЕПЛЕР

Треба бути справді великим, щоб в епоху спустошливих воєн, вогнищ інквізиції і полювання на «відьом», витримати відміряні тортури долі і не загубитися на роздоріжжі чотирьох століть.

Народився Кеплер у маленькому німецькому містечку Вейль-дер-Штадті в бідній протестантській сім'ї. Ріс кволим, хворобливим. Якщо добавити ще короткозорість і вкрай несприятливі умови життя, то не можна не дивуватися, як він не тільки вистояв, а й збагатив науку неоціненними скарбами своїх відкриттів. Не випадково на запитання: «Ваш улюблений герой?» — Маркс відповів: «Спартак, Кеплер».

Батько, за характеристикою Йоганна,— «людина злоблива, вперта, сварлива» — безславно загинув, залишивши дружину і малолітніх дітей з дуже скромними засобами до існування. Перший хліб Йоганну довелося заробляти, прислужуючи в шинку, потім його примусили господарювати біля землі. Однак це заняття через його хворобливість виявилося для нього непосильним. Він почав навчатися в монастирській школі, що приносило йому велику радість.

Учителі швидко помітили блискучу пам'ять, кмітливість і старанність Йоганна. Відміннику навчання пророкували прибуткову професію богослова, і 17 вересня 1589 р. Кеплер після закінчення вищої семінарії вступає до Тюбінгенського університету. Студіюючи богословські науки, він водночас захоплюється мистецтвом, астрономією, математикою, пише і друкує вірші, бере участь у театралізованих виставах. Красу і логічну гармонію математичних законів йому відкрив професор університету Местлін (1550—1630). Забуваючи часто про молитви, студент, якого готували до богословської діяльності, годинами розплутував формули, вгадуючи за рядами числових відношень ще не розкриті закони природи. Його екзальтовану поетичну натуру особливо вразила грандіозність і гармонія просторових форм Всесвіту, про яку він дізнався з вчення Коперника. Захоплення Кеплера ідеями геніального польського вченого і прагнення критично осмислити деякі богословські догми стали відомими університетському начальству. Його визнали недостойним пасторського сану і відрядили професором математики й моралі в семінарію південноавстрійського міста Грац.

Слухачів математики в семінарії майже не було, і молодий магістр філософії, викладаючи різні предмети, більшу частину часу затрачає на випадкові підробітки, складає календарі, альманахи і одночасно поглиблює знання з астрономії. Важкими були перші кроки самостійного життя... На жаль, і до останніх днів злою супутницею Кеплера залишилася бідність. Ні наукові успіхи, ні високі посади, які він займатиме пізніше при дворах високопоставлених осіб і навіть імператорів, не врятують його від злигоднів і постійних турбот про хліб. З болем, ніби виправдовуючись за провину, він пізніше згадуватиме: «Якщо складаю календарі й альманахи,

то це, без сумніву,— велике рабство... Але краще видавати календарі з пророцтвами, ніж жебракувати... Астрологія — дочка астрономії, хоча й незаконна, і хіба не природно, щоб дочка годувала свою матір, яка інакше могла б вмерти з голоду».

Перший календар Кеплера на 1594 рік містив вдалі передбачення погоди, і тому з цього часу він став відомим як провісник й астролог. Усі розрахунки в своїх перших календарях Кеплер виконав за введеним 15.X 1582 року в деяких країнах Європи григоріанським календарем, бо вважав, що він точніше відповідає змінам природних явищ, ніж юліанський. За це одновірці-протестанти, які вважали, що краще розійтися із Сонцем, ніж зійтися з папою римським і його календарем, прокляли вченого, а календарі його спалили.

У першій своїй науковій праці «Космографічна таємниця» (1597) вчений і прагнув розкрити «таємницю божественної архітектури в будові Сонячної системи». Закони планетних відстаней він намагався дістати, пов'язавши кожну геліоцентричну планетну сферу з вписаним і описаним навколо неї правильним многогранником. Штучна гіпотеза не розв'язувала задачі, і автор не досяг поставленої мети. Пам'ятником цієї idée fixe залишилася лише модель надуманої закономірності — знаменитий «Космічний келех» Кеплера. Проте вчені того часу Галілей (1564—1642) і Тіхо Браге (1546—1601) відмітили неабияке обдарування автора «Космографічної таємниці».

Далі життя вченого складалося все більш драматично. Новий правитель Штірії, вихованець ієзуїтів, поклявся викоренити лютеранську єресь. Під загрозою смерті всім протестантським проповідникам і вчителям школи, де працював Кеплер, було наказано залишити Грац до заходу Сонця 17 вересня 1598 р.

Кеплер виїжджає до Угорщини. Через місяць дозволили повернутися з охоронною грамотою, бо його вже цінували як відомого вченого і сподівалися переманити в католицтво. Але залишатися в Граці було небезпечно. У вересні 1600 р. він із сім'єю переїздить до Праги і починає працювати помічником Тіхо Браге, який на той час займав посаду астронома і математика при дворі імператора Рудольфа. Спільну працю двох учених, які не завжди мирилися між собою, перервала раптова смерть Браге.

Опрацьовуючи матеріали Браге спостережень руху Марса, Кеплер виявив розходження у 8 мінут дуги між теоретичними координатами і фактичною позицією планети, але не знехтував навіть такою незначною похибкою,— йому потрібна була тільки істина. До неї вели 9 років каторжної обчислювальної роботи, безкомпромісна боротьба з віковою традицією і самим собою, щоб розірвати чари рівномірного кругового обертання Марса навколо Сонця. У результаті 8 мінут розворушили всю Сонячну систему.

Головний зміст книжки «Нова астрономія, або небесна фізика...» (Прага, 1609) становив перший з трьох знаменитих законів Кеплера, встановлений спочатку для Марса, а потім для інших планет. Усі планети обертаються навколо Сонця по еліпсах. В одному з фокусів еліпса розміщене Сонце. У «Новій астрономії» містилися вражаючі і тепер геніальні здогади про природу і властивості тяжіння, а також було розкрито принцип інерції. Кеплер вже відкрив і другий закон руху планет про те, що площі, описувані радіусами-векторами, пропорційні часу, але опублікував його лише в «Короткій коперниковій астрономії» (1618—1622) після доведення, яке задовольняло всі вимоги строгості.

Кажуть, що лихо часто є початком майбутнього

щастя. У Кеплера ж після скрутного становища завжди наставало ще скрутніше. Так було в Граці, так сталося і в Празі. Імператорська каса завжди була порожньою, і дружині вченого доводилося буквально випрошувати копійки, щоб годувати сім'ю. Війна принесла епідемію, від якої вмирають дружина і старший син. Учений залишається з двома малолітніми дітьми на руках. Грошей йому не платять, і, маючи вже звання імператорського академіка, він змушений викладати математику у вищій школі м. Ленца (Південна Австрія).

Після другого одруження Кеплер, нарешті, почав вибиватися із злиднів. У 1615 р. він пише визначний математичний твір «Нова стереометрія винних бочок» (1615). Ученого вразило, що продавець вина, занурюючи лінійку в бочку з вином, одним виміром визначав об'єм вина в бочках різної форми і розмірів. Так народилася книжка, яка знаменувала нову епоху історії математики.

Саме тоді, коли життя почало налагоджуватися, на вченого чекали нові випробування. Кеплера звинуватили в єретицтві і відлучили од церкви, а в грудні 1615 р. прийшла страшна звістка, що його матір звинуватили в чаклунстві. Якщо врахувати, що протягом 1615—1729 рр. у рідному місті Кеплера Вейлі, яке нараховувало кілька сот жителів, спалили 38 «чаклунок», що тітка матері вченого, яка виховала її, теж була спалена, то можна було чекати найгіршого. Шість років тягнувся принизливий судовий процес. Кеплер оббивав пороги вельмож і суддів інквізиційного трибуналу, рятуючи матір від страшної розправи. Після 14 місяців ув'язнення, допитів Катерину Кеплер випустили вмирати на волю. У неї був важкий характер і надто гострий язик. Навіть на суді вона викликала небесні кари на суддів інквізиційного трибуналу.

У важкі роки боротьби за життя матері Кеплер написав і опублікував найбільшу (біля 1000 сторінок) і найпопулярнішу із своїх праць «Нариси з коперникової астрономії». Книжка була першим підручником геліоцентричної системи, в якій планети і відомі на той час супутники рухалися вже за введеними Кеплером законами. Тривоги сімейної трагедії поглиблював наступ реакції католицької церкви проти коперникового вчення. У 1617 р. в індекс заборонених книжок потрапляє геніальна книжка Коперника «Про обертання небесних сфер», а в 1619 р.— перший випуск «Нарисів з коперникової астрономії». У 1619 р. вийшла в світ «Світова гармонія...» — результат великої дослідницької і обчислювальної роботи. Книжка містила третій закон Кеплера: квадрати часів обертання планет навколо Сонця пропорційні кубам їх середніх відстаней од Сонця.

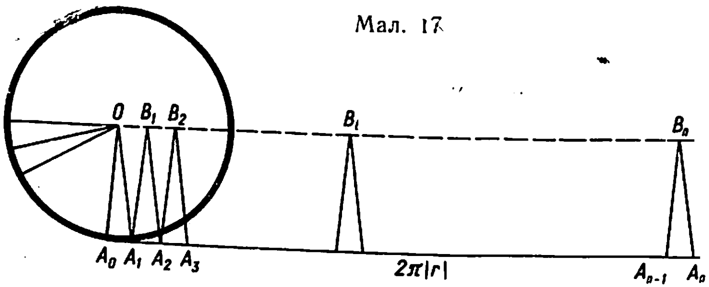
Країну між тим розтинала Тридцятилітня війна. Улітку 1620 р., коли друкувався другий випуск «Нарисів», м. Ленц зайняли баварські війська, а вченому доводилося по кілька разів на день ходити в друкарню із сторінками рукопису, читати коректуру, і кожний такий перехід міг бути останнім у його житті, бо «не раз доводилося пробиратися з дому в друкарню і назад поміж баварськими вояками, часто повз поранених і мертвих солдат і співгромадян».

Для вченого моральні страждання не закінчилися і після виправдання його матері. Для всіх він залишився сином і онуком чаклунок. Над ним весь час висіла загроза фізичної розправи. Якось будинок ученого оточив натовп фанатиків і тільки чудом він і сім'я врятувалися від самосуду. Він переїздить з одного міста в інше, живе без засобів існування. І скрізь, в умовах безнадійної бідності, відчай не зупиняє його подвижницької роботи. Улітку 1624 р.

Кеплер завершив працю, якій віддав 22 роки життя. Це були астрономічні планетні таблиці. Їх з нетерпінням чекали моряки, астрономи, укладачі календарів і, звичайно, астрологи. Поява їх у світ стала справжнім гордієвим вузлом, на розплутування якого пішло три роки,— половина всього життя, яке залишалося. Не було коштів, за які можна було б надрукувати книжку, потім не було де друкувати таке складне видання, яке ще живий Тіхо назвав на честь імператора «Рудольфівськими таблицями», потім з'явилися нащадки Тіхо і заявили свої права на таблиці. Нарешті, у вересні 1627 р. 1000 примірників великого фоліанта в 568 сторінок побачили світ.

Радість боротьби за вихід у світ нової праці скоро змінилася тривогами за незабезпечене, невлаштоване майбутнє. 57-річний учений змушений благати знайомих знайти йому будь-яку роботу, щоб можна було утримати сім'ю. Саме в цей час імператор Рудольф II дарує відомому полководцеві Валленштейну герцогство Макленбурзьке і зобов'язує виплатити Кеплеру свій велетенський борг. Щоб збільшити шанси на одержання багаторічної плати імператорського астронома і математика, вчений згоджується на посаду астролога Валленштейна, якому він вже колись складав гороскоп. Улітку 1628 р. сім'я вченого переїздить в м. Саган. Тут учений організовує друкарню і починає видавати спостереження Тіхо. У проміжках набирали книжку Кеплера «Сон», присвячену астрономії Місяця. Валленштейн теж не збирався розраховуватися за імператора. Тоді Кеплер йде на відчайдушний крок. Пізньої осені він вирішує їхати в Рогенсбург, щоб в особистій зустрічі з імператором розв'язати питання про борг. Грошей на місце в колясці не було, і Кеплер проїхав понад 400 км верхи на коні. У Рогенсбург він приїхав 2 листопада перевтомленим, знесиленим і застуджe-

Мал. 17



ним. Далися взнаки нестатки, тривоги і лихоліття всього життя. Хвороба швидко прогресувала, і 15 листопада опівдні великого трударя, подвижника і мученика науки не стало. Його поховали на лютеранському кладовищі за міською стіною. На скромному пам'ятнику викарбували епітафію, яку склав колись для себе сам Кеплер. Вона закінчувалася такими словами:

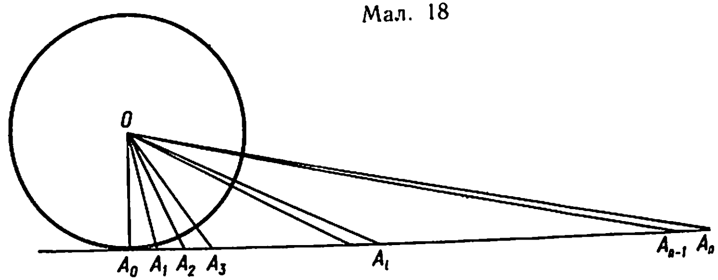
Я небеса вимірював, тепер тіні Землі вимірюю.
Дух на небі мій жив; тут же тінь тіла лежить.

Із часом кладовище було повністю зруйноване, і від могили Кеплера не залишилося й слідів. Тяжкі випробування чекали на нащадків ученого і на його рукописну спадщину. Після численних пригод 18 із 22 томів рукописів Кеплера викупила Росія, вони до цього часу зберігаються в Ленінградському відділенні архіву АН СРСР.

Кеплер був універсальним генієм і зробив внесок у науку, техніку, в літературу, різні розділи математики. Його ім'я перше серед провісників математики змінних величин.

Працюючи над другим законом руху планет, Кеплер уперше розв'язав задачу з явно поданими змінними: обчислив площу еліптичного сектора. Це був перший новий крок після обчислень Архімеда.

Мал. 18



З найбільшою силою новаторство Кеплера виявилося в «Стереометрії винних бочок». У другому розділі цієї книжки подано обчислення об'ємів понад 80 різних тіл обертання, яких раніше ніхто не розглядав. Ще більше значення для математики мав сам метод обчислення об'ємів. Покажемо його суть на прикладі класичної задачі обчислення площі круга. Останння подається як сукупність як завгодно великого числа досить вузьких секторів із спільною вершиною в центрі круга (мал. 17). Потім коло круга випрямляється у відрізок $A_0 A_n$, при цьому сектори утворюють на $[A_0A_n]$ «частокіл» рівнобедрених трикутників $A_0B_1A_1$, $A_1B_2A_2$, ..., $A_{n-1}B_nA_n$, кожний з яких заміниться рівновеликим йому трикутником (мал. 18). Сукупність трикутників, рівновеликих $\triangle A_iB_{i+1}A_{i+1}$, покриває прямокутний трикутник OA_0A_n, площа якого очевидно дорівнює площі даного круга.

Такі доведення з очевидною неповагою до вимог класичної математичної строгості викликали обурення ідейних супротивників Кеплера. Справді, сума площ трикутників $A_iB_{i+1}A_{i+1}$ не дорівнює площі $\triangle A_0OA_n$, бо кожний трикутник, наприклад $A_0B_1A_1$, не рівновеликий відповідному сектору. Водночас зрозуміло, що при достатньо великій кількості трикутників різницю між площею круга і площею

$\triangle UA_0A_n$ можна зробити меншою від будь-якого наперед заданого числа. За методом Кеплера вдалося розв'язати чимало складних задач, які не можна було розв'язати класичними методами.

Істотним компонентом у міркуваннях Кеплера було поняття, яке потім викристалізувалося в нескінченно малу. У розглянутій задачі — це площа сектора круга. Геніальна інтуїція вченого допомогла йому відкрити саме ті прийоми обчислень площ і об'ємів, які згодом розвинулися в інтегральне числення: поділ даної фігури на нескінченно малі елементи й обчислення границі суми площ (або об'ємів) таких елементів при необмеженому збільшенні кількості доданків.

Кеплер уперше використав важливий евристичний метод дослідження властивостей математичних об'єктів — принцип неперервності. Застосування його дає змогу знаходити властивості одного математичного поняття за властивостями іншого, якщо перший є результатом граничного переходу з другого. Важливим кроком до створення проективної геометрії було введення вченим нескінченно віддаленої точки. Він перший розглянув правильні зірчасті многогранники і навів креслення двох з них. Тільки в 1810 р. французький математик Пуансо (1777—1859) відкрив ще два многогранники цього роду, а визначний французький математик Огюстен Коші (1789—1857) довів, що чотирма побудованими зірчастими многогранниками і вичерпується множина всіх таких многогранників.

Кеплер виконав велетенську обчислювальну роботу. Він розумів, яке значення має вдосконалення методів і засобів обчислень, над якими працювали його сучасники — шотландець Джон Непер (1550—1617), англієць Брігс (1561—1631), швейцарець Бюргі (1552—1632). «Тисячу логарифмів» (1674) теж було написано, щоб полегшити процес обчислення над натуральними числами в десятковій системі числення. Кеплер зробив внесок у розвиток механічних обчислень. Він порадив професорові східних мов Тюбінгенського університету Вільгельму Шіккарду (1592—1635) зайнятися створенням обчислювальної машини, а можливо, й подав деякі ідеї її конструкції. Таку машину було створено в 1623—1624 рр. На жаль, обидва виготовлені примірники машини згоріли під час пожежі.

Перелік відкриттів ученого можна було б продовжувати й далі. Але найважливішими серед них є три знамениті закони руху планет і важливі кроки на шляху до математики змінних величин. Не випадково на примірнику «Нової астрономії» Даламбер зробив красномовний напис про те, що Ньютон ніколи не написав би своїх «Начал натуральної філософії», якби довго не думав над тими визначними місцями, в яких Кеплер поєднав усі свої дослідження.

Задачі

1. Розв'язати рівняння $x^5-5x^3+5x=0$.

2. Нехай E — дана відмінна од центра точка діаметра круга і O — центр круга. Провести радіус OM так, щоб він ділив площу півкруга в заданому відношенні.

РЕНЕ ДЕКАРТ
(1596—1650)

Поворотним пунктом у математиці була Декартова змінна величина. Завдяки цьому у математику ввійшли рух і тим самим діалектика і завдяки цьому ж стало негайно необхідним диференціальне й інтегральне числення...

Ф. ЕНГЕЛЬС

Переказують, що Декарт народився у дорозі в м. Лае території Турені, поблизу границі провінції Пуату. Це спричинилося до суперечки про те, яка з провінцій має право вважатися батьківщиною одного з видатних учених, творчість якого мала великий вплив на становлення сучасної науки. На другому році життя він лишився без матері, ріс кволим, лікарі навіть побоювалися, що він не доживе до зрілого віку.

Виключні здібності хлопчика виявилися дуже рано. Навчався він в колежі Ла Флеш, який вважався одним з кращих у країні. Тут приділялося багато уваги математиці і прикладним наукам. До Декарта прийшло ще одне захоплення — він закохався в поезію, і залишився вірним їй назавжди. Останнім його твором була п'єса, написана у віршах у Стокгольмі. Не задовольняла тільки філософія, невірогідність її висновків. Математика ж захоплювала логічною строгістю умовиводів, стимулювала думку і здавалася єдиною наукою, яка може дати істинні знання. Так виникає думка перебудувати всі науки за зразком математики, звідки пізніше викристалізується ідея

загальної математики, яка об'єднує всі її розділи.

Очевидно, що навчання в колежі, яким керували іезуїти, позначилося на характерах вихованців. Принаймні Декарт був дуже стриманим, замкненим і все життя ховав від сторонніх свій внутрішній світ.

Деякий час після закінчення колежу Рене провів серед рідні. У 1616 р. у Пуатьє здобув ступінь бакалавра прав, проте не присвятив себе ні юриспруденції, ні літературі.

На початку 1613 р. він приїхав у Париж, де познайомився з математиком Мідоржем (1585—1647), зустрічався з випускником колежу Мареном Мерсенном, з яким був знайомий ще в колежі. Мерсенн — помітна постать європейської науки того часу. Виходець із селянської сім'ї, він після закінчення колежу став ченцем, але приділив багато уваги науковим дослідженням у галузі математики та фізики. Важлива роль його в налагодженні наукових контактів європейських учених. Келія Мерсенна стала всеєвропейським інформаційним науковим центром. Йому писали про результати своїх досліджень і про нові проблеми вчені різних країн Європи, і цю інформацію він поширював у численних листах до інших учених. Оскільки на той час наукових журналів не було, то Мерсенн виконував надзвичайно корисну роль організатора циркуляції нових результатів і нових наукових проблем серед учених. Зокрема, він став довіреною особою Декарта в Парижі.

Неробство швидко набридло молодому бакалавру. Він оселяється на околиці Парижа і віддається науковим заняттям. Бажання побачити життя, звичаї різних народів, природу привели Декарта в протестантську армію, яка воювала в Голландії проти іспано-австрійського війська. Воювати в Голландії не довелося, і Декарт став скоріше співглядачем, ніж учасником подій.

З 1618 р. Декарт навчався у військовій школі для дворян у голландському місті Бреда. Тут випадок звів його з молодим доктором медицини Бекманом (1588—1637), який дуже захоплювався математикою. Зустрічі і бесіди з Бекманом змусили курсанта остаточно зайнятися наукою.

Декарт залишає Голландію і вступає в армію герцога Баварії. Це дало можливість відвідати деякі європейські країни.

На зимових квартирах у 1619—1620 рр. Декарт жив поблизу значного наукового і культурного центра на Дунаї м. Ульма. 10 листопада 1619 р. він записав у щоденнику, що охоплений ентузіазмом і відкрив основи нової вражаючої науки. Це могла бути ідея універсальної математики, перетворення в алгебрі за допомогою єдиної символіки, подання алгебраїчних понять за допомогою геометричних образів або навпаки. Можливо, що в Ульмі він зустрівся з Кеплером, який у цей час переживав один з найважчих періодів свого нелегкого життя.

На цей час Декарт остаточно обрав шлях наукової творчості, але довго шукав, де можна було б спокійно і повністю віддатися науці. Він провів деякий час у Парижі, відвідав Італію і знову повернувся до Парижа. Зустрічався з ученими й обговорював з ними різні наукові проблеми. У 1628 р. виїздить до Голландії. Йому треба було поєднувати переваги міського життя з повною свободою творчості. Як тільки інкогніто дивовижного іноземця розкривалося, він негайно змінював квартиру, ховаючись від непотрібної йому слави. За 20 років життя в Голландії він змінив 34 квартири. У Франції адреси їх знав тільки Мерсенн. Кожний день цього двадцятиріччя був підпорядкований одній меті —

проведенню численних дослідів, обдумуванню і написанню наукових трактатів. Зрозуміло, що вчений не був самітнім. У нього було багато друзів серед голландських учених, послідовників і пропагандистів його філософії. Через довірених голландських знайомих Декарт вів жваве листування.

До 1633 р. учений завершив роботу над великим трактатом, у якому на основі розроблених ним принципів викладалася фізика, космологія, природознавство, досліджувався тваринний світ і, нарешті, людина. Та саме в цей час, 22 червня 1633 р., інквізиція вчинила розправу над Галілеєм. У листі Мерсенну Декарт писав про враження, яке справила на нього ця звістка: «Це мене так вразило, що я вирішив спалити всі свої папери або принаймні нікому їх не показувати, бо я не в змозі був уявити собі, що його, італійця, який користувався прихильністю навіть папи, могли засудити за те, що хотів довести рух Землі...».

Навчання в Ла Флеші не пройшло марно. Декарт не був бійцем і турбувався, щоб не накликати гніву отців католиків, ієзуїтів і протестантів. Проте він не знайшов тихого життя і в протестантській Голландії. Понад 8 років не припинявся конфлікт Декарта з голландськими протестантами. Деякі з них вимагали спалити книжки французького вченого і виселити його з країни. Справді, з системи поглядів Декарта (картезіанської філософії, теоретичною основою якої було вчення Декарта; від латинізованого імені його — Картезіус походить і назва цього напрямку філософії) випливали матеріалістичні, зокрема атеїстичні, висновки.

У 1644 і 1647 рр. учений двічі відвідав батьківщину. Під час другої поїздки він зустрівся з Блезом Паскалем, уривок з невеликого трактату якого «Досвід про конічні перерізи» він колись сприйняв досить холодно, а тепер високо оцінив талант молодого вченого. Разом з іншими вченими Декарт спостерігав дослід, який підтверджував наявність атмосферного тиску (дослід Торрічеллі). Дискусія між Паскалем і Декартом про порожнечу, якої ніби боїться природа, завершилася на користь Паскаля.

31 січня 1648 р. французький уряд призначив Декарту за наукові відкриття значну пенсію. Проте сподівання вченого на матеріальну підтримку уряду Франції не справдилися.

Неспокійна політична ситуація в Парижі так налякала Декарта, що він негайно і цього разу назавжди залишив Францію. Довелося повертатися в Голландію, де теж не було спокою. Тому вчений прийняв запрошення шведської королеви Христини. Він довго вагався і з тривогою 31 серпня 1649 року вирушив на північ. Тривожні передчуття справдилися. Шведській королеві вчений теж був потрібний, насамперед як унікум наукового світу. Життя в Стокгольмі остаточно зруйнувало його усталений ритм роботи і розпорядок дня.

Королева призначала заняття з філософом на 5 годину ранку. Через усе місто вчений повинен був у холодній кареті їздити в царський палац. Зима того року особливо лютувала, і вчений скоро застудився. Хвороба швидко прогресувала, і на дев'ятий день Декарта не стало. Оскільки в Стокгольмі не було католицького кладовища, могилу вибрали там, де ховали бездомних і нехрещених дітей.

Декарт був різностороннім ученим. Багато уваги він приділив розробці різних філософських проблем, зокрема теорії пізнання. Систематично застосовуючи свій механіко-математичний метод, учений розв'язав і конкретні задачі в різних розділах природознавства. Його наукова спадщина присвячена дослідженням із стількох питань, що навіть у спеціальних

роботах найчастіше розглядають якийсь один напрям його творчості: в філософії, фізиці, біології, астрономії або математиці.

Світогляд Декарта був дуалістичним — двоїстим. Він визнавав існування двох самостійних субстанцій — матерії і духу; вважав, що ідеалізм — вихідний пункт для пояснення вірогідності науки. Але в його світогляді була й інша, протилежна тенденція — матеріалістична. Зокрема, у фізиці він стояв на позиціях механістичного матеріалізму — вважав, що всі явища природи принципово зводяться до переміщення частинок матерії. Як зазначав Паскаль, Декарт «дав богові щигля в ніс», заставивши його привести Всесвіт у рух, а потім в усій своїй філософії обійшовся без нього.

Учений поширив свій механістичний принцип на живу природу і зробив спробу показати її в розвитку. Зокрема, матеріалістичним було вчення Декарта про рефлекс як основний акт діяльності нервової системи, залежність психічного від фізичного. Видатний радянський фізіолог лауреат Нобелівської премії І. П. Павлов (1849—1936) високо цінував дослідження Декарта з фізіології. На його прохання в Колтушах біля лабораторії великого фізіолога був поставлений бюст Декарта.

Закономірно, що церковники не простили Декарту розв'язання важливих проблем природознавства з матеріалістичних позицій. У 1663 р. його твори були занесені Ватіканом в індекс заборонених книжок. Там вони стали в один ряд з творами Коперника, Джордано Бруно, Кеплера, Галілея. Автор, який за життя прагнув довести вірність католицизму, не досяг мети. Учений переміг у ньому віруючого.

Декартові належать відкриття й в галузі фізики. Він зробив висновок, що найкраща форма лінз для виправлення сферичної аберації — гіперболічна;

першим пояснив причину і механізм утворення райдуги; займався теорією машин і механізмів, зокрема задачею про маятник, теорією удару, проблемами космогонії.

Математичні дослідження вченого були частиною розроблюваного ним методу дослідження просторових фігур у їх взаємодіях і взаємозв'язках.

Учений поділяв віру передових учених XVII ст. у всемогутність математичного методу як універсального знаряддя розв'язування будь-яких задач.

Величезна заслуга Декарта в тому, що він завбачив і зробив великий вклад у створення цього методу. Він. писав: «...має існувати деяка загальна наука, яка пояснює все, що стосується порядку і міри, не вдаючись в дослідження ніяких окремих предметів, і ця наука має називатися ... ім'ям загальної математики, бо вона містить у собі все те, завдяки чому інші науки називаються частинами математики».

Реалізації цієї програми автор присвятив великий трактат «Міркування про метод», опублікований в 1637 році. Застосування загальної науки автор розкрив у трьох додатках до трактату: «Діоптрика», «Метеори», «Геометрія». Для нас найбільший інтерес становить третій додаток. Саме завдяки йому Декарт поряд з Ферма поділяє славу основоположника одного з великих розділів класичної математики — аналітичної геометрії. За якихось 10—20 років виникла зовсім нова математична галузь, заснована на ідеї встановлення ізоморфізму між множиною дійсних чисел і множиною прямолінійних відрізків. У «Геометрії» Декарт писав: «Надаючи лінії y послідовно нескінченну множину різних значень, ми знайдемо також нескінченну кількість різних точок... Вони опишуть потрібну криву лінію». Як бачимо, головна ідея геометрії Декарта в тому, що геометричний об'єкт — крива лінія, подається рівнянням, яке

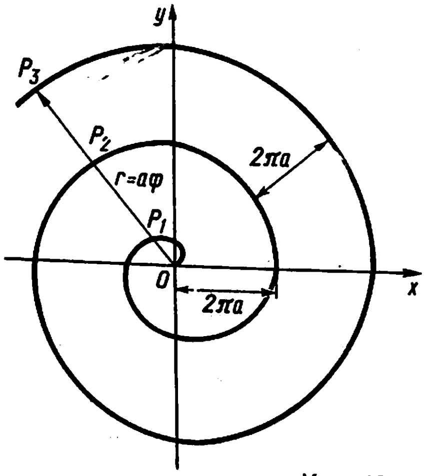
пов'язує змінні величини. Досліджуючи властивості рівнянь (функцій), ми тим самим дістаємо інформацію і про властивості геометричних об'єктів. Це й дало підставу назвати потім геометрію Декарта аналітичною.

Декарт розглядав ще тільки одну пряму з фіксованою точкою відліку і вивчав властивості кривих ліній відносно цієї прямої. Однак це було вже велетенським кроком уперед. Метод координат не тільки став однаковим способом символічного подання кривої у вигляді відповідного їй рівняння, він також давав необмежені можливості для введення в математику нових кривих, оскільки кожне довільно записане рівняння від двох змінних подавало якусь нову криву.

Метод координат відкрив шлях у математику змінним величинам. Значення цього відкриття глибоко розкрив і високо оцінив Ф. Енгельс.

У працях Декарта алгебра остаточно звільняється від геометричних уявлень і будується як самостійна частина математики. Формалізації алгебри і всієї математики сприяло дальше вдосконалення Декартом алгебраїчної символіки, яка вже майже не відрізняється од сучасної. Відомі величини він позначав буквами $a, b, c, \ldots$, невідомі $x, y, z, \ldots$, ввів позначення для степенів, хоча квадрати записував ще як aa, xx. Декарт розв'язав важливу задачу звідності рівнянь, тобто подав цілий многочлен з раціональними коефіцієнтами як добуток многочленів нижчих степенів, широко застосовував під час доведення теорем і розв'язування задач метод невизначених коефіцієнтів.

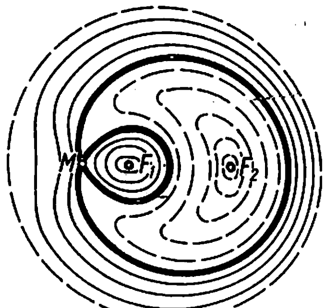
Ім'ям Декарта названо ряд відкритих ним кривих ліній. Серед них найбільше застосувань у самій математиці, математичному природознавстві й техніці знайшла логарифмічна спіраль. Логарифмічна



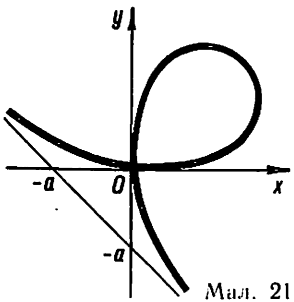
Мал. 19

спіраль $\rho=a^{\varphi}$ переходить сама в себе під час лінійних перетворень площини, які утворюють групи. Вона перетинає всі свої радіуси-вектори під одним і тим самим кутом. Форму логарифмічної спіралі мають контури численних живих організмів. Її використовують у гідротехніці, теорії механізмів, архітектурі, теорії естетики (мал. 19).

Розв'язуючи важливе практичне завдання вдосконалення оптичних інструментів, учений шукав криволінійну поверхню, яка заломлювала б промені, що виходять з однієї точки так, щоб заломлені промені проходили через іншу задану точку. Системою перерізів таких поверхонь є криві, які називають овалами Декарта (мал. 20). Отже, овал Декарта — це множина точок, сума відстаней кожної з яких від двох даних



Мал. 20



Мал. 21

фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів), помножені на дані числа m і n, стала c: $m\ |MF_1|+n\ |MF_2|=c$. Рівняння овалів Декарта в прямокутній системі координат має вигляд: $(x^2+y^2-2rx)^2-l^2(x^2+y^2)-k=0$, де r, l і k — деякі сталі, пов'язані певними співвідношеннями з параметрами m і n. На мал. 20 наведено форми овалів, які відповідають певним значенням параметрів r і l при змінному параметрі k. При $k=0$ дістаємо окремий випадок овалу — слимак Паскаля; при $k>0$ овал складається з двох замкнених ліній, одна з яких міститься всередині слимака Паскаля, а друга — поза ним.

У 1638 р. у листі до Ферма Декарт означив криву третього порядку: $x^3+y^3-2axy=0$, яку спочатку звали «пелюсткою жасмину», а з початку XVIII ст. за нею закріпилася назва «декартів лист». Крива має цікаві властивості (мал. 21).

Увагу вченого привернули проблеми досконалих чисел (див. с. 21). Він вважав, що йому досить місячної відпустки, щоб розгадати таємницю непарних досконалих чисел. Жаль, що Декартові її не надали, бо ця проблема не розв'язана й досі. Зате йому вдалося обчислити кілька так званих *гіпердосконалих* чисел.

Число a називається гіпердосконалим кратності m, якщо сума всіх дільників a, менших за $a(\sigma(a))$, дорівнює ma, тобто $\sigma(a)=ma$. Очевидно, що на основі вивчення якихось глибоких властивостей натуральних чисел він обчислив кілька гіпердосконалих чисел кратності 3 і 4:

$$\sigma(30\,240)=3\cdot 30\,240,$$
$$\sigma(32\,760)=3\cdot 32\,760,$$
$$\sigma(403\,031\,236\,608)=3\cdot 403\,031\,236\,608,$$
$$\sigma(56\,729\,756\,160)=4\cdot 56\,729\,756\,160.$$

Він також обчислив третю пару співдружніх чисел: 9 363 584 і 9 437 056. Зрозуміло, що ці результати не можна було б дістати добором. Очевидно, вчений прийшов до них, глибоко вивчивши властивості натуральних чисел.

У ранніх роботах учений запропонував свої оригінальні способи некласичних розв'язань знаменитих геометричних задач давнини — трисекції кута і подвоєння куба, причому перший висловив думку, що точна побудова відрізка довжини $\sqrt[3]{2}$ неможлива за допомогою тільки циркуля і лінійки.

Творчість Декарта мала великий вплив на наукову діяльність видатних учених Західної Європи і вітчизняних математиків, природодослідників і філософів. Тільки вісім математичних понять пов'язано з ім'ям Декарта, але й одного з них — декартової геометрії достатньо, щоб назавжди його ім'я лишилося серед найвидатніших творців математики.

Задачі

1. Рівняння $x^3-x^2\sqrt{3}+\frac{26}{27}x-\frac{8}{27\sqrt{3}}=0$ підстановками $y=x\sqrt{3}$, $z=3y$ звести до рівняння із цілими коефіцієнтами. Обчислити корені даного рівняння.

2. Розв'язати рівняння: а) $y^3-8y^2-y+8=0$; б) $y^3-9y^2+26y-24=0$; в) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

П'ЄР ФЕРМА
(1601—1665)

...Його справжньою любов'ю була теорія чисел, вивчення властивостей додатних цілих чисел, які здавалися йому найбільшим викликом силі чистого математичного міркування і найбільшою скарбницею чистих математичних істин.

Г. ЕДВАРДС

Його іноді називають геніальним аматором, бо офіційна освіта і служба цієї дивовижної людини були надто далекими від того, чому він віддавав вільний час і що уславило його в історії науки.

Факти біографії Ферма вміщуються в одному абзаці. Народився він у невеликому місті Бомон, у Гасконії, де й почав навчання. Закінчив юридичний факультет Тулузького університету. Потім успішно займався приватною адвокатурою. У 1631 р. перейшов на державну службу, ставши консультантом Тулузького парламенту. Там він працював усе своє життя. Був одружений, мав п'ятеро дітей. Жив відлюдно і виїздив з Тулузи тільки в службових справах. В одній з таких поїздок до невеличкого міста Кастре, закінчивши свій останній судовий процес, помер. Цим майже вичерпуються події зовні одноманітного життя тулузького юриста.

Із 3000 рукописів Ферма за життя був опублікований один, та й то — анонімно. Він грунтовно знав головні європейські мови і літератури, грецьку і латинську, з однаковою легкістю писав вірші французькою, латинською та іспанською мовами. Але справжньою стихією тулузького самітника стала математика, якій віддав він години натхнення. Ферма став фундатором кількох нових математичних дисциплін, а в інших на століття визначив напрями наукових досліджень математиків усього світу.

Працюючи над текстами древніх авторів, Ферма поставив за мету за короткими переказами змісту задач і теорем Аполлонія Пергського відтворити хід його міркувань і успішно виконав це завдання. Глибокий аналіз праць видатних математиків античного світу, опанування ідей попередників і сучасників відкрили шлях до продуктивної самостійної творчості в різних галузях математики, і в кожній з них він сказав нове слово або започаткував нову епоху розвитку.

Ферма, як і тисячі інших професіоналів і аматорів математики, був зачарований дивовижними закономірностями, невичерпністю властивостей ряду натуральних чисел.

Із численних теоретико-числових задач попередників геніальна інтуїція Ферма допомогла йому виділити ті, які стали основними темами досліджень математиків XVIII—XIX ст. Тому можна сказати, що Ферма заново відкрив теорію чисел, вдихнув життя в цю галузь математики. Свої результати він повідомляв у листах і найчастіше коротко записував на полях виданого в 1621 р. латинського перекладу «Арифметики» Діофанта (див. с. 62). Це були задачі, пов'язані з подільністю чисел, поданням деяких простих чисел сумами кількох квадратів, пошуками формул (генераторів) простих чисел.

Так, він висловив припущення, що числа виду $F(n)=2^{2^n}+1$ ($n=0, 1, 2, 3, 4,\ldots$) — прості (числа $F(n)$ називають *числами Ферма*). Справді, якщо $n=0, 1, 2, 3, 4$, то дістаємо прості числа 3, 5, 17, 257, 65 537.

Проте Ейлер показав (у 1739 р.), що $F(5)=$ $=4\,294\,967\,297=6\,700\,417\cdot 641$, тобто складене. За допомогою ЕОМ виявлено багато складених чисел $F(n)$ для досить великих n. Наприклад, $F(452)=$ $=2^{2^{452}}+1$ записується не менше як 10^{135} цифрами і є складеним, його дільник $27\cdot 2^{455}+1$ містить 139 цифр. Є гіпотеза, що існує лише скінченна множина простих чисел виду $F(n)$.

Прості числа Ферма знайшли застосування в теорії геометричних побудов. У 1796 р. Гаусс довів теорему: правильний многокутник можна побудувати за допомогою лише циркуля і лінійки тоді і тільки тоді, коли кількість його сторін дорівнює $2^{\alpha}p_1p_2\ldots p_s$, де всі p_i — прості числа $F(n)$. Звідси випливає, що можна побудувати правильні 3-, 5-, 17-, 257-, 65 573-кутники і т. д. і неможливо побудувати 7-, 11-, 13-кутники. Сам Гаусс побудував правильні 17- і 257-кутники.

Багато уваги приділив Ферма визначенню простих чисел, які можна подати певними квадратичними формами. Він поставив і розв'язав цю проблему для простих чисел, які можна подати формами: x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+xy+y^2.

Формою x^2+y^2 можна подати ті і тільки ті прості числа, які належать прогресії $4n+1$; при цьому кожне просте число із цієї прогресії можна подати такою формою єдиним способом.

Наприклад: $4\cdot 1+1=5=1^2+2^2$,
$4\cdot 3+1=13=2^2+3^2$ і т. д.

Із цього твердження випливає, що не одне просте число з прогресії $4n+3$ не можна подати сумою двох квадратів.

Формою x^2+2y^2 можна подати всі прості числа виду $8n+1$ і $8n+3$.

Наприклад: $8\cdot 2+1=17=3^2+2\cdot 2^2$,
$8\cdot 1+3=11=3^2+2\cdot 1^2$ і т. д.

Формами x^2+3y^2 і x^2+xy+y^2 можна подати ті і тільки ті прості числа, які належать прогресії $3n+1$.

Наприклад: $3\cdot2+1=\ 7=2^2+3\cdot1^2$,
$3\cdot4+1=13=1^2+3\cdot2^2$ і т. д.

Формою $2x^2-y^2$ — ті і тільки ті прості числа, які належать прогресіям $8n+1$ і $8n+7$.

Наприклад: $8\cdot2+1=17=2\cdot3^2-1$,
$8\cdot3+7=31=2\cdot4^4-1$ і т. д.

Розгляд подання тією або іншою квадратичною формою простих чисел було великим відкриттям Ферма. Розвиваючи ці ідеї вченого, математики змогли вивчити закономірності подільності в різних числових системах.

Ферма майже ніколи не доводив відкритих ним теорем. Подання єдиним способом простих чисел виду $4n+1$ сумою двох квадратів — одне з небагатьох тверджень, яке він обгрунтував за допомогою оригінального доведення — методу нескінченного спуску. Суть його полягає в тому, що коли б просте число виду $4n+1$ можна було подати двома різними способами квадратичною формою x^2+y^2, то існувало б менше число виду $4n+1$, яке має таку саму властивість, і т. д. до нескінченності. Але множина простих чисел виду $4n+1$, менших від якогось конкретного числа такого виду, завжди скінченна. Тому наше припущення неправильне, тобто прості числа виду $4n+1$ можна подати тільки єдиним способом — сумою двох квадратів.

Фундаментальним результатом теорії подільності є так звана мала теорема Ферма: *Для всякого простого числа p і $a\geqslant1$, якщо a не ділиться на p, то $a^{p-1}-1$ (або a^p-a) ділиться на p.* Наприклад: якщо $a=5$, $p=2$, 3, 7, 11, тоді $5^{2-1}-1=2\cdot2$, $5^{3-1}-1=3\cdot8$, $5^{7-1}-1=7\cdot2232$, $5^{11-1}-1=11\times$

$\times 88\,788$. Перше доведення малої теореми Ферма дав Лейбніц.

Окремо варто сказати про знамениту велику (або останню) теорему Ферма (ВТФ), яку справедливо називають вічним двигуном математики. Вона пов'язана з восьмою задачею другої книжки «Арифметики» Діофанта.

Ось ця знаменита в історії математики задача:

Розкласти даний квадрат на два квадрати. Розкласти 16 на два квадрати.

Діофант позначає один з квадратів через x^2, другий — через $y^2=(2x-4)^2$. Тоді $(2x-4)^2=16-x^2$, або $5x^2=16x$. Звідки $x=\frac{16}{5}$ і $y=\frac{12}{5}$, $x=0$ Діофант відкидає. Змінюючи коефіцієнти при x у рівності $y=2x-4$, він дістає нескінченну множину розв'язків задачі: $(ax-m)^2=m^2-x^2$, $a^2x^2-2amx+m^2=$ $=m^2-x^2$, $(a^2+1)x^2=2amx$, звідки $x=\frac{2am}{a^2+1}$, $y=ax-m=\frac{m(a^2-1)}{a^2+1}$.

Ніби вислухавши мудрого александрійця, Ферма зауважує: «Навпаки, неможливо розкласти куб на два куби, біквадрат на два біквадрати, взагалі ніякий степінь, більший від квадрата, на два степені з тим самим показником». Або, в сучасному формулюванні: *рівняння $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ і $xyz\neq0$ не можна розв'язати в цілих (і раціональних) числах.* Найсильніший магніт, що майже три століття притягує увагу до ВТФ, був прихований в останньому реченні зауваження геніального читача Діофанта: «Я відкрив цьому воістину чудесне доведення, але ці поля для нього надто малі».

Що можна сказати про цю заяву Ферма? Очевидно, це було сказано в запалі дискусій, бо чесність вченого і вимогливість до себе поза сумнівами. Він міг помилитися, але не міг висловити твердження, в якому не був би переконаний. Це доведено всією науковою спадщиною і особистим життям ученого. Ось чому пошуки «воістину чудесного» знайденого і так легковажно втраченого доведення ВТФ привертало увагу найвидатніших математиків і просто аматорів. До того ж задача здавалася такою простою. Після перевірки простота виявилася підступною. Тільки через 100 років геніальний Ейлер відвоював невеликий плацдарм таємниці ВТФ, довів справедливість її для $n=3$ і 4. Доведення для $n=4$ дав і сам Ферма, і це було єдине доведення з численних сформульованих ним теорем. Дальша історія ВТФ нагадує пригодницький роман, героями якого стали десятки видатних математиків, які теж помилялися і все ж крок за кроком просувалися вперед, зриваючи з ВТФ завісу таємничості.

13 вересня 1907 р. німецький математик П. Вольфскель заповів (до 13 вересня 2007 р.) видати винагороду в 100 000 марок тому, хто доведе ВТФ. Право видати винагороду надавалося Геттінгенській академії. Зрозуміло, що «доведення» посипалися як з рогу достатку. За перші три роки після оголошення премії їх прийшло більше тисячі. До війни 1914 р. прибутками від грошей Вольфскеля користувався Геттінгенський університет, запрошуючи вчених для читання лекцій і проведення наукової роботи. Це дало підставу колишньому голові комісії по присудженню премії Вольфскеля видатному німецькому математику Д. Гільберту (1862—1943) якось зауважити: «На щастя, здається, крім мене, в нас немає математика, якому було б під силу це завдання, я ж ніколи не наважуся зарізати курку, яка несе нам золоті яйця».

Після першої світової війни і викликаної нею інфляції, премія Вольфскеля втратила свою цінність, але так і не була нікому присуджена. А за цей час ВТФ штурмували багато відомих математиків, і вони здобули нові важливі результати. До 1978 р. справедливість ВТФ доведено для всіх $n \leqslant 100\,000$ і в прикладах, які спростовували б її, довелося б мати справу з числами, більшими ніж $100^{500\,000}$. Доведено навіть, що існує нескінченна множина таких n, взаємно простих з x, y, z, для яких ВТФ справедлива. Сьогодні всі спеціалісти твердо переконані, що елементарного доведення ВТФ не існує. Очевидно, Ферма таки помилявся. Повчальний і прекрасний приклад безкомпромісної вимогливості математиків до висловлюваних ними тверджень. Здається, немає жодного сумніву, що незалежно від того, мав доведення Ферма чи помилявся, ВТФ справедлива. Проте, доки не знайдено доведення її для всіх n, яке б задовольняло сучасні вимоги строгості, її вважають невзятою фортецею математики.

Видатний радянський математик О. Я. Хінчин (1894—1959) зазначав, що доведення ВТФ є розв'язанням рядової теореми одного з розділів теорії чисел. Але пошуки цього розв'язання вже привели до відкриття нових важливих математичних фактів, створення нових методів і цілих теорій, які збагатили математику і служитимуть її дальшому розвитку.

Нові проблеми відкрив Ферма і в теорії розв'язування діофантових рівнянь, а саме — розв'язування таких рівнянь у цілих числах. Він запропонував математикам знайти загальний алгоритм розв'язання діофантового рівняння $ax^2+1=y^2$, де $a \in \boldsymbol{Z}$ і $a \neq n^2$. У листах своїм кореспондентам Ферма часто пропонував складні, навіть дуже складні задачі. Френіклю, наприклад, було запропоновано знайти прямокутний трикутник, у якого гіпотенуза і сума катетів — квадрати цілих чисел. Коли той висловився, що задача не має розв'язку, Ферма надіслав йому приклад трикутника з довжинами сторін $a = 4\,687\,298\,610\,289$, $b = 4\,565\,486\,027\,761$, $c = 1\,061\,652\,293\,520$. Він — прямокутний, гіпотенуза його $a = 2\,165\,017^2$, а сума катетів $b + c = 5\,627\,138\,321\,281 = 2\,372\,153^2$.

Переказують, що до Блеза Паскаля звернувся шанувальник його таланту гравець кавалер де Мере з проханням розв'язати дві задачі, пов'язані з грою в кості. Про одну з них Паскаль написав Ферма, бо, як зізнавався, відчував себе впевнено, коли Ферма був на його боці. Так зав'язалося листування двох учених, у процесі якого формувалися основні поняття і розв'язувалися задачі нової математичної дисципліни — теорії ймовірностей. Вона виникла не на порожньому місці, але саме Паскаль і Ферма зрозуміли, що азартні ігри — це тільки зручний об'єкт для побудови математичних моделей закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища. Дещо пізніше до теоретико-ймовірнісних задач звернувся й Гюйгенс. Ці три великі імені і стоять біля витоків формування однієї з надзвичайно важливих галузей математики, яка має численні застосування в самій математиці, математичному природознавстві, мистецтвознавстві, соціальних науках і військовій справі.

Разом з Декартом Ферма поділяє славу основоположника аналітичної геометрії. При цьому його виклад цієї математичної дисципліни ближчий до сучасного, ніж у «Геометрії» Декарта. Ферма по праву займає почесне місце і серед безпосередніх провісників визначного математичного відкриття XVII ст. — математичного аналізу. Він володів

добре розробленим методом обчислення площ і об'ємів криволінійних фігур. Його результати безпосередньо підходять до поняття визначеного інтеграла Ньютона — Лейбніца. Він, як і Кеплер, ділить фігуру, площу якої потрібно обчислити, на такі дрібні фігури, що з достатньою точністю їх можна прирівняти до якихось фігур з уже відомою площею. Але коли Кеплер, розв'язуючи геометричну задачу, зводить її знову-таки до геометричної задачі, то Ферма до алгебраїчної задачі — підсумування членів нескінченної спадної геометричної прогресії. При цьому він користується винайденою ним системою координат і утворює інтегральні суми так, як пізніше це робитимуть в інтегральному численні.

Основи аналізу нескінченно малих, запропоновані Ферма, спричинилися до тривалої полеміки між ним і Декартом, яку Ферма назвав «малою війною з Декартом», а його опонент — «малим процесом математики проти П. Ферма». Суперечки вистачило б на все життя вчених, якби Ферма не порозумівся з Декартом по суті математичних проблем. Для математики ця полеміка мала велике значення, оскільки сприяла формуванню й уточненню основних понять математичного аналізу.

Ферма ближче, ніж будь-хто з його сучасників, підійшов до сучасних методів обчислення екстремумів і проведення дотичних до кривих — двох найважливіших задач, з яких розвинулося диференціальне числення. Спосіб, яким вчений розв'язував ці задачі, приводить до знаменитої формули $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = 0$. Учений вважав приріст ε числом сталим, хоча й довільно малим, тобто не завбачав граничного переходу.

Однак Ферма став тільки провісником, а не відкривачем математичного аналізу. Він ще не бачив взаємооберненості операцій інтегрування і диференціювання, а тому й не міг знайти єдиного алгоритму обчислення інтегральних сум.

Та місце вченого в історії науки визначається не тим, що він міг би зробити і не зробив, а тим, чим збагатив її.

Задачі

1. Якщо S — сума нескінченної спадної геометричної прогресії (a_n), то $S:(S-a_1)=a_1:a_2$.

2. У даному гострокутному трикутнику ABC знайти точку P, для якої сума відстаней її до вершин A, B і C була б мінімальною.

3. Для будь-яких n $(n \in N)$ має місце рівність $5(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4)=(4n+2)\left(\frac{n(n+2)}{2}\right)^2-$ $-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$.

4. Довести малу теорему Ферма (умову див. на с. 144).

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

(1623—1662)

У його долі є щось неправдоподібне; і якби її придумав романіст, йому б, безумовно, не повірили. Справді, фантастика найчистішої води.

Є. М. БОГАТ

Понад три з половиною століття тому слово «вундеркінд» ще не було загальновживаним. Та саме такою чудо-дитиною феноменальних здібностей був син французького чиновника Етьєна Паскаля Блез Паскаль. Його життя ніби ввібрало в себе всі суперечності епохи, коли ще жили жорстокі примари середньовіччя. У катівнях інквізиції допитували із «суворим випробуванням» (тортурами), на площах міст страчували «по можливості, м'яко, без пролиття крові» (спалювали живими). Усе це не могло не позначитися на житті Блеза. Коли йому було три роки, він втратив матір. Батько вирішив присвятити себе вихованню двох дочок і хворобливого сина. Оберігаючи здоров'я дітей, він не перевантажував їх розумовою працею. Нові знання найчастіше подавав у формі ігор і розваг, які невтомно придумував на прогулянках, під час бесід, за обіднім столом. А щоб остаточно позбутися службових обов'язків, родинних та інших візитів, які відволікали од виховання дітей і наукових занять, він восени 1631 р. переїздить у Париж, де швидко знайомиться з видатними вченими того часу. Вони збиралися в келії францісканського ченця Марена Мерсенна. У келії Мерсенна регулярно зустрічалися математики, фізики, письменники, шанувальники математики і природничих наук.

Члени гуртка Мерсенна становили ядро створеної в 1660 р. Французької академії, яка займалася виключно природничими науками.

Батько Блеза цікавився різними галузями природознавства і, особливо, математикою. Він досліджував криві лінії. Алгебраїчна лінія 4-го порядку $(x^2+y^2-2rx)^2-l^2(x^2+y^2)=0$, яка належить до сім'ї овалів Декарта (див. с. 139) і за допомогою якої можна здійснити трисекцію кута, названа на його честь *слимаком Паскаля*. У будинку Паскалів часто збиралися вчені, щоб обговорити різні наукові, зокрема математичні, проблеми. До них уважно прислуховувався Блез і настирливо просив батька докладніше розповісти про те, що вивчає математика. Але батько оберігав сина від нового захоплення. Блез і так викликáв тривогу: його розумовий розвиток значно випереджував фізичний. У чотири роки він умів читати і писати, виконував усно складні обчислення. Хлопець не знав веселих друзів і дитячих пустощів, на них не вистачало часу, бо жив він у полоні допитливості й шукань, горів на незгасному вогні пізнання, яке так і не зміг вгамувати за своє недовге, бентежне життя.

Пізнавши на собі, як може математика заволодіти людиною, Етьєн приховував від сина математичну літературу, навіть утримувався від розмов на математичні теми в присутності дітей. Однак перестороги були даремні. Хоча батько відкладав математику «на десерт», Блез випросив, щоб той коротко розповів йому про геометрію. Почутих відомостей було достатньо, щоб фантазія Блеза запрацювала. Він

розробив свою власну геометричну термінологію і, оперуючи нею, дійшов до 32-ї теореми першої книги «Начал» Евкліда. Якраз за цією грою його застав батько. Він був вражений недитячим захопленням сина. Програму навчання довелося змінити. Під керівництвом батька Блез з дивовижною швидкістю вивчив праці Евкліда, Архімеда, Аполлонія, Паппа, потім Дезарга. Одночасно вивчав латинську, грецьку, італійську мови, логіку, фізику, філософію. 13-річного Блеза допускають до участі в засіданнях гуртка Мерсенна. Хлопець недовго залишався мовчазним спостерігачем дискусій дорослих, з 15-ти років стає рівноправним і активним учасником наукових диспутів. А в 16 років дебютує знаменитим «Досвідом про конічні перерізи». Невеличке за обсягом дослідження (лише 53 рядки) було надруковане тиражем 50 примірників у формі афіші та ввійшло в золотий фонд математики.

«Досвід» містить основну теорему проективної геометрії і деякі визначні наслідки з неї. Твір мав великий успіх. Навіть Декарт, правилом життя якого було нічому не дивуватися, виявив бажання ознайомитися з «Досвідом» і прийшов до висновку, що 16-річний хлопець не міг такого написати.

У 1638 р. Блез мало не втратив батька, який мав необережність виступити проти деяких економічних заходів кардинала Рішельє. Етьєну Паскалю загрожувала Бастілія, і тому довелося переховуватися, рятуватися втечею в рідну Овернь. Незабаром трапилося так, що менша сестра Блеза — Жакліна успішно зіграла роль у любительському спектаклі, організованому кардиналом. Скориставшись цим, Жакліна випросила амністію для батька. Сентиментальний деспот змінив гнів на милість, і Етьєн Паскаль дістав високу посаду інтенданта у Верхній Нормандії. Так Паскалі опинилися в Руані.

Спостерігаючи за виснажливою обчислювальною роботою батька, 18-річний Блез починає працювати над створенням обчислювальної машини, за допомогою якої навіть незнайомий з правилами арифметики міг би виконувати її чотири дії. Точна механіка ще тільки народжувалася, тому юний винахідник здійснив справжній винахідницький подвиг, долаючи численні технічні труднощі. Робота вимагала величезного розумового і нервового напруження, оскільки точність виготовлення деталей, якої вимагав учений, перевершувала можливості навіть досвідчених майстрів.

Перша модель не задовольнила автора, і, вдосконалюючи своє «Паскалеве колесо», він виготовив 50 примірників різних моделей. Паскаль розв'язав найскладнішу проблему на шляху механізації обчислень — створив механізм перенесення десятків, який відрізнявся од усіх відомих на той час лічильних приладів. На руанський період припадають і визначні фізичні відкриття Паскаля. У 23 роки він звертається до проблем атмосферного тиску. Його досліди подарували світу знаменитий гідростатичний закон, ідею висотоміра і гідравлічного преса.

Узимку 1646 р. хворого Етьєна Паскаля лікували хірурги, послідовники релігійної секти янсеністів. Вони жили далеко від міста, тому оселилися в будинку пацієнта і поєднували хірургічні процедури з енергійною пропагандою своїх релігійних поглядів. Глава сім'ї одужав, а хворобливий і знервований Блез не переніс релігійної отрути. Його ясний творчий розум вперше затьмарили приступи патологічної релігійності.

Подолавши внутрішню кризу, вчений повертається до повнокровного життя; інтенсивно працює над трактатом з гідростатики і теорії конічних перерізів. Повернувшись з рідними в Париж, він накреслює широку програму досліджень.

Життя в Парижі було неспокійним. Улітку 1648 р. почалися заворушення, так звана парламентська Фронда,— виступ проти абсолютизму уряду Мазаріні народних мас, очолюваних парламентською буржуазією. Сім місяців сім'я Паскаля живе в бунтуючому Парижі, а коли наступило перемир'я, Етьєн із сином і меншою дочкою Жакліною вирушає в Клермон, щоб провідати старшу дочку Жільберту і рідню. Етьєн відчував, що наступив час прощальних візитів. Крім того, він сподівався відволікти сина від безперервного читання книжок, а Жакліну — від наміру піти в монастир. У Париж Паскалі повертаються в листопаді 1650 р. Тут на Блеза чекали нові випробування. У вересні 1651 р. він втратив батька, а на початку 1652 Жакліна таємно від брата пішла в монастир. Проте столиця надто багата враженнями, новими знайомствами, і вони скоро охолоджують біль втрат. Наукові відкриття, насамперед обчислювальна машина, приносять Паскалю всеєвропейську славу.

Технічна недосконалість і висока ціна перешкодили поширенню машини Паскаля, хоча вона відкрила нову епоху в історії обчислювальної техніки. Перевтома і нервове напруження позначилися на здоров'ї вченого. Він тяжко захворів. Головний біль усе частіше приковує його до ліжка і позбавляє можливості працювати. З того часу він, власне, вже ніколи не став повністю здоровим.

Серед нових паризьких знайомих вченого був дворянин де Мере, який був великим любителем азартних ігор.

Під час гри часто виникали суперечки з приводу справедливого розв'язання різних задач. Дві з них де Мере і запропонував Паскалю. Перша проста:

скільки разів потрібно кинути дві гральні кості, щоб шанси випадання двох шісток перевищила ймовірність протилежного результату?

Друга була значно складнішою (див. № 4 в кінці нарису). З приводу її Паскаль і зав'язав листування з Ферма. Різними методами вони здобули однаковий результат.

Так, у процесі розв'язування окремих задач, дискусій, які виникали навколо них, формувалися основні поняття і методи теорії ймовірностей. Дещо пізніше теоретико-ймовірнісні і комбінаторні задачі зацікавили голландського математика Хрістіана Гюйгенса. Нова галузь математики виникала не на порожньому місці. У Паскаля та його сучасників були попередники, але вони не побачили, що азартні ігри — зручна форма для побудови математичних моделей, закономірностей масових випадкових подій.

У період листування з Ферма Паскаль написав «Трактат про арифметичний трикутник», в якому узагальнив ряд комбінаторних задач і дослідив цікаві властивості числової таблиці

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

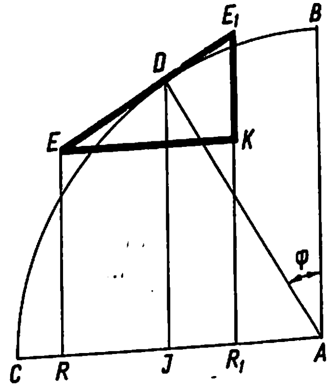
Цю таблицю тепер частіше друкують в іншій формі (див. задачу № 2). Вона була відома в Індії ще в II ст. до н. е., а в Західній Європі — із XVI ст.

Паскаль перший систематично виклав двадцять основних властивостей чисел трикутника, показав застосування його для вивчення сполук, степенів бінома і розподілу ставок між гравцями. Цікаві результати виклав учений у роботі «Про підсумування числових рядів», поданій у додатку до трактату про арифметичний трикутник. Тут поняття суми фактично використовується в тому розумінні, в якому в сучасній математиці відповідає поняття інтеграла, правило відкидання будь-якого числа величин нижчого порядку стало надзвичайно продуктивною ідеєю в формуванні аналізу нескінченно малих.

У цей час учений живе великими планами. Майбутнє бачилося в активній громадській і науковій діяльності. У «Посланні Паризькій академії» він подає перелік своїх надрукованих і підготовлених до друку праць, готується поступити на державну службу, одружитися. Тоді й трапилося непоправне, яке зламало його життя. 15 листопада 1654 року Блез виїхав з друзями на прогулянку. Недалеко від Парижа, поблизу села Нейї, екіпаж їхав по мосту через Сену. У зв'язку з ремонтними роботами частину поручнів мосту зняли. Злякавшись, коні рвонули вбік і звалилися з мосту. Передня пара впала в річку, але посторонки обірвалися, і екіпаж завис над прірвою. Блез бачив глибоко внизу стовпи води, яка зімкнулася над кіньми, що пішли на дно. Потрясіння було жахливим. Паскаль втратив свідомість, потім тяжко захворів. Цим скористалися янсеністи. За допомогою сестри вони намагалися переманити його в свій табір. Випадок на мосту полегшив полювання церковників за своєю жертвою. Скориставшись внутрішнім надломом хворого, вони доводили, що порятунок на мосту — знак божий, і тому вчений має віддатися служінню богу. Паскаль і до цього часу переживав драматичні внутрішні діалоги між вченим, з одного боку, і філософом-моралістом, теологом — з другого. Його нервувало хижацьке прагнення вищого світу до зовнішнього достатку, успіху, насолоди. Підточувало недовір'я до власної наукової діяльності. Тепер ця боротьба досягла трагічної гостроти. У понеділок, 23 листопада 1654 р., Паскаль пережив приступ релігійної екзальтації. Похапцем він записав уривки думок, які проносилися в його свідомості. Потім старанно переписав їх на пергаменті, і носив їх як амулет. Ці записи було виявлено випадково після смерті вченого. На початку 1655 р. Паскаль переїздить у монастир янсеністів Пор-Рояль, де найдосвідченіші проповідники роблять усе, щоб остаточно отруїти його свідомість, відвернути од науки. Через деякий час вони втягують Паскаля в боротьбу проти своїх конкурентів — ієзуїтів. Протягом чотирнадцяти місяців він написав цілий том «Листи до провінціала», в яких із сарказмом виступив проти всемогутнього ордену ченців, яких боялася і захищала сама королівська влада. З дивовижним талантом учений викрив у своїх «Листах» погляди ієзуїтів, показав облудність їхньої зовнішньої набожності, висміяв і засудив їхню аморальність. На ноги підняли всю поліцію Парижа, провели численні арешти, допити, скрізь нишпорили шпигуни, а Паскаль в глибокій конспірації завершив свій твір, який став символом боротьби проти неправди, деспотизму, насильства, обскурантизму, антигуманізму. Книгу негайно засудили до спалення, а на початку 1657 р. як єретичну внесли в індекс заборонених книжок.

Якщо «Листи» принесли радість боротьби проти антигуманної ідеології, то останню радість наукової творчості подарувала вченому математика, до якої він повернувся весною 1658 р. Переказують, що тієї ночі Паскаль страждав від страшного зубного

болю, і щоб якось забутися, почав міркувати над задачами про криву лінію — циклоїду, або рулету. То була дивовижна ніч. Упали всі пута, що сковували його геніальну думку. Потрібно було вісім днів напруженої роботи, щоб переписати теореми і доведення, розв'язання задач, відкриті тієї ночі.



Мал. 22

Знайомі вченого зібрали гроші, щоб організувати міжнародний конкурс розв'язування задач про циклоїду. У 1658 році Паскаль під псевдонімом Амос Деттонвіль надіслав відомим ученим запрошення і сам узяв участь у конкурсі. Його способи розв'язування задач виявилися найкращими і захоплювали всіх учасників конкурсу. Гюйгенс писав, що йому хотілося б називатися учнем Паскаля в науці, де Паскаль, безумовно, перевершує всіх. Одержана премія пішла на друкування серії мемуарів Амоса Деттонвілля.

У 1659 р. вийшли «Листи Амоса Деттонвілля до п-на Каркаві», які складаються з п'яти трактатів. Один з них «Трактат про синус чверті круга» містить винахід Паскаля, який відіграв велику роль у становленні математичного аналізу. Паскаль доводить тривіальну рівність: $|DI|:|DA|=|RR_1|:|EE_1|$, яка виявилася невичерпною за кількістю наслідків. Трикутник EE_1K — буквально історичний (мал. 22). Лейбніц назвав його «характеристичним трикутником» і писав, що саме він дав йому перший поштовх до винайдення диференціального числення. Паскаль у термінах елементарної геометрії дістав, по суті, перші тригонометричні інтеграли

$$r^2 \int\limits_0^{\varphi_1} \sin \varphi d\varphi = r^2 (1 - \cos \varphi_1) = r|OC|, \quad \int\limits_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi,$$

$$\int\limits_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi,$$

обчислив складні квадратури, центри ваги, об'єми і т. д. Трикутник EE_1K Паскаль застосував тільки для інтегрування, Лейбніц же, поклавши довжини його сторін нескінченно малими, дістав основну формулу диференціала дуги: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ і побудував диференціальне числення. Важливим досягненням Паскаля було те, що він уточнив поняття суми нескінченно малих величин: якщо розбивати якусь фігуру на нескінченно малі частини, то сума площ цих частин дорівнюватиме площі всієї фігури тільки тоді, коли підсумовувати нескінченне число таких частин.

На жаль, творче піднесення тривало недовго. Далася взнаки перевтома, вплив янсеністських проповідників, які породжували зневіру, відчай.

Учений знову впадає в тенета страху й містики, відходить од науки і цього разу назавжди.

Весною 1660 р. хворий Паскаль відвідав рідний Клермон. Ферма запрошував його до Тулузи, але сили на таку подорож уже не було, він тільки спромігся повернутися до Парижа. Тут у грудні 1660 р. Паскаля двічі відвідав Гюйгенс, на якого господар справив гнітюче враження. 37-річний учений був з виду знесиленим старцем. Гюйгенс відгукнувся на його смерть сумним вироком: «Я дуже засмучений смертю незрівнянного Паскаля, хоча він уже давно був мертвим для геометрії. Я завжди сподівався, що він одужає від слабості й візьметься за науку, в якій досяг таких великих успіхів».

Французькі матеріалісти бачили в трагедії Паскаля один з тяжких поєдинків відживаючого минулого із силами прогресу. Поль Гольбах писав: «Приклад Паскаля доводить тільки, що й геній може мати в серці куточок, де гніздиться божевілля, і стає дитиною, як тільки ним оволодіває марновірство». Гнівно затаврував винуватців трагедії геніального вченого Дені Дідро: «Паскаль був чесним, але боязливим і марновірним... Він, напевно, пролив би світло на таємниці світобудови, якби провидіння не віддало його в руки людей, які принесли його талант у жертву своїй люті».

Трагедія Блеза Паскаля, його життя, сповнене внутрішніх суперечностей, криз і зламів,— одна із сторінок боротьби релігії проти науки. Місце його в історії науки визначили його великі відкриття, зроблені в той час, коли він не знав пут релігійного уярмлення або знаходив у собі сили розірвати їх. Ці відкриття назавжди вписали його ім'я в історію математики, фізики, філософії, літератури.

Задачі

1. *Загальна ознака подільності Паскаля.* Натуральне число a, задане в позиційній системі з основою p ($p \in N$, $p \geqslant 2$), ділиться на число b тоді і тільки тоді, коли на нього ділиться сума добутків кожної цифри a на остачу від ділення на b відповідних розрядних одиниць ($1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}, p^n$).

2. Найрізноманітніші числові відношення приховує в собі трикутник Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \end{array}$$

Знайдіть деякі з них: а) виведіть формулу для суми чисел у кожному горизонтальному рядку трикутника Паскаля; б) обчисліть суми в кожному горизонтальному рядку трикутника Паскаля, якщо числа, які стоять на парних місцях, брати із знаком мінус; в) назвемо проспектами трикутника Паскаля послідовності чисел: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...; 1, 4, 10, 20, 35, ... і т. д. Обчисліть суму m членів n-го проспекту; г) знайдіть на трикутнику ряди чисел Фібоначчі (див. с. 172) виду $\frac{n(n+2)}{2}$ — трикутних, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ — пірамідальних.

3. *Теорема Паскаля.* В усякому шестикутнику, вписаному в криву другого порядку (коло, еліпс, параболу, гіперболу), три точки перетину протилежних сторін лежать на одній прямій. Доведіть теорему Паскаля для шестикутника, вписаного в коло.

4. Два однаково вправні гравці грають у гру, яка не допускає нічиєї. Вони зробили рівні ставки і домовилися, що той, хто раніше набере 10 виграних партій, одержить усі гроші. Гру було припинено з рахунком 9 : 8. Як вони мають розподілити гроші?

ХРІСТІАН ГЮЙГЕНС
(1629—1695)

Я був Вашим раніше, ніж Ви приїхали у Францію. І коли спитали, яка моя думка про Вашу систему Сатурна, я сміливо відповідав, навіть не заглянувши у Вашу книжку, що, оскільки вона вийшла з Ваших рук, вона аж ніяк не могла не бути досконалою.

П. ФЕРМА

Героїчна боротьба голландського народу проти іспанського абсолютизму і феодально-католицької реакції сприяли бурхливому розвитку суспільної думки і науки. Саме в цю епоху Голландія дала світу блискучу плеяду художників, природодослідників, інженерів, лікарів, філософів. Досить назвати імена Рембрандта ван Рейна, Симона Стевіна (1548—1620), Б. Спінози.

Голландія не була райським затишком, простих людей там експлуатували навіть більше, ніж в інших країнах, проте умови для наукової діяльності тут були кращими. Не випадково в ній шукав притулку Декарт й інші вчені.

На фоні талановитих голландських діячів науки і культури виділяється різносторонній учений, один з фундаторів нового природознавства Хрістіан Гюйгенс.

Народився Хрістіан Гюйгенс в сім'ї знатного державного діяча, людини широких наукових і мистецьких інтересів. Батько майбутнього вченого знав кілька мов, був відомий як поет, любив музику, малював, цікавився природничими науками. Серед друзів Гюйгенсів багато видатних людей, зокрема Декарт, для якого ця сім'я стала в Голландії найближчою. Вплив Декарта позначився на світогляді багатьох сучасників і послідовників його ідей, в тому числі й Хрістіана Гюйгенса. Обдарованість останнього Декарт виявив рано і підтримав його наукові інтереси.

У сім'ї Гюйгенсів було чотири сини і дочка. Народження останньої коштувало матері життя. Домашню освіту діти здобули під безпосереднім керівництвом батька і вчителів, які пунктуально виконували розроблену батьком програму навчання. Вже з дитинства Хрістіан почав захоплюватися математикою. З надзвичайною швидкістю він залюбки розв'язував запропоновані йому задачі, захоплювався розгадуванням секретів роботи та конструювання різних машин.

Улітку 1645 р. Хрістіан і на рік старший за нього брат Костянтин стали студентами юридичного факультету Лейденського університету. За волею батька, довелося займатися юридичними науками, а для задоволення особистих інтересів Хрістіан вивчає фізику і математику під керівництвом професора інженерної школи при Лейденському університеті, послідовника і пропагандиста декартової філософії Схоутена (1616—1661).

З допомогою батька Хрістіан почав листуватися з Мареном Мерсенном. І хоча це тривало недовго, бо Мерсенн помер, той встиг підтримати і скерувати наукові пошуки голландського студента. Мерсенн був добре поінформований про найвидатніші досягнення й актуальні проблеми європейської науки. Тому запропонував Хрістіану такі задачі і теми для роздумів, що деякі з них на роки стали предметом наукових занять, переросли в окремі наукові дослідження. Для Мерсенна кожний новий талант був радісним відкриттям. У листах до батька

він пророкував, що коли Хрістіан продовжуватиме заняття математикою і фізикою, то перевершить Архімеда.

З 1647 р. Хрістіан разом з молодшим братом Людвігом навчаються у вищій юридичній школі м. Бреди, хоча курсу вони не закінчили. Через дуель Людвіга з одним студентом, Гюйгенси за вимогою батька повернулися додому.

Здобутою юридичною освітою і дипломом доктора Хрістіан так ніколи й не скористався, бо, відмовившись од перспективи блискучої службової кар'єри, обрав наукову діяльність у галузі фізико-математичних наук.

Оселившись у Гаазі, в будинку батька, Хрістіан обладнав на горищі лабораторію, де проводив досліди й астрономічні спостереження. Його наукові інтереси охоплювали математику, механіку, оптику, астрономію. Мерсенн подбав, щоб ім'я Хрістіана стало відомим у наукових колах Європи, він встановлює зв'язки з математиками, майстрами-оптиками, астрономами, зокрема відомим англійським математиком Джоном Валлісом.

Перші надруковані праці вченого «Теореми про квадратуру гіперболи, еліпса і круга та центри ваги їх частин» (1651) і «Відкриття про величину круга» (1654) були присвячені вдосконаленню розв'язання задач античної математики. Девізом ученого було: «Не так важливий результат, як бездоганність виведення та ясність доведення», який він і реалізував строгим і разом з тим витонченим розв'язанням задач, зокрема знаменитої задачі давнини — квадратури круга. Видатне астрономічне відкриття здійснив учений у 1655 р. За допомогою виготовленого кращого на той час в Європі телескопа, він відкрив супутник Сатурна, названого пізніше Титаном. Шестиліття 1650—1655 рр. стало періодом формування його наукових інтересів, розробленням методів досліджень. Для дальшої роботи потрібно було встановити тісніші контакти із зарубіжними вченими, тому влітку 1655 р. Хрістіан їде до столиці європейської науки того часу — Парижа. Там він познайомився з визначними вченими, письменниками, композиторами, відвідав театри, картинні галереї, найбільше книгосховище — королівську бібліотеку, став доктором права. Велике враження справили на Гюйгенса дослідження Дезарга з проективної геометрії, Паскаля і Ферма з математичної теорії азартних ігор.

Подорож дала нові імпульси досліджень. Учений вивчає теорію співудару двох тіл, доцентрових сил, працює над різними проектами: взуття з пружинами, черевики для ходіння по воді, політ за допомогою крил, які мали працювати на стиснутому повітрі; в математиці його захоплює теорія азартних ігор. Одночасно продовжується шліфування лінз, виготовлення телескопів і астрономічні спостереження. Виготовлення найбільшого на той час телескопа дало Хрістіану можливість зробити чимало астрономічних відкриттів: туманність у сузір'ї Оріона, полярні шапки Марса, смуги Юпітера, відсутність скінченного діаметра в зірок і, нарешті, кільце Сатурна. Останнє відкриття викликало дискусію, недовір'я навіть деяких визначних астрономів. Воно підтверджувало коперникову систему, тому розлютило церковників, а в результаті принесло Гюйгенсу всеєвропейську славу.

Після повернення з Парижа Гюйгенс зайнявся проблемою створення годинника, в якій тісно переплелися задачі математики, механіки, техніки. Точного вимірювання часу вимагали астрономічні спостереження і, особливо, мореплавство. Точний час потрібно було «возити» на кораблі, щоб у відкритому океані вимірювати довготу й обчислювати географічні координати корабля. Тут був справжній ланцюг проблем і величезні можливості застосування математики до розв'язання складних природничих проблем. Гюйгенс розробив теорію і винайшов маятниковий годинник. Перший зразок було виготовлено в 1653 р., і того ж року вчений дістав патент, який закріплював його привілей на маятниковий годинник на 21 рік.

У 1658 р. Гюйгенс взяв участь у конкурсі Паскаля і розв'язав 4 із 6 запропонованих задач на циклоїду. Участь у конкурсі започаткувала листування Гюйгенса з Паскалем, які надзвичайно поважали і високо цінували один одного.

Учений потребує інтелектуального спілкування. Відчував у ньому потребу й Гюйгенс і за сім місяців 1660 р. відвідав багато міст, де зустрічався з тими, хто, як і він, працював над таємницями природи, збагачував духовну скарбницю людства. У грудні 1660 р. він двічі відвідав Паскаля. Гюйгенс засуджував надмірне захоплення вченого релігією і надзвичайно жалів, що той поховав свій великий талант.

Сам Гюйгенс був людиною хворобливою, часто тяжко хворів і змушений був на тривалий час припиняти роботу, але як тільки хвороба відпускала, знову брався за дослідження. І гідне подиву, що за таких нелегких умов він написав 22 томи наукових праць і листів, які ввійшли золотим фондом до скарбниці людської думки.

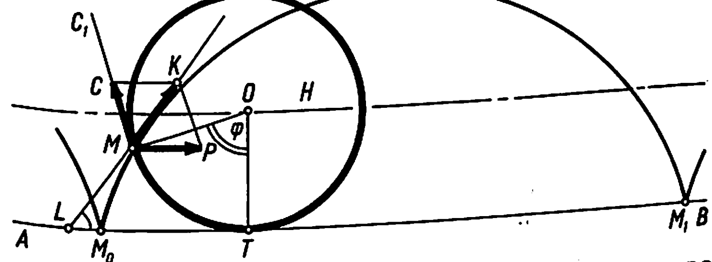
Визнанням наукових досягнень ученого стало обрання його членом Лондонського королівського товариства (1663) і Паризької академії (1666). Він переїздить до Парижа, і, оселившись в окремому приміщенні королівської бібліотеки, з невеликими перервами працює там 15 років. У 1673 р. у Парижі побачила світ його праця «Маятникові годинники» — підсумок 20-річних роздумів над проблемами, пов'язаними із створенням маятникових годинників. Праця Гюйгенса стала однією з найвизначніших книжок фізико-математичної літератури XVII ст. Він подарував її Лейбніцу, який у цей час жив у Парижі. Ця праця спонукала останнього не тільки серйозно зайнятися математикою, а й, за його визнанням, стала одним із джерел нового числення.

Десятиріччя 1671—1681 рр. було найскладнішим у житті вченого. Він опинився і працював у країні, яка воювала проти його батьківщини. Тому в 1676 р. виїздить на батьківщину, а повертається тоді, коли було укладено мир. Основні відкриття на цей час уже були позаду, зірка Ньютона затьмарює славу Гюйгенса. Після довгих років перебування за кордоном, учений повертається в батьківський дім.

До останніх днів життя вчений зберіг зацікавленість, глибокий інтерес до життя, науки, культури свого часу. Він здійснив подорож в Англію, насамперед щоб зустрітися з Ньютоном, успіхи якого високо цінував, ще працюючи в Парижі. У Дельфт він виїздив, щоб ознайомитися з відкриттям Левенгука. Через кілька років російський цар Петро I теж відвідає Дельфт з тією самою метою. Останню книжку «Космотеорос» Гюйгенс присвятив пропаганді ідей Коперника. Одним з перших її оцінив Петро I. Він наказав перекласти й опублікувати її російською мовою. Вона побачила світ першим виданням у Петербурзі (1717) і другим — у Москві (1724).

Гюйгенс зробив винаходи і відкриття в різних розділах математики і механіки, тісно пов'язаних з ученням про годинники. Йому належать винайдення звичайного маятникового годинника і годинника з конічним маятником, відкриття циклоїдального маятника, розв'язання задачі про таутохронну криву,

Мал. 23



розробка вчення про еволюти й евольвенти, про випрямлення багатьох кривих ліній і обчислення площ кривих поверхонь, теореми про доцентрові сили, застосування теореми живих сил, введення в механіку величини, що була прообразом моменту інерції.

Коротко спинимося на математичних відкриттях Гюйгенса. Його «Відкриття про величину круга» становило епоху в історії задачі квадратури круга. Гюйгенс вичерпав можливості елементарних методів і вніс істотні доповнення до методу Архімеда.

Завдяки знайденим вдосконаленням Гюйгенс обчислив для числа π втричі більше десяткових знаків, ніж можна було дістати звичайними методами. Так, для архімедового наближення Гюйгенсу було достатньо правильного вписаного трикутника; 60-кутник давав наближення:

$$3{,}141\,592\,653\,3 < \pi < 3{,}141\,592\,653\,8.$$

Блискучі математичні відкриття містила книжка «Про маятникові годинники». Гюйгенс відкрив, що кривою, по якій точка рухатиметься так, щоб період її коливань не залежав від амплітуди, так званою «таутохроною» (рівночасовою), буде циклоїда. Її можна означити як траєкторію точки, що лежить на крузі, який без ковзання котиться по прямій (мал. 23). Циклоїдальний маятник, на відміну од звичайного, має властивість ізохронності. Гюйгенс довів, що циклоїда — єдина таутохронна крива. У пошуках технічної реалізації ізохронного маятника вчений прийшов до теорії еволют і евольвент. Еволютою циклоїди є теж циклоїда, тільки зсунута. Евольвентою кривої називається її розгортка. Сама крива є еволютою для своєї евольвенти. Весь цикл здобутих при цьому результатів став складовою частиною диференціальної геометрії, яка вивчає властивості кривих і поверхонь методами математичного аналізу.

Велике місце в математичній творчості Гюйгенса займає вивчення властивостей деяких спеціальних кривих, вивчення максимумів і мінімумів, задач на проведення дотичних до різних кривих.

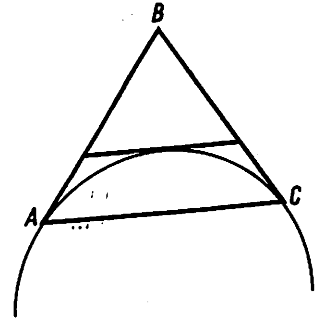
Гюйгенс — автор першого посібника з теорії ймовірностей — «Про розрахунки в азартній грі» (1657). У ньому вперше було введено фундаментальне теоретико-ймовірнісне поняття — *математичне сподівання.* Одночасно вчений розв'язав задачі на справедливий розподіл ставок при різній кількості гравців і різній кількості недограних партій. При цьому він вільно користувався теоремами додавання і множення ймовірностей.

Великий учений був сучасником творців математичного аналізу, бачив перші його кроки і сам певною мірою використовував в своїй творчості. Однак він ще тільки провісник, а не діяч епохи математики рухів.

Задачі

1. Якщо в круговий сегмент, менший від півкруга, вписати найбільший трикутник і таким чином вписати по трикутнику в обидва сегменти, що залишилися, то площа першого трикутника менша

від збільшеної вчетверо площі двох інших трикутників, узятих разом.



Мал. 24

2. Нехай дано круговий сегмент, менший від півкруга, і $\triangle ABC$ (мал. 24), в якого основа збігається з хордою сегмента, а бічні сторони — дотичні до дуги сегмента. Тоді дотична, проведена через середину дуги сегмента, відтинає од даного трикутника новий трикутник, площа якого більша від половини площі найбільшого вписаного в сегмент трикутника.

3. Нехай a і b — додатні числа і $b>a$. При якому виборі чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вибраних між b і a, буде вираз $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$ найбільшим?

СУЧАСНИКИ ЕПОХИ

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (1180—1240) — перший самостійний математик Західної Європи. Вивчав математику країн ісламу в Алжірі, відвідав також Єгипет, Сірію, Візантію і Сіцілію. Найвидатніший учений свого часу. Палкий прихильник і пропагандист десяткової позиційної системи числення і заснованої на ній арифметиці. Виключну роль у поширенні в Західній Європі нової арифметики та інших математичних знань мала «Книга абака» (1202, перероблене видання 1228). У ній було систематизовано величезну кількість математичних знань з праць античних учених, математиків країн ісламу і відкриті автором методи розв'язування задач. Усе це було викладено з дуже великою майстерністю. Покоління математиків запозичували із цієї книжки цікаві задачі, арифметичні і алгебраїчні приклади.

Деякі задачі Фібоначчі пізніше були розвинені в математичні теорії, які стали застосовувати в самій математиці та інших галузях знання. Такою є, наприклад, знаменита задача про кролів, яка приводить до рекурентної числової послідовності — ряду Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Ніколь Орем (бл. 1323—1382) — один із зачинателів наукової літератури французькою мовою, дав правила оперування з дробовими показниками степеня, довів розбіжність гармонічного ряду, розглядав геометричні фігури нескінченних розмірів, які мають скінченну площу. Користуючись своєрідною термінологією, детально розглядав функціональні залежності між змінними величинами і дав способи графічного подання функціональних залежностей.

Лука Пачолі (1454—1514) — італійський математик, автор великого твору «Сума знань з арифметики, геометрії, відношень і пропорційності», в якому виклав різні способи арифметичних дій, розв'язування алгебраїчних і геометричних задач. Властивостям золотого поділу та пропорціям в архітектурі і будові людського тіла Пачолі присвятив працю «Про божественну пропорцію», ілюстрації до якої виконав геніальний художник і вчений Леонардо да Вінчі.

Бонавентура Кавальєрі (1598—1647) — італійський математик завідував кафедрою астрономії Болонського університету. У своєму головному творі «Геометрія, викладена новим способом за допомогою неподільних неперервного», розробив свій метод геометричного інтегрування, за допомогою якого обчислював площі плоских фігур і об'єми тіл. В основі його лежали такі три теореми:

1. Якщо в двох плоских фігур будь-які дві відповідні лінії подібні (рівні), то й сукупності ліній подібні (рівні).

2. Площі двох фігур відносяться, як їхні сукупності ліній.

3. Ці дві теореми не залежать від вибору напряму неподільних у фігурах.

Метод неподільних Кавальєрі понад п'ятдесят років був знаряддям розв'язування задач, яке потім взяло на себе інтегральне числення.

Роберваль (Жіль Персонн) (1602—1675) — французький математик, член Паризької академії. Один з учасників гуртка Мерсенна. Одночасно з Кавальєрі і незалежно від нього розробив метод неподільних, який успішно застосував до обчислення довжин кривих ліній, площ плоских криволінійних фігур і об'ємів деяких тіл.

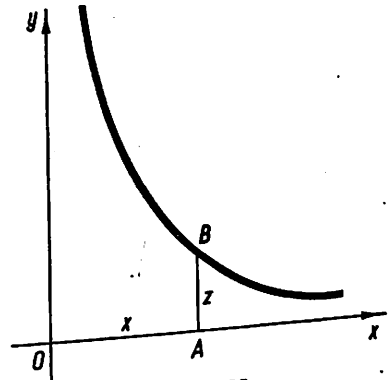
Розробив послідовну теорію побудови дотичних до кривих. Роботи вченого вплинули на формування ідей і методів математичного аналізу.

Еванджеліста Торрічеллі (1608—1647) — видатний італійський учений, фізик, математик. Відкрив атмосферний тиск, завдавши удару усталеній думці, ніби природа боїться пустоти. Винайшов барометр, установив ряд теорем балістики, сформулював закон витікання рідини з посудини.

Удосконаливши метод неподільних Кавальєрі, обчислив деякі нові квадратури і кубатури, які були, по суті, першими обчисленнями невласних інтегралів. Так, обчислюючи об'єм тіла, утвореного обертанням вітки гіперболи $xy=2k^2$ навколо осі Oy (мал. 25), Торрічеллі встановив, що цей об'єм дорівнює $\pi(2k)^2|AO|$. Результат викликав захоплення самого творця теорії неподільних. Кавальєрі писав Торрічеллі: «Я дякую Вам за доведення про гостре гіперболічне тіло — доведення воістину божественне. Я не в силах збагнути, як Ви наважилися з такою легкістю занурити Вашу мірну віху в нескінченні глибини цього тіла, бо воістину воно мені здається нескінченно довгим».

Торрічеллі проклав дорогу до найважливішої теореми математичного аналізу про взаємну оберненість операцій інтегрування і диференціювання. Хоча ця теорема була сформульована в термінах механіки для рівномірно прискореного руху, ідею про взаємну оберненість задач на обчислення квадратур (або кубатур) і проведення дотичних до кривих, або операцій інтегрування і диференціювання, вже було висловлено. Учений розробив кінематичний метод побудови дотичної до кривої в точці і ввів нове важливе математичне поняття обвідної сім'ї кривих.

Джон Валліс (Уолліс) (1616—1703) — перший з англійських математиків, який займався задачами



Мал. 25

математичного аналізу. Обчислив визначені інтеграли від степенів з будь-якими раціональними показниками та інших алгебраїчних функцій. Першим арифметизував поняття інтеграла, розглядаючи його як границю відношення числових послідовностей незалежно від поняття площі. Розвинув метод неподільних Кавальєрі, дав чітке формулювання методу обчислення площі криволінійної фігури. Приділив багато уваги теорії паралельних прямих.

Ісаак Барроу (1630—1677) — видатний англійський математик, працював над обробкою творів античних авторів. Удосконалив метод Ферма проведення дотичних до кривих, який звів до обчислення границі відношення $\frac{dy}{dx}$. У математичній формі довів взаємну оберненість операцій інтегрування і диференціювання, зробивши завершальний крок у передісторії математичного аналізу. Після Барроу основні операції нового числення вже стали зрозумілими. Лишалося знайти загальний алгоритм (вираз Лейбніца), який позбавив би від необхідності для кожної окремої задачі знову шукати границю відношення нескінченно малих.

ЕПІЛОГ ЕПОХИ

Провісниками нової математики були вчені Стародавньої Греції. Біля витоків сучасного математичного аналізу стоїть творець математичного атомізму

Демокріт. Метод вичерпування Евдокса Кнідського, інтегральні методи Архімеда, квадратури і кубатури вчених країн ісламу — все це важливі етапи на довгому шляху пошуку.

Першими сказали нове слово в математиці епохи Відродження італійські вчені. Вони збагатили математику формулами розв'язання рівнянь третього і четвертого степенів і відкрили широкі перспективи розвитку всієї математики. Відкриття Н. Тартальї, Д. Кардано, Л. Феррарі надихнули вчених на пошуки алгоритму розв'язання в радикалах рівнянь п'ятого і вищих степенів. Цей пошук привів до створення нових надзвичайно важливих математичних теорій, які пролили світло на багато загадкових явищ у математиці, що турбували вчених багатьох поколінь.

У XVII ст. жило і діяло блискуче сузір'я геніїв, тому його по праву називають століттям гігантів. Прийнявши естафету вчених минулих століть, вони обновили і підняли до небачених раніше висот завоювання людської думки у відкритті законів навколишнього світу.

До кінця XVI ст. математика складалася з арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії. Це була переважно математика сталих величин. Але з кінця цього століття запити господарської діяльності, організації виробництва, розвитку промисловості, створення техніки, мореплавство поставили перед наукою завдання, які вже не можна було розв'язати засобами математики сталих величин. Відповідаючи на запити часу, математики працювали над створенням потужних методів вивчення властивостей твердих тіл, рідин, газів; формували нові математичні поняття і створювали цілі теорії для розв'язування все складніших задач практичного характеру.

Необхідність виконувати велику кількість обчислень змусила вчених вдосконалювати обчислювальні алгоритми і техніку обчислень. Голландський інженер і математик Сімон Стевін у книжці «Десята» (1585) опублікував і пропагував відкриті ним десяткові дроби. Він дотепно критикував назви від'ємних, ірраціональних і уявних чисел, заявляючи, що немає ніяких абсурдних, неправильних або глухих чисел. З деякою обережністю він включив до поняття числа й від'ємні числа. Ця концепція єдиного дійсного числа мала велике значення для дальших успіхів алгебри та її застосувань у геометрії.

Пошуки простих і надійних алгоритмів обчислення коренів рівнянь з даними числовими коефіцієнтами, обчислення числа π і розв'язування задач з астрономії і мореплавства привели до створення різних математичних, зокрема й тригонометричних, таблиць. Над створенням таких таблиць працювали М. Коперник, Й. Кеплер, учень М. Коперника Ретікус та ін.

Багато дало XVII століття для розробки допоміжних засобів обчислень. Близько 1594 р. шотландський барон Непер винайшов логарифми, які опублікував у «Описі дивовижної таблиці логарифмів» (1614). У 1620 р. вийшли таблиці логарифмів швейцарського механіка і годинникаря Іобста Бюргі. Поширилися неперовські обчислювальні палички. Е. Гюнтер винайшов логарифмічну шкалу, яку вдосконалив і популяризував англійський математик і письменник Е. Уінгет, а сумістивши дві логарифмічні шкали, У. Оутред створив першу логарифмічну лінійку.

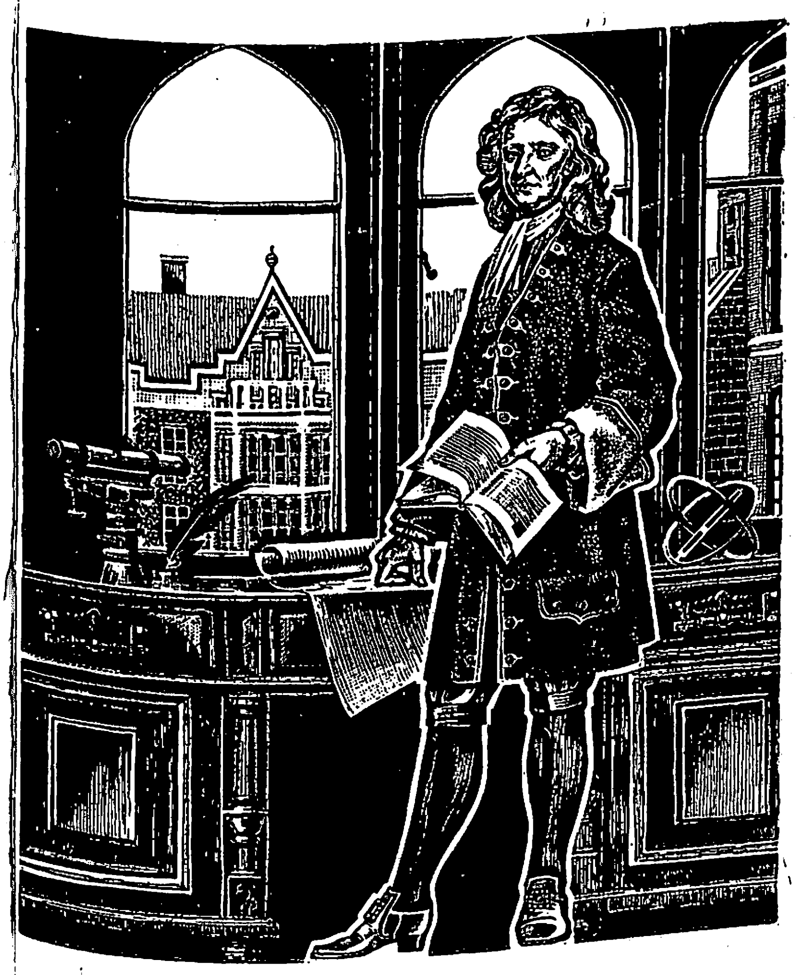
Французький архітектор Ж. Дезарг поклав початок нової галузі геометрії — проективної, яка вивчає властивості взаємного положення геометричних фігур. Джон Валліс намагався розкрити загадку паралельних. Він взяв за очевидне твердження про те, що для кожної геометричної фігури існує подібна їй фігура (твердження, еквівалентне V постулату), і виходячи з такого припущення, «довів» цей постулат.

Математика розвивалася в тісній взаємодії з іншими науками. У 1600 р. вийшов трактат англійського фізика У. Гільберта «Про магніт, магнітні тіла та про великий магніт — Землю», в якому закладено основи електро- і магнітостатики. У 1610 р. Г. Галілей уперше використав для спостережень небесних тіл виготовлену ним зорову трубу і зробив відкриття, які мали велике значення для розвитку науки і всієї культури. Е. Торрічеллі відкриває атмосферний тиск (1643) і способи одержання вакууму для створення першого барометра, Б. Кавальєрі у творі «Шість геометричних вправ» (1647) подає формулу лінзи.

Учені починають працювати вже організованими колективами — виникають перші академії. У 1603 р. у Римі було створено Академію рисьоокої (рись символізувала пильність членів Академії), яка існує і в наш час. У 1662 р. засноване Королівське товариство в Лондоні, в 1666 р.— Королівська академія наук у Парижі, першим президентом якої був Х. Гюйгенс.

Отже, магістральною лінією розвитку математики XVII ст. було розв'язування двох головних типів задач, з яких викристалізувалися фундаментальні операції нового числення — диференціювання й інтегрування, синтезом яких стала основна дисципліна класичної вищої математики — математичний аналіз.

МАТЕМАТИКА РУХІВ



ІСААК НЬЮТОН

(1643—1727)

...Для нас наукове обличчя Ньютона спокусливо чарівне, бо неухильність руху його розуму завжди буде для наступного дослідника тим, чим є компас для мандрівника, який вирушив у море.

М. М. ЛУЗІН

Серед геніїв XVII ст. Ньютон і Лейбніц височать як недосяжні вершини. Їхні імена відомі кожній освіченій людині і прикрашають історію науки. Вони підсумували результати тисячолітнього пошуку вчених різних країн і завершили формування однієї з важливіших галузей математики — математичного аналізу. Створення його відкрило величезні можливості для застосування математики в теоретичних дослідженнях і розв'язування практичних задач. Ньютон на 10 років раніше за Лейбніца прийшов до відкриттів з математичного аналізу, Лейбніц на 28 років раніше від Ньютона опублікував свої результати. Вони мали стати друзями, а завершили шлях ворогами. Їхні ж, не в міру діяльні шанувальники, мало не перетворили сварку за пріоритет у міжнаціональний конфлікт.

Ньютон народився в селі Вулсторпі, в 200 км на північ від Лондона і в 75 км на північ від Кембріджа. Батько його помер ще до народження сина. Мати незабаром вийшла заміж і виїхала із села, тому турботи про кволу дитину, в життя якої мало хто вірив, взяла на себе бабуся.

З дитячих років хлопчик виявив особливу схильність до механізмів і фізичних винаходів. Не було жодної машини, з якої б він не зумів зробити діючої моделі. Так, він спостерігав роботу вітряка, доки не збагнув принцип його роботи, після чого виготовив модель, якою керував незвичний мірошник — миша. Вона ж і споживала готову продукцію — борошно. У сільській школі Ньютон вчився спочатку без особливого завзяття. Випадок змусив змінити ставлення до навчання. Якось його побив однокласник. Не маючи фізичної сили, щоб розрахуватися з кривдником, Ньютон вирішив, що перевершить його в навчанні, і засів за книжки. Один з біографів ученого писав, що, очевидно, ніхто не попрацював кулаками з більшою користю для науки, ніж той розбишака.

Учителі звернули увагу на талант і успіхи Ньютона і порадили готуватися до вступу в університет. Але становище сім'ї погіршало. Мати овдовіла вдруге, і 16-річному Ісааку довелося зовсім залишити школу. Два роки він допомагав по господарству. Потім на рік повернувся до школи, вчився і готувався до вступу в університет. 5 червня 1661 р. Ньютон став студентом Триніті коледжу Кембріджського університету. Його прийняли на правах субсайзера — бідного студента, якому виділили гуртожиток і харчування, за що він повинен був прислуговувати бакалаврам, магістрам і студентам старших курсів.

Біографи вченого сходяться на тому, що енциклопедичні знання з математики, фізики і астрономії Ньютон здобув у роки навчання в університеті самоосвітою. Навіть лекції з математики і оптики відомого математика, професора знаменитої фізико-математичної люкасівської кафедри І. Барроу не виводили слухачів за межі елементарної математики. Від інших професорів він міг почути ще менше. Близький знайомий ученого А. Муавр розповів про випадок, який був для Ньютона поштовхом до серйозних занять математикою і фізикою.

Якось на ярмарку Ньютон випадково придбав книжку з астрології і виявив, що його математичної підготовки недостатньо, щоб зрозуміти навіть астрологічну премудрість. Щоб подолати свою математичну безпорадність, Ньютон і засів за «Начала» Евкліда, книжки з алгебри, «Геометрію» Декарта та інші праці видатних математиків. З осені 1664 р. він почав власні наукові дослідження, наприклад відкрив названий його ім'ям загальний розклад степеня бінома: $(1+x)^r$, де $r \in \mathbf{Q}$.

Його успіхи помічає начальство, і в січні 1665 р. Ньютонові надають першого вченого ступеня — бакалавра.

Епідемія чуми, яка лютувала в той час у Лондоні, змусила багатьох його жителів рятуватися від грізної пошесті в селах. Ньютон до березня 1667 р. жив у Вулсторпі, на фермі матері.

Два роки «чумної відпустки» в сільській глушині — унікальний збіг обставин, дав можливість Ньютону зосереджено думати над науковими проблемами.

Зовсім недавно в паперах вченого знайшли запис: «У тому самому році я почав думати про тяжіння, яке досягає орбіти Місяця... Усе це відбувалося в два чумні роки — 1665 і 1666, бо я в цей час був у розквіті винахідницьких сил і думав про математику і філософію більше, ніж будь-коли потім».

Ньютон, справді, вмів захоплюватися обчисленнями і, забувши про все, думати над поставленими завданнями доти, поки не бачив виходу з логічного лабіринту. Знаменитий випадок з падаючим яблуком,

переказаний племінницею вченого, належить якраз до золотих вулсторпських років і, якщо він є лише красивою легендою, все одно характерний для стилю роботи вченого. Перший варіант закону всесвітнього тяжіння він записав на зворотному боці клаптика паперу з пунктами договору про розподіл батьківської спадщини, а на іншому клаптику написав: «Досліджуваний предмет я тримав постійно в пам'яті, повертаючи його з різних боків, доки не вдавалося, нарешті, знайти ту нитку, яка приводила мене до чіткого уявлення».

За роки вулсторпської самотності в Ньютона виникли, склалися і значною мірою були реалізовані головні ідеї його безсмертних відкриттів з математики, механіки, оптики, зокрема закон всесвітнього тяжіння і конструкція дзеркального телескопа. У галузі математики він завершив пошук і вдосконалення методів розв'язування знаменитих задач обчислення площ і об'ємів криволінійних фігур, проведення дотичних до кривих ліній у заданій точці. Вони охоплюють основи сучасного інтегрального і диференціального числення, або класичної вищої математики. Ф. Енгельс писав про це відкриття: «З усіх теоретичних успіхів знання навряд чи якийнебудь вважається таким високим тріумфом людського духу, як винайдення числення безконечно малих у другій половині XVII століття» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 20, с. 539).

У Кембрідж Ньютон повернувся з рукописами п'яти мемуарів, у яких виклав найважливіші результати вулсторпських пошуків. При цьому вперше виявилася дивна риса характеру вченого. Він усе життя не любив друкуватися, ховав свої праці. Учений вірив, що нащадки краще за сучасників оцінять його спадщину, до того ж дискусії з опонентами відволікали од наукових занять. А спокійні роздуми над задачами він ставив над усе. Тому написані праці на роки ховалися в шухлядах письмового столу або сейфі. Основні математичні відкриття були систематично викладені вже восени 1666 р. Але мемуар «Міркування про квадратури кривих» вийшов у світ лише в 1704 р., працю «Наступні твердження достатні, щоб розв'язати задачі за допомогою руху», було знайдено й опубліковано лише через 300 років.

У Кембрідж повернувся вже сформований учений, хоча на шляху до визнання ще були й прикрі невдачі. У 24 роки він виставив свою кандидатуру на виборах членів ради коледжу і провалився. Його переміг інший претендент, ім'я якого тільки завдяки цьому випадку й залишилося в історії науки. Зрештою, він став молодшим, а згодом — старшим членом коледжу. Барроу, побачивши, як зростаюча слава учня перекриває його успіхи, в 1669 р. передав Ньютонові знамениту люкасівську кафедру. Молодий професор оселився на довгі роки в напівтемній професорській келії. Він не прийняв духовного сану, як того вимагала традиція, хоча спосіб життя його був дуже подібним до чернечого.

У 1671 р. Ньютон виготовив телескоп-рефлектор з діаметром дзеркала близько 2 м і відправив його королю. Телескоп справив враження на вчених, і 11 січня 1672 р. Ньютона обирають членом Лондонського королівського товариства (Національної академії наук).

Узимку 1673 р. у Лондоні два місяці жив Лейбніц. На засіданні товариства гість з успіхом демонструє свою лічильну машину, за винахід якої його обрали членом товариства. Лейбніц — людина надзвичайно комунікабельна. Він зав'язав знайомство з англійськими вченими, від яких міг чути й про Ньютонів варіант аналізу нескінченно малих, хоча

з автором так і не зустрівся. Творці нового числення не познайомилися й під час другого приїзду Лейбніца в Лондон. Вони здогадувалися, що, йдучи різними шляхами, здійснили одне й те саме відкриття. Учені обмежилися кількома листами, та в них дуже мало йшлося про їхнє велике дітище. Зрештою, Ньютон з допомогою спеціального шифру повідомив на континент суть свого методу. Лейбніц відповів викладом основної ідеї свого диференціального числення, потім написав ще, але відповіді не дістав. За наступне десятиріччя лейбніцовське числення ставало надбанням європейських учених. Нарешті, в 1684 р. на шести друкованих сторінках статті «Новий метод максимумів і мінімумів...» Лейбніц сповістив ученому світу про відкриття віку — диференціальне числення, а через два роки в тому самому журналі побачила світ його праця «Про глибоку геометрію...» — перший друкований твір з інтегрального числення.

З 1680 р. Ньютон працював над найвизначнішим своїм твором «Математичні начала натуральної філософії», які стали епохою в історії науки. Всеохоплюючий геній Ньютона в поєднанні з унікальною здатністю зосереджуватися над поставленими завданнями дали можливість із численних, розрізнених відкриттів багатьох математиків, астрономів, фізиків і філософів виділити найзагальніші закони земної і небесної механіки і серед них знаменитий закон тяжіння, якому підпорядковане падіння славнозвісного ньютонівського яблука, обертання планет навколо Сонця, рух далеких зірок і галактик, нашого Всесвіту.

Ніби завбачивши можливі легенди, які виникають навколо надзвичайних подій, Ньютон сам пояснив джерела своїх наукових тріумфів, які були результатами безперервного пошуку істини: «Якщо я побачив більше за інших, то тільки тому, що стояв на плечах гігантів».

Навіть від генія Ньютона така робота вимагала колосальної напруги сил. Його секретар Гемфрі згадував про роки цього неперервного пошуку наукової істини: «Він був зайнятий роботою постійно. Не дозволяв собі ні відпочинку, ні спорту, ні прогулянок. Ніколи не їздив верхи, вважав втраченою кожну годину, якщо та не була присвячена науковим заняттям. Рідко виходив він із своєї кімнати, де день за днем робив математичні розрахунки і теоретичні викладки. Він так захоплювався роботою, що забував обідати. Коли ж йому кілька разів нагадували про це, стоячи, з'їдав кілька кусків і мовчки повертався до перерваних обчислень. Восени і весною він багато часу проводив у хімічній лабораторії. На сон йому лишалося всього 4—5 годин на добу».

На рукопис «Начал» чекала доля бути похованим у сейфі, але товариш їх творця астроном Едмунд Галлей (1656—1742) наполягав на друкуванні, і Ньютон у 1686 р. передав рукопис Товариству. Коли з'ясувалося, що в касі Товариства немає грошей, щоб надрукувати книгу, Галлей узяв на себе всі грошові витрати. Тільки завдяки його послідовній підтримці в 1687 р. книжка вийшла в світ. В Англії за життя автора вона перевидавалася ще в 1713 і 1725 рр., російською мовою виходила в 1916 і 1936 роках у перекладі академіка О. М. Крилова. Цього разу теж знайшлися і спростовувачі, і претенденти на знамениті закони Ньютона, але прийшла і всеєвропейська слава. Коли в 1699 р. Паризька академія вперше обирала іноземних членів академії, серед них був і Ньютон.

У 1691 р. Ньютон тяжко захворів. Біда, яка спіткала вченого, мало не обернулася трагедією

для всієї науки. У відсутність господаря улюблений пес перекинув на рукописи свічку, яка горіла. Пожежа в квартирі знищила більшу частину рукописів. Ця подія викликала нервове потрясіння, яке лікарі м'яко називали нервовим розладом. Уся Європа знала про хворобу Ньютона. У червні 1694 р. Гюйгенс писав із Парижа в Німеччину Лейбніцу: «Можливо, Ви чули про те, що трапилося з шановним паном Ньютоном: у нього був приступ божевілля...». У Лондоні навіть ходили чутки, що Ньютон помер. Але в 1696 р. знаменитий швейцарський математик Йоганн І Бернуллі розіслав європейським математикам задачу на знаходження кривої, по якій матеріальне тіло в горизонтальній площині скотиться від точки *A* до точки *B*, які не лежать на вертикалі, за найкоротший час. Це була знаменита задача про відшукання кривої найшвидшого спуску — брахістохрони. На розв'язання її автор дав шість місяців. Ньютон дістав задачу 21 січня 1697 р., а другого дня надіслав Паризькій академії її розв'язання. Отримавши його навіть без підпису автора, Бернуллі сказав, що впізнав «лева по кігтях». Лейбніц розв'язав задачу Бернуллі в кареті по дорозі з Ганновера у Вольфенбюттель, «затративши на це не більше часу, ніж Ньютон».

Після цього випадку Ньютон вже майже нічого не дав для науки. Тим більше, що інші відповідальні доручення і захоплення теологією все менше залишали часу для наукових досліджень.

У 1699 р. Ньютона призначають директором Монетного двору в Лондоні, тому з 1701 р. він відмовляється од посади люкасівської кафедри. У 1703 р. Ньютона обирають президентом Лондонського королівського товариства і переобирають до кінця життя. Ньютон був першим ученим, який одержав титул лорда за наукові заслуги.

З часом Ньютон охоче береться за зближення науки з теологією, займається богословськими вправами. В Англії в XVII ст. поєднання наукових занять з богословськими було майже правилом.

Зрозуміло, що теологічні вправи не принесли слави авторові і не стали надбанням навіть теології.

Останні тижні свого життя вчений страждав від кам'яної хвороби, мужньо зносив біль. Його поховали в національному пантеоні Англії — Вестмінстерському абатстві. На пам'ятник, як і на друкування «Начал», ні Товариство, ні уряд Англії коштів не знайшли. Родичі виявилися щедрішими. На надгробку вони написали: «Нехай поздоровлять себе смертні з тим, що колись існувала така окраса людського роду!».

Ми вже згадували окремі математичні відкриття вченого, тепер спинимося на них детальніше. Почнемо з найголовнішого — числення нескінченно малих. Джерела його ідей започатковані в Античній Греції. Під час вивчення кривих ліній важливу роль відігравали дотичні до них. З ними пов'язувалися властивості кривих. Учені епохи Відродження ввели в геометрію ідею руху. Зокрема, дотичну означували вже як граничне положення хорди, коли обидві точки перетину її з кривою зливалися в одну. Оскільки математика стала вивчати не тільки стани, а й криволінійні рухи та їх швидкості, то проведення дотичних до можливо більшої кількості відомих кривих вимагала сама «математична мова книги природи» (Г. Галілей). Для розв'язання задач фізики і астрономії потрібно було знати геометричні властивості фігур у нескінченно малих масштабах, механікам потрібні були алгоритми обчислення площ і центра ваги фігур, астрономам — об'ємів тіл обертання.

Аналіз найважливіших завдань природознавства

виявив, що вони зводяться до двох типів математичних задач: 1) відшукання дотичної за заданою кривою і 2) відшукання самої кривої за заданою дотичною до неї. Ньютон розв'язав їх у механічній формі, досліджуючи змінні величини, які назвав *флюентами* (від лат. fluere — текти), у взаємозв'язку зі швидкостями змін флюент — *флюксіями* (від лат. fluxio — швидкість, перебіг). Усі флюенти Ньютона залежать від одного універсального аргументу — часу t. Перша задача — відшукання флюксії, коли задано флюенту. Це основна задача диференціального числення — обчислення похідної даної функції. Друга задача, обернена до першої,— відшукання флюенти, коли задано її флюксію, є основною задачею інтегрального числення — обчислення невизначеного інтеграла.

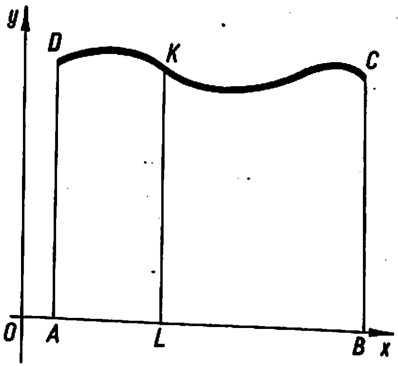
Флюенти, тобто функції, Ньютон позначав останніми літерами латинського алфавіту x, y, z, а відповідні їм флюксії, тобто похідні,— через $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Для обчислення миттєвої швидкості флюенти — флюксії потрібно було знайти відношення приросту шляху до приросту часу, а потім — границю цього так званого «останнього відношення», коли приріст часу прямує до нуля. Нескінченно малий відрізок аргументу (часу) позначався знаком O, який тільки нагадував число нуль, але нулем не був. Тоді момент флюенти x записувався добутком миттєвої швидкості флюенти на момент часу: $\dot{x}O$.

Приклад 1. Знайти флюксію (похідну) флюенти (функції) $y=x^2$. Надамо флюенті y нескінченно малої зміни. Тоді $y+O\dot{y}=(x+O\dot{x})^2$, $y+O\dot{y}=x^2+2xO\dot{x}+O^2\dot{x}^2$, $O\dot{y}=2xO\dot{x}+O^2\dot{x}^2$, $\dot{y}=2x\dot{x}+O\dot{x}^2$. Оскільки O, за означенням, є нескінченно мала величина, то членами, помноженими на неї, можна знехтувати. Тому $\dot{y}=2x\dot{x}$.

Приклад 2. Знайти флюксію флюенти $y=x^n$. За відомим уже алгоритмом дістанемо: $y+O\dot{y}=$

$$=(x+O\dot{x})^n;\ y+O\dot{y}=x^n+nx^{n-1}O\dot{x}+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}O^2\dot{x}^2+\dots;\ O\dot{y}=$$
$$=nx^{n-1}O\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}O^2\dot{x}^2+\dots;\ \dot{y}=$$
$$=nx^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}O\dot{x}^2+\dots;\ \dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Розв'язування задач другого типу привело до висновку, що обчислення площі, обмеженої деякою кривою, зводиться до знаходження флюенти за заданою флюксією. Ці задачі привели до надзвичайно важливого поняття вищої математики невизначеного інтеграла. Первісною функцією для $f(x)$ у заданому проміжку називається функція $F(x)$, якщо на всьому цьому проміжку $f(x)$ — похідна від $F(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ або $dF(x)=f(x)dx$. Термін «первісна (або примітивна) функція» ввів французький математик Лагранж. Функція $F(x)+C$ (де C — будь-яка стала) теж буде первісною для $f(x)$, тому первісну для $f(x)$ можна подати у формі $F(x)+C$. Останній вираз і називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і, за вдалою пропозицією Лейбніца, позначають символом $\int f(x)\,dx$.



Мал. 26

Наприклад, обчислимо площу, обмежену графіком неперервної на $[a, b]$ функції $y=f(x)$, віссю Ox і відрізками AD і BC (її називають криволінійною трапецією; мал. 26).

Розглянемо спочатку $S_{ADKL}=P(x)$, яка відповідає проміжку $[a, x]$, де $[a, x]\subset[a, b]$. Для знаходження функції $P(x)$ побудуємо Δx і відповідний йому приріст ΔP. Якщо m і M — відповідно мінімум і максимум $f(x)$ на проміжку $[x, x+\Delta x]$, то $m\Delta x<\Delta P<M\Delta x$, звідки $m<\frac{\Delta P}{\Delta x}<M$. Враховуючи, що $f(x)$ неперервна, m і M прямуватимуть до $f(x)$, якщо $\Delta x\to 0$, тому матимемо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta x}=P'(x)=f(x),$$

тобто похідна від змінної $P(x)$ по скінченній абсцисі x дорівнює скінченній ординаті $y=f(x)$, або площа $P(x)$ криволінійної трапеції $ABCD$ є первісною функцією для функції $y=f(x)$, тобто $P(x)=F(x)+C$. Враховуючи, що коли $x=a$, то $P(x)=0$, дістанемо значення для сталої C: $0=F(x)+C$, або $C=-F(a)$. І остаточно $P(x)=F(x)-F(a)$. Поклавши $x=b$, матимемо $S_{ABCD}=P(x)=F(b)-F(a)$, або в сучасних позначеннях:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Остання рівність — це і є знаменита основна формула математичного аналізу, яку тепер називають ім'ям Ньютона — Лейбніца. Уперше вона з'явилася в 1798 р. у другому томі «Трактату з диференціального і інтегрального числення» професора Політехнічної школи в Парижі Сільвестра Лакруа. Ньютон висловив її в геометричній формі. Вона наближує зовсім різнорідні ідеї, в єднанні яких виявляється вся потужність нового числення. З одного боку, ми знаходимо суму нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків, тобто виконуємо операцію, нездійсненну в скінченному вигляді без застосування трансцендентної операції граничного переходу; з другого — результат цієї операції подається цією формулою в скінченному вигляді (якщо відома первісна). Велика заслуга Ньютона і Лейбніца саме і полягає в побудові алгоритму скінченного подання результату нескінченної операції.

Над розв'язанням поставлених задач працювало багато вчених. Декарт і Ферма, можна сказати, були на порозі відкриття нового числення. Барроу не вистачало лише загальних позначень. Був час, коли навіть сам Ньютон думав, що відкриття методу дотичних зробив не він, а бельгійський математик Рене Слюз.

Оскільки метод флюксій застосовувався спочатку для многочленів у випадку, коли інтеграли безпосередньо не обчислювалися, Ньютон розкладав підінтегральну функцію в степеневі ряди та інтегрував їх почленно. Учений прийшов до висновку, що всі відомі йому функції можна подати єдиним способом у формі нескінченних многочленів — степеневих рядів: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$, де a_0, $a_1,\cdots$, a_n — деякі сталі числа.

Це була надзвичайно плідна для математики ідея. Систематичне дослідження величезної кількості нових функцій стало можливим тільки завдяки поданню їх сумами нескінченних степеневих рядів. Тому із 60—70-х років XVII ст. ряди стали так само необхідним знаряддям математиків, як і нескінченно малі величини. Чимало важливих результатів здобув учений в алгебрі і теорії рядів. Це насамперед метод наближеного обчислення коренів алгебраїчних рівнянь, обчислення сум n-х степенів коренів алгебраїчних рівнянь і багато інших, розповісти про які можна, лише ввівши складні поняття вищої математики.

Ньютонові належить почесне місце в історії математики і всього математичного природознавства,

Таблиця 1

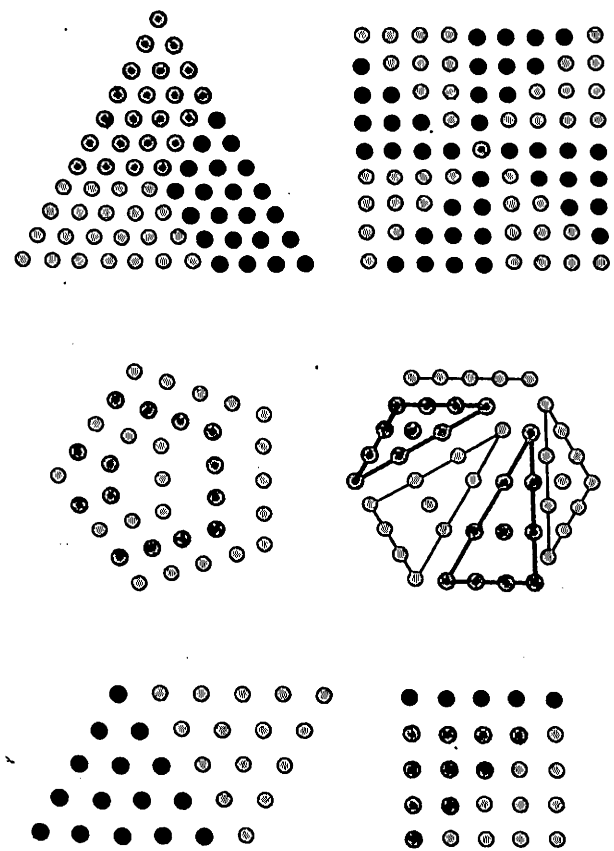


Таблица 2

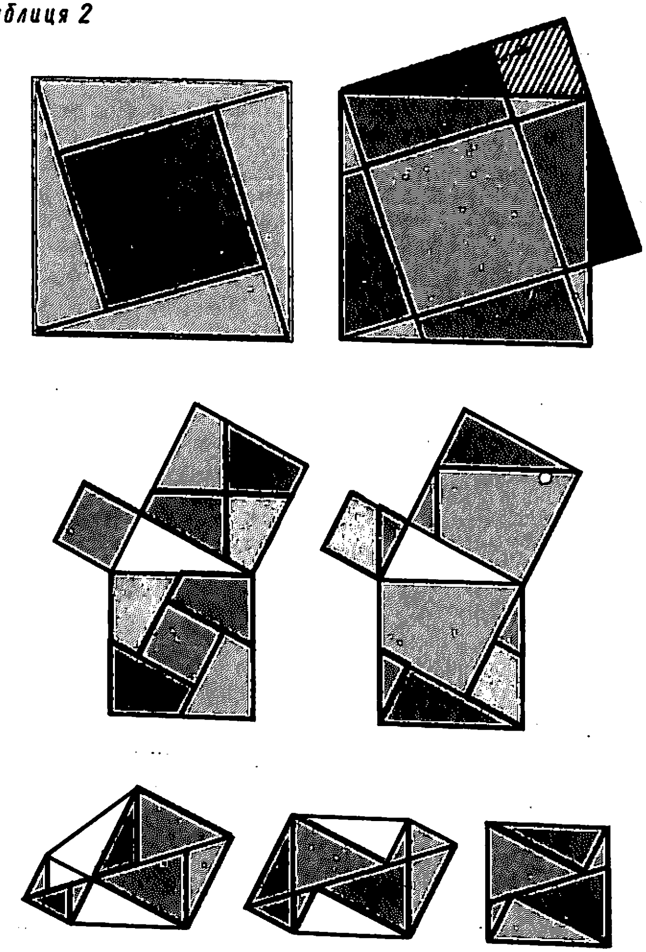
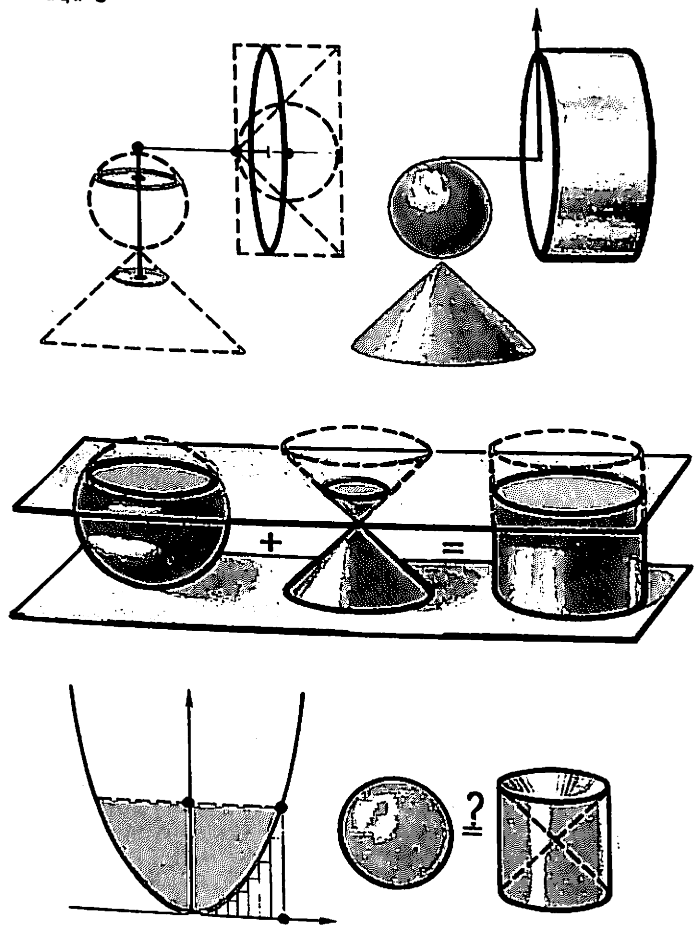
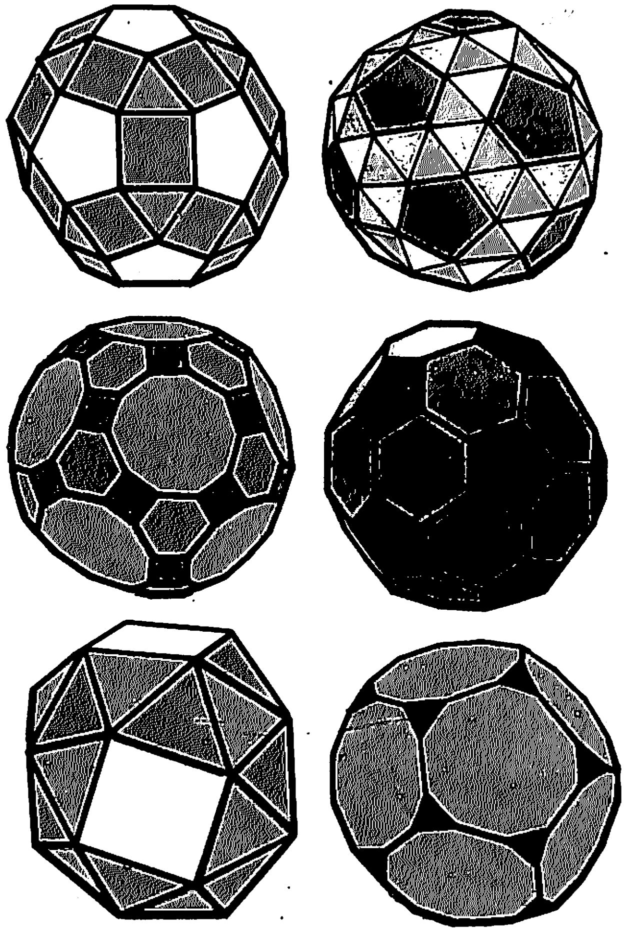


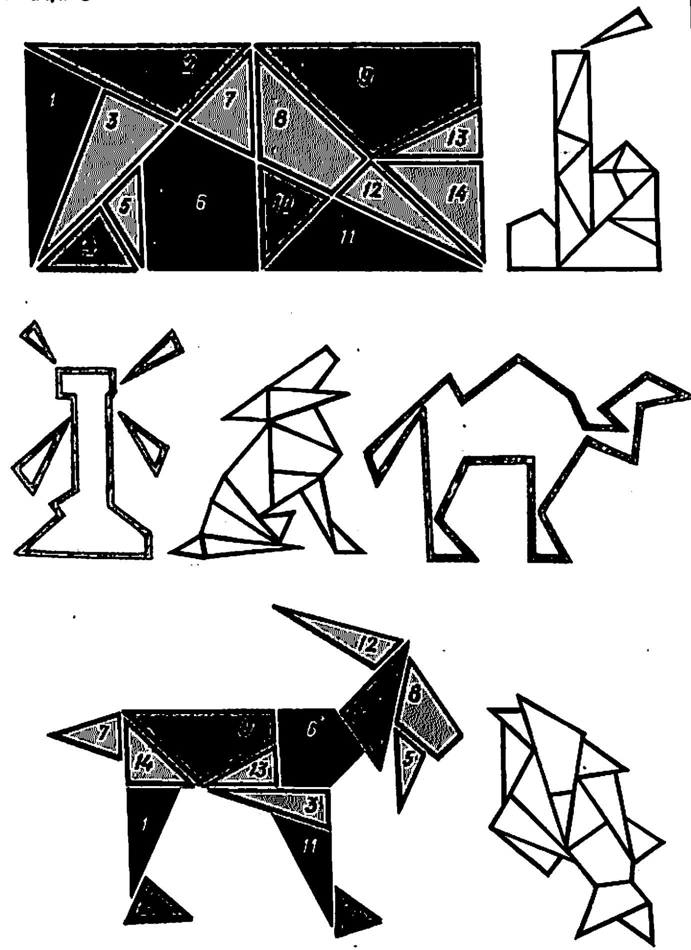
Таблица 3



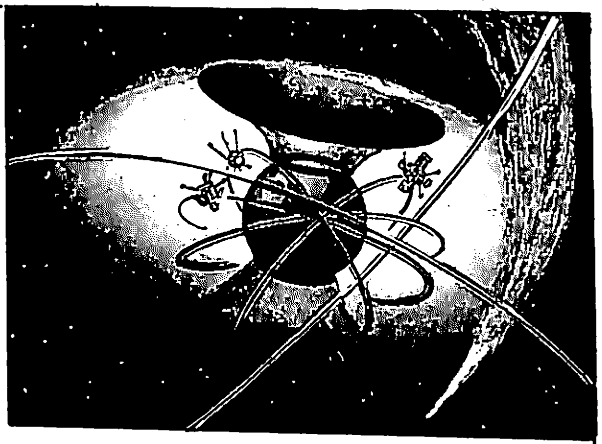
Таблиця 4

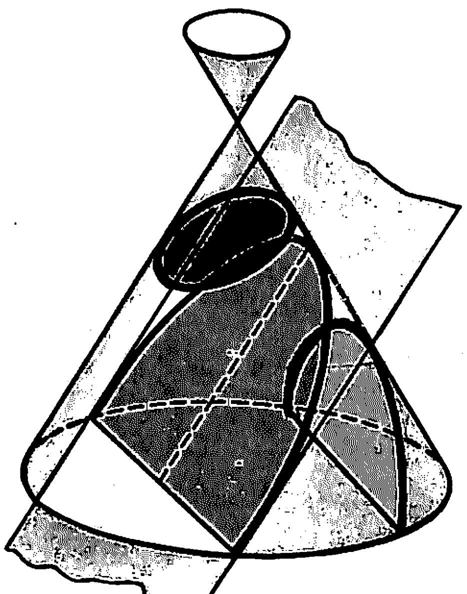


Таблиця 5

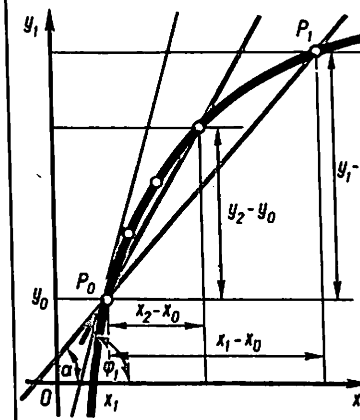


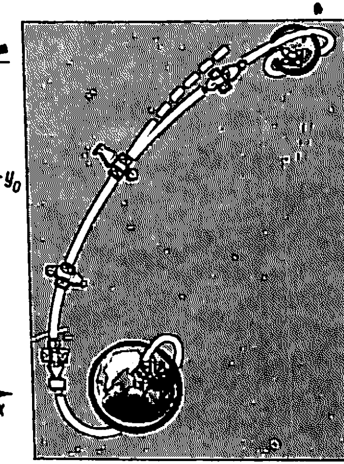
Таблиця 6

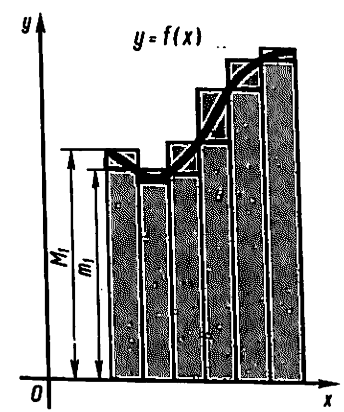


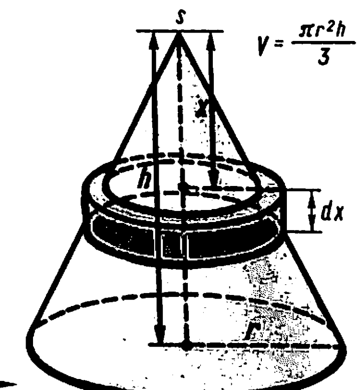


Таблиця 7

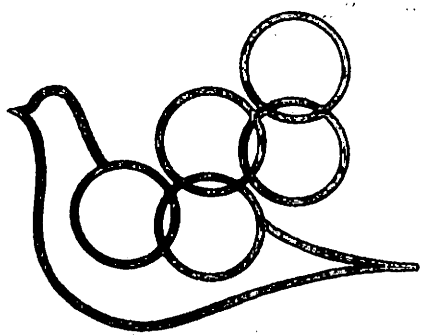


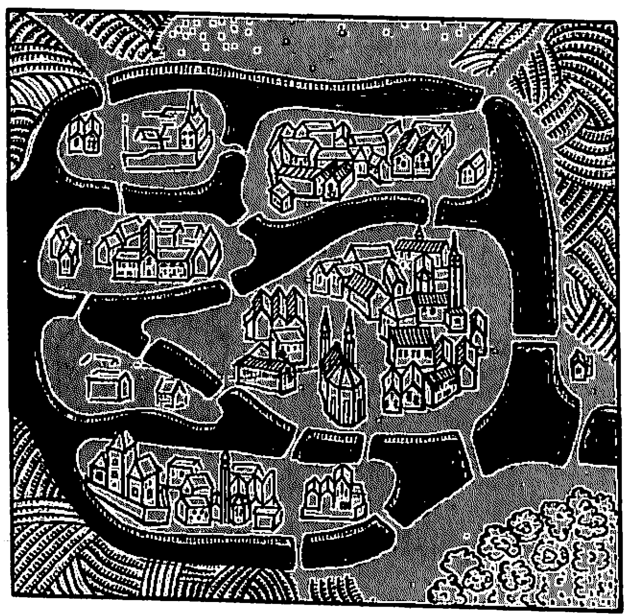






Таблиця 8





бо, як зазначав Ф. Енгельс: «Ньютон своїм законом тяжіння створив наукову астрономію, розкладанням світла — наукову оптику, теоремою про біном і теорією нескінченних — наукову математику і пізнанням природи сил — наукову механіку». (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. І, с. 560).

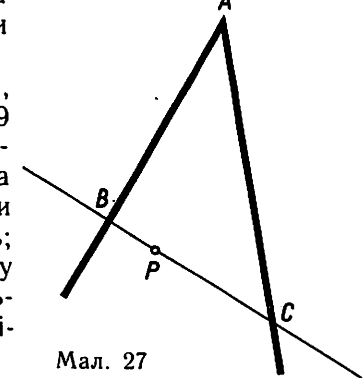
Задачі

1. Три луки, покриті травою однакової густини, яка проростає з однаковою швидкістю, мають площу 3 га, 10 і 24. Бики пасуться на луках і поїдають траву, яка підростає за час випасу. На першій луці 12 биків могли б пастися 4 тижні, на другій — 24 бики протягом 9 тижнів. Скільки биків можна пустити на третю луку, щоб вони могли випасти всю траву за 18 тижнів?

2. Через дану точку P провести (BC) так, щоб $[PB]$ і $[PC]$, які відтинаються (AB) і (AC), були в даному відношенні, тобто $|BP|:|PC|=m:n$, де $m\in R$ і $n\in R$ (мал. 27).

3. Якщо в чотирикутник можна вписати коло, то центр цього кола лежить на прямій, яка сполучає середини діагоналей чотирикутника.

4. Два листоноші A і B, яких розділяє відстань у 59 миль, виїжджають уранці назустріч один одному. Листоноша A проїжджає за 2 години 7 миль, B — за 3 години 8 миль; при цьому B вирушає в дорогу на годину пізніше, ніж A. Скільки миль проїде A, поки зустрінеться з B?



Мал. 27

ГОТФРІД ВІЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНІЦ

(1646—1716)

Коли б я був менше завантажений справами, я, можливо, дав би загальний метод викладу ідей, у якому всі істини розуму було б зведено до деякого математичного виразу. Це було б одночасно і деякою мовою, бо і буквені позначення і самі слова тут були б керівництвом для роздуму, а помилки були б не чим іншим, як помилками в математичних розрахунках.

Г. ЛЕЙБНІЦ

В історії науки було небагато людей, які працювали б у таких численних, різних областях духовного і практичного життя, як Лейбніц. Майже всі галузі природознавства і гуманітарних наук, техніка і політика були в сфері його активного наукового пошуку, математичні ж відкриття започаткували нову епоху історії цієї галузі теоретичного знання.

Лейбніц народився в Лейпцігу. Усе життя залишався підданим мікроскопічного герцогства.

Деякі історики науки вважають, що далекі предки вченого були слов'янами і прізвище Лейбніц — це онімечене прізвище Лубенець.

Батько Лейбніца, професор етики і юрисконсульт Лейпцігського університету, помер, коли хлопчику йшов сьомий рік. Ще до школи Готфрід безсистемно читав у великій домашній бібліотеці все, що потрапляло до рук. Не зупиняло навіть те, що багато книжок було написано невідомою йому латинською мовою. Читаючи підписи під малюнками і зіставляючи тексти із змістом малюнків, хлопчик сам оволодів латинською мовою, вільно розмовляв і писав

латинські вірші. Скоро він легко оволодів і давньогрецькою мовою.

У випускному класі школи на тринадцятирічного Лейбніца величезне емоційне враження справила логіка. Його вразило те, що нескінченну різноманітність висловлень можна охопити і класифікувати за допомогою невеликої кількості логічних форм. У нього формується думка, що логіка може охопити всі галузі людського знання, дати правила мислення, стати незамінним засобом пізнання істини.

Після закінчення школи Лейбніц стає студентом Лейпцігського університету, де вивчає філософію, юриспруденцію і елементарні розділи математики. Він ознайомлюється з філософією Декарта і, щоб досконало оволодіти нею, починає вивчати математику. Оскільки в Лейпцігському університеті не було відомих математиків, Лейбніц навчається в Іенському університеті, де слухає лекції професора Вейгеля.

Повернувшись до Лейпціга, Лейбніц готується стати юристом. Здобуває степінь магістра філософії, бакалавра прав, а в 1666 р. у містечку Альтдорф блискуче захищає дисертацію на ступінь доктора права. Його запрошують на посаду професора, але він відхиляє цю почесну пропозицію і виїздить до Нюрнберга.

У 1666 р. Лейбніц публікує трактат «Міркування про комбінаторне мистецтво», в якому вперше викладає контури свого грандіозного плану — створення «загальної характеристики», «алфавіту людських думок», універсальної логічної мови. У ній системою точно встановлених знаків позначаються поняття й елементарні висловлювання, складені логічні міркування — формулами, а ланцюги висловлювань — рівняннями. Таким чином формалізуються будь-які міркування. З них за допомогою строго визначених правил (операцій) над введеними символами і міркувань можна діставати нові правильні висловлювання. Отже, можна проаналізувати і вивести нові залежності, нові закони в будь-якій дедуктивній теорії. Загальна характеристика мала стати всеохоплюючою алгеброю, застосованою до різних родів пізнання. Звідси знаменитий афоризм: «Не сперечатимемося, а обчислимо істину». Це була ідея математизації всієї науки і логізації математики, в якій втілювалися перші кібернетичні мрії. Вони дуже випереджували час і не були по-справжньому оцінені сучасниками, але стали визначальними в усій багатогранній діяльності вченого і значною мірою сприяли успіху в його наукових пошуках.

Але скоро життя Лейбніца робить крутий поворот. Він стає юристом і радником курфюста Майницького і через деякий час за його дорученням виїздить до Парижа. Там він знайомиться з вченими, в тому числі зі знаменитим Хрістіаном Гюйгенсом. Щоб зрозуміти подаровану Гюйгенсом книгу «Маятникові годинники», Лейбніц, як він сам писав, «поринув» у праці Декарта, Ферма, Валліса, Паскаля.

Основними для математиків XVII ст. стали два типи задач: обчислення площ, об'ємів і центрів ваги фігур, а також проведення дотичної до кривої лінії. Розв'язуванням їх займалися вже вчені Стародавньої Греції, але саме в XVII ст. видатні математики — Кеплер, Кавальєрі, Ферма, Паскаль, Ісаак Барроу — здобули нові визначні результати, з яких викристалізовувалося невідоме раніше числення. Так, кілька математиків незалежно один від одного здобули результат, який у сучасних символах записується у вигляді $\int\limits_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

У процесі розв'язування задач на проведення дотичних і обчислення екстремумів вимальовувалося фундаментальне значення для таких задач виразу $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Нарешті, вчені встановили і взаємну залежність задач на обчислення квадратур і відшукання дотичної, проведеної через дану точку кривої. Можна сказати, що нове числення вже носилося в повітрі, хоча ще багато чого не вистачало для нього. Не було сформовано спеціальних понять, символіки. А саме на їх основі можна було об'єднати всі здобуті результати і створити єдиний метод, який охоплював би всі задачі, що входили в цю нову галузь математики. Цей вирішальний крок — підсумок внеску всіх названих учених у формування нової надзвичайно важливої галузі математики — зробили два генії — Ньютон і Лейбніц.

За окремими способами розв'язування задач на обчислення площ, об'ємів, центра ваги фігур і екстремумів функцій, задач на проведення дотичної до кривої в заданій точці, за ідеями, які висували при цьому Кеплер, Декарт, Ферма, Паскаль, Гюйгенс та інші вчені, Лейбніц побачив грандіозні контури нової математичної теорії. Його результати були такими значними, що в 1673 р. він вирішує «з перших рук» ознайомитися з роботами англійських математиків і на два місяці виїздить у Лондон. Там він з успіхом доповів про ідею своєї лічильної машини, яка могла виконувати чотири арифметичні операції, підносити до квадрата і добувати квадратні корені. Проект дістав позитивну оцінку англійських учених, і незабаром після від'їзду з Лондона Лейбніца було обрано членом Лондонського королівського товариства. Це була перша академічна відзнака у його житті. У Лондоні він зав'язав нові знайомства, і хоча з Ньютоном не зустрічався, міг чути про

Ньютонів варіант числення нескінченно малих — метод флюксій. Повернувшись у Париж, Лейбніц інтенсивно працює над математичними дослідженнями і десь в жовтні — листопаді 1675 р. завершує створення нової теорії. «Чудесно бачити, що входиш у новий рід числення, який далекий від Вієтового, як небо від землі»,— захоплено пише Лейбніц, ввівши поняття нескінченної суми нескінченно малих доданків.

Пізніше вчений згадував, що при першому своєму візиті в Лондон він ще мало розбирався в математиці, а через два роки відкрив диференціальне числення. Це межує з чудом, яке все ж має своє пояснення. Усе життя Лейбніц відзначався невгамовним прагненням до нових знань, невтомною допитливістю. Сучасників вражала його фантастична ерудиція і працелюбність. Він міг працювати кілька діб, не перериваючи роботи навіть у дорозі. Був глибоко переконаний, що пізнання не має меж і не знає перешкод перед силою логіки і розумом, який здатний реконструювати світ. Лейбніц переосмислював все, що опановував; бачив нові теорії і факти по-своєму, відповідно до своїх принципів пізнання істини: не заради її самої, а завжди з виходом у практику.

«Мета науки,— писав він,— добробут людства, тобто примноження всього, що корисне людям, але не заради того, щоб потім віддатися неробству, а для підтримання доброчинності і розширення знань».

Лейбніц ширше, ніж його сучасники, трактував завдання математики. Він вважав, що «універсальна математика — це, так би мовити, логіка уяви», вона має вивчати «все, що в галузі уяви піддається точному означенню». В головній своїй частині так розглядувана математика мала бути наукою про абстрактні відношення між математичними об'єктами. Лейбніц ставив задачу і про введення операцій над висловленнями. Це було завбачення ідей математичної логіки, які набагато випереджували епоху і були реалізовані тільки в XIX ст. англійським математиком Дж. Булем (1815—1864).

Математичні відкриття Лейбніца теж були лише частиною його грандіозного задуму пізнання світу. Він був переконаний в тому, що існує єдиний, загальний метод пізнання світу. Прообразом цього методу Лейбніц вважав математичний метод. Останній — не універсальний, але на його основі можна побудувати такий алгоритм (термін Лейбніца), який дасть змогу оперувати поняттями так, як математика оперує величинами.

Перші наукові журнали в Європі почали виходити в 1665 р. у Парижі і Лондоні. Тому обмін інформацією про нові відкриття, розв'язані і нерозв'язані задачі відбувався у формі листування. Листи, якими обмінювалися вчені, виконували роль наукової періодики. Епістолярну спадщину Лейбніца становлять 13 500 листів до 1200 адресатів.

Жваве листування налагоджує Лейбніц і з англійськими вченими. Він розповів їм про свої математичні відкриття. З Лондона повідомили, що Ньютон відкрив новий математичний метод. На початок 1676 р. і Ньютон і Лейбніц розуміли, принаймні здогадувалися, що різними шляхами вони підійшли до однієї мети. Напередодні другої поїздки в Лондон у 1676 р. Лейбніц одержує від президента Лондонського королівського товариства лист, написаний самим Ньютоном. Шанобливим, але холодним тоном Ньютон розповів про свою знамениту формулу бінома і жодного слова не сказав про метод флюксій. Лейбніц відповів через три дні і оголосив про відкриття методу нескінченно малих, але так, що суть його міг розібрати лише той, хто сам займався цим методом. Восени 1676 р. Лейбніц знову в Лондоні, але й цього разу з Ньютоном не зустрівся. Він навіть не знав, що Ньютон йому відповів. Лист знайшов адресата в червні 1677 р. у Ганновері, де той був на місці своєї нової служби. Відповідь Ньютона — яскравий документ атмосфери недовір'я, підозри, ревнощів, які визрівали навколо відкриття нового числення. Ньютон зашифрував суть свого методу набором літер і цифр, що дуже образило Лейбніца. Він у загальних фразах виклав англійцеві основну ідею свого диференціального числення. Ньютон не відповів на два листи Лейбніца.

Нарешті, у травні 1684 р. у лейпцігському журналі «Праця вчених» Лейбніц друкує статтю «Новий метод максимумів і мінімумів...». На шести сторінках у надзвичайно стислій формі було викладено основні поняття, правила диференціювання суми, різниці, добутку, степеня, частки і довільного степеня, відшукання екстремумів, точок перегину та інші правила. Це був конспект всього диференціального числення. Останній термін теж належить Лейбніцу. Стаття була надзвичайно складна. Йоганн І Бернуллі назвав її «скоріше загадкою, ніж поясненням». Її не завжди могли подолати навіть знаючі математики. Проте знайшлися такі, які подолали, серед них були згадувані вже брати Йоганн І і Якоб І Бернуллі, щоправда, на роздуми пішло більше року.

Через два роки після «Нового методу...» в тому самому лейпцігському журналі Лейбніц друкує мемуар «Про глибоку геометрію і аналіз неподільних, а також нескінченних» — першу друковану працю з інтегрального числення. Тут вперше з'являється знак $\int$ і запис $\int ydx$. Знак $\int$ нагадує подовжену букву S (перша в латинському слові Summa — сума). Термін «інтеграл» (від лат. integer — цілий,

тобто ціла, вся площа) запропонував у 1690 р. Йоганн І Бернуллі. Лейбніц прийняв його неохоче, сам він користувався виразом «сума всіх ydx».

Для Лейбніца та його послідовників у новому численні залишалося ще багато незрозумілого, загадкового. Але вирішальний крок було зроблено. Відповідно до потреб часу на зміну математиці сталих величин приходила математика, об'єктом дослідження якої стали рухи. Основні проблеми природознавства, фізики, механіки, астрономії і техніки привели до формування двох операцій — диференціювання й інтегрування і відповідно поняття похідної та інтеграла.

Похідною від даної функції $f(x)$ у даній точці $x=x_0$ називається скінченна границя: $f'(x_0) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Похідна характеризує швидкість, прискорення, щільність, тангенс кута нахилу дотичної і безліч інших величин.

Інтеграл — це границя суми нескінченно зростаючої кількості нескінченно малих доданків:

$$\int_0^b ydx = \lim_{n \to \infty} (y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \dots + y_n \Delta x_n) =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_i f(\varepsilon_i).$$

Інтеграл характеризує довжину дуги, масу, площу, об'єм і т. д.

Здається, що в поняттях похідної і інтеграла з погляду математики немає нічого нового. Розглянемо, наприклад, обчислення інтеграла. Насамперед обчислюємо значення даної функції y_1,

$y_2, \ldots, y_n$ при певних значеннях аргументу ($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Потім перемножуємо обчислені значення функції та відповідні прирости аргументу

$$y_1 \Delta x_1,\ y_2 \Delta x_2, \cdots,\ y_n \Delta x_n$$

і підсумовуємо ці добутки:

$$y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \cdots + y_n \Delta x_n. \qquad (1)$$

Після цього обчислюємо границю суми (1) за умови, $n \to \infty$ і $\Delta x_i \to 0$. Кожну з виконуваних до цього операцій вже здійснювали, взяті ж всі разом, вони породжують якісно новий математичний об'єкт — визначений інтеграл. Обчислення визначених інтегралів доводиться виконувати скрізь, де мають справу із змінними величинами, тому всі разом операції розглядаються як єдина нова операція — інтегрування.

Створення Лейбніцом і Ньютоном аналізу нескінченно малих відкрило нову епоху розвитку математики і всього математичного природознавства. Ф. Енгельс писав про цю перемогу людської думки: «З усіх успіхів знання навряд чи який-небудь вважається таким високим тріумфом людського духу, як винайдення числення безконечно малих у другій половині XVII століття», бо «лише диференціальне числення дає природознавству можливість зображати математично не тільки *стани*, а й *процеси*: рух» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 20, с. 530). Справді, відкриття похідних збудило нерухомий світ рівнянь від тисячорічного сну. Математика підпорядкувала собі змінні величини. Виникли методи розв'язування задач про рухи тіл під дією певних сил. Такі задачі приводили вже до диференціальних рівнянь, які містили шукані функції та їх похідні, розв'язками їх були не значення шуканих величин, а функціональні залежності між ними.

Сьогодні царство диференціальних рівнянь майже безмежне, вони керують скрізь, де здійснюються кількісні дослідження явищ природи, і підтверджують єдність її, про що писав В. І. Ленін: «Єдність природи виявляється в «разючій аналогічності» диференціальних рівнянь, які стосуються різних сфер явищ» (Ленін В. І. Повне зібр. тв., т. 18, с. 283). (Класичні задачі диференціального числення подано на табл. 7).

Усе це було потім, а між тим на службі у ганноверського правителя Лейбніц розгортає надзвичайно бурхливу діяльність. Користуючись становищем придворного вченого і мистецтвом дипломата, робить усе від нього залежне, щоб наука служила людству, прагне зацікавити монархів ідеями створення академій і організовує їх в Берліні і Відні. Вчений з самого початку взяв близько до серця справу перетворення Росії. П'ять разів зустрічається він з Петром I і офіційно зараховується на російську службу. З власної ініціативи вчений багато разів систематично і наполегливо звертається до Петра I і його міністрів з різними програмами, проектами, записками. Учений розглядав Росію як країну великого всесвітньо-історичного значення і робив все, щоб сприяти розвитку російської науки і культури. Лейбніц накреслює перші заходи, які необхідно здійснити для заснування майбутньої Петербурзької Академії наук, пропонує сполучити каналом Волгу і Дон, заснувати в Петербурзі, Москві, Києві і Астрахані університети, багато уваги приділяє зміцненню могутності російських збройних сил оснащенням їх новітньою технікою. Професор В. І. Чучмарьов закінчує свою книжку «Лейбніц і російська культура» такими словами: «Він був ревним поборником добросусідських відносин Німеччини і Росії... невтомно закликав до зміцнення технічного, наукового і культурного співробітництва, яке збагачувало обидві країни. Образ Лейбніца — відданого друга передової Росії, великого вченого, славного просвітителя і гуманіста — залишиться назавжди живим і хвилюючим у вдячній пам'яті народів Радянського Союзу».

Лейбніц мріяв про загальний мир. Був охоплений думкою про те, щоб сконцентрувати всі сили європейської науки, бо вважав головними рушіями прогресу не «сильних світу», а творців науки.

Учений шукав «освічених монархів», які могли б стати виконавцями його планів. Трагедія в тому, що його плани не могли бути реалізовані. На початок 700-х років слава Лейбніца вже досягла всеєвропейського масштабу. Зустрітися і говорити з ним вважали за честь учені і королі, а він був лише найманцем при дворі третьорозрядного феодального князька. І чим більше росла його слава, тим з більшою підозрою і недоброзичливістю стежили за ним з Лондона. Визрівав конфлікт за пріоритет відкриття нового числення. На Британських островах чекали тільки приводу, щоб нанести удар. І ось у 1710 р., коли один новоспечений член Лондонського королівського товариства в друкованому органі товариства звинуватив Лейбніца в тому, що той списав свій метод з методу флюксій Ньютона, учений намагався захистити свою честь, але не знайшов підтримки ні в Лондоні, ні в Ганновері. Йому судилося пережити велику несправедливість долі. Лейбніцу дорікали, що він відволікається од виконання службових обов'язків частими поїздками, листуванням, писанням наукових праць. Останні роки вчений із світовим ім'ям провів самітником, жив на російську заробітну плату. У травні 1716 р. він почув останній вирок від самого Ньютона.

У надрукованій французькою мовою замітці Ньютон писав: «Я не заперечую, що пан Лейбніц міг відкрити його (диференціальне й інтегральне числення.— *А. К.*) сам. Але це було вже після мене».

Через п'ять місяців Лейбніца не стало. Смерть наступила через годину після того, як вчений прийняв запропоновані знайомим ієзуїтом «домашні ліки». Тіло покійника лежало в підвалі церкви і тільки 14.XII 1716 р. про нього згадали, щоб поховати.

У останню путь Лейбніца, автора близько 75 000 окремих праць, супроводжував лише секретар. Його опустили в загальну яму, в якій ховали бездомних жебраків.

Науковий подвиг Лейбніца викликає подив і захоплення. Його творчість — унікальне і неповторне явище в історії науки. Ним захоплювався Карл Маркс, який у листі до Ф. Енгельса писав: «Ти знаєш, як я захоплююся Лейбніцом» (Маркс К., Енгельс Ф. Твори, т. 32, с. 396).

Виразно охарактеризував Лейбніца як людину А. І. Герцен. Він писав: «...Лейбніц — людина, яка майже зовсім очистилася від середніх віків, усе знає, все любить, всім співчуває, на все розкритий, з усіма знайомий в Європі, з усіма переписується... читаючи його, відчуваєте, що наступає *день* зі своїми справжніми турботами, коли забудуться марення і сновидіння; відчуваєте, що досить дивитися в телескоп,— пора взяти збільшувальне скло; досить тлумачити про одну субстанцію, час поговорити про багаточисельну множину монад» (А. И. Герцен об атеизме, религии и церкви. М., Мысль, 1976, с. 86). Цим він завжди залишиться близьким і зрозумілим поколінням вдячних нащадків.

Задачі

1. Довести, що $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6.$

3. Сума квадратів відстаней довільної точки P од вершин трикутника дорівнює сумі квадратів відстаней од вершин до центра ваги трикутника з потроєною відстанню од центра ваги до точки P.

3. Широко відома числова таблиця трикутника Паскаля і мало хто знає про трикутник Лейбніца, який також має багато цікавих властивостей.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \frac{1}{1} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \end{array}$$

а) Знайти зв'язок між відповідними числами трикутників Паскаля і Лейбніца і довести його.

б) Довести, що

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+\cdots$$

(Установіть для цього місця розміщення чисел у гармонічному трикутнику і запишіть суми для $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{5}$).

ЛЕОНАРД ЕЙЛЕР

(1707—1783)

Ейлер повів за собою наступні покоління і навчив їх думати й писати так, як думав і писав сам. Читання його праць — найлегша і найкорисніша справа.

М. В. ОСТРОГРАДСЬКИЙ

Маленька гірська Швейцарія дала світу багато відомих учених. Достатньо назвати прославлену династію математиків і механіків Бернуллі. Поблизу швейцарського міста Базеля в селі Ріхен народився і Леонард Ейлер — видатний математик XVIII століття. Його батько, сільський пастор, вивчав математику в Якоба Бернуллі, захистив дисертацію з математики. Синові він сам дав початкову математичну освіту, проте хотів, щоб той успадкував його професію. У Базельському університеті, куди Ейлер вступив у 1720 р. у молодший філософський клас, він вивчав схоластичні премудрості, а потай від батька слухав лекції з математики. На його математичну обдарованість звернув увагу професор математики Йоганн I Бернуллі. Він почав проводити з талановитим студентом додаткові заняття, радив вивчати твори видатних математиків, познайомив його зі своїми синами Миколою і Даниїлом, які також захоплювалися математикою.

Восени 1723 р. батьки змусили-таки Леонарда піти на богословський факультет, а в червні наступного року за змістовну промову «Порівняння філософських поглядів Ньютона і Декарта», виголошену латинською мовою, Леонард здобуває вчений ступінь магістра мистецтв.

У Швейцарії не знайшли роботи після закінчення університету ні брати Бернуллі, ні Ейлер. Микола і Даниїл виїхали до Росії. 29 січня 1724 р. Петро I заснував Петербурзьку Академію наук, до якої на роботу запросив учених. З приводу від'їзду своїх синів у Росію Йоганн I Бернуллі писав: «Краще трохи потерпіти від суворого клімату країни льодів, в якій вітають муз, ніж вмерти з голоду в країні з помірним кліматом, де муз кривдять і зневажають».

Ейлер загорівся також бажанням поїхати за Бернуллі в далеку країну. Пізніше, в автобіографії він згадував: «У мене виникло невимовне бажання відправитися разом з ними в 1725 р. до Петербурга. Справа, проте, не могла скоро здійснитися, а тим часом молоді Бернуллі обіцяли мені, після прибуття до Петербурга, виклопотати пристойне для мене місце». Незабаром Бернуллі й справді сповістили, що в Петербурзькій Академії передбачається вакансія на кафедрі фізіології. Готуючись до майбутньої діяльності, Ейлер почав вивчати медицину, сподіваючись, що в ній також вдасться застосувати математику. Тим часом у Базельському університеті він успішно захистив дисертацію на тему «Про природу утворення і поширення звуку», надрукував її і готував на конкурс Паризької академії працю про краще розміщення щогл на кораблі. У Швейцарії Ейлер бачив морські кораблі хіба що на малюнках. Математика допомогла молодому вченому так глибоко розробити цю важливу для навігації тему, що його працю було схвалено і надруковано в збірнику конкурсних праць.

Нарешті прийшов довгожданий виклик з Росії. 5 квітня 1727 р. Ейлер назавжди залишає Швейцарію. Важкою була дорога в північну столицю, нелегкі й умови роботи в новоствореному науковому закладі. Уже в дорозі Леонард довідався про передчасну смерть Миколи Бернуллі, а в день його приїзду померла покровителька Академії цариця Катерина I. Знать дивилася на Академію з підозрою. Ученим доручали не тільки складати географічні карти, а й писати оди на честь перемог чи з нагоди народження членів царської сім'ї, вони повинні були розробляти проекти розваг царського двору, навіть складати гороскопи.

Дехто з учених не витримував складних умов роботи і залишав Росію. Начальник російського флоту адмірал Сіверс, дбаючи про те, щоб Ейлер не виїхав з Росії, запросив його в своє відомство. Він виклопотав для Ейлера навіть чин лейтенанта флоту і обіцяв сприяти швидкому просуванню по службі. Учений знайшов тут те, чого не могла дати йому батьківщина,— можливість повністю віддатися улюбленій справі — математиці. Це була його стихія. Незабаром після приїзду Ейлер подав на розгляд конференції 13 доповідей. Він відразу активно включився в усі види наукових і навчальних робіт, які проводила Академія, і де можна було застосувати математику. Багато сил учений віддав картографічній справі. У 1740 р. його призначили директором географічного департаменту. Він займається розв'язуванням складних задач кораблебудування і навігації, створює навчальні посібники, читає лекції, організовує і проводить екзамени в гімназії і військових навчальних закладах, популяризує наукові знання, пише рецензії на твори, які надходили в Академію.

Учений був членом багатьох експертних комісій, що розглядали найрізноманітніші технічні проекти. Наприклад, проект одноаркового мосту через Неву геніального винахідника І. П. Кулібіна. Ейлер був єдиним академіком, який прихильно ставився до сміливого задуму винахідника, і допоміг йому в обчисленнях. Одночасно йому доводилося займатися й такими питаннями, як проекти конструкцій пожежної помпи і навіть лісопильної машини.

Росія стала другою батьківщиною Ейлера. У 1730 р. він займає академічну кафедру фізики, а з 1733 — після від'їзду з Петербурга Даниїла Бернуллі його призначають на звільнене місце академіком кафедри математики.

Працював Ейлер захоплено, самовіддано. У 1738 р. Петербурзька Академія дістала від уряду термінове завдання: протягом кількох місяців виконати великі астрономічні обчислення, необхідні для застосування в картографії. Ейлер взявся виконати потрібні обчислення за три дні і на превелике диво вклався в цей термін. Але від перенапруження вчений захворів нервовою лихоманкою і втратив праве око. Ейлер стійко переніс лихо, зауваживши, що ,тепер у нього буде вдвічі менше причин відволікатися од математики.

Лише одного разу Ейлер відмовився виконати запропоновану роботу — скласти гороскоп царевичу Івану, який згодом на короткий час став імператором Іваном IV, а потім довгорічним в'язнем Шліссельбурзької фортеці.

За часів біронівщини працювати ставало все важче. Двірцеві інтриги давалися взнаки і в Академії. Образи, взаємні наклепи, самодурство і грубість начальства відволікали од наукової роботи. Такі обставини змусили Ейлера прийняти нелегке рішення. Після 14-річного життя в Росії, влітку 1741 р. він від'їжджає в Берлін. Однак з Петербурзькою Академією вчений не пориває зв'язків. Майже половину своїх наукових праць друкує у виданнях Петербурзької Академії. Його продуктивність на цей час була такою, що обидві академії (Петербурзька і Берлінська) не встигали випускати в світ його мемуари і монографії. Проживаючи в Берліні, Ейлер керував науковою роботою молодих російських учених, купував для Петербурзької Академії літературу, наукові прилади, рецензував праці російських учених. Особливо високо він оцінив праці М. В. Ломоносова, хоча секретар Академії Шумахер сподівався, що Ейлер дасть негативний відгук на твори Ломоносова, і це допоможе йому усунути російського вченого від наукової діяльності. Взагалі, слід підкреслити, що Ейлер з великою увагою ставився до виховання національних кадрів російської науки.

Російські вчені клопотали про повернення Ейлера до Петербурга. Але тільки через 25 років у липні 1766 р. учений із сім'єю повертається знову в Росію — і цього разу назавжди. Тут, у Петербурзі, на повну силу розкрився його талант, тут він склав величезний план наукових праць, здійснення якого стало справою всього його життя, тут до нього прийшла світова слава.

Восени його спіткало нове лихо — він втратив зір на друге око. Та це не зменшило дивовижної творчої напруженості вченого. Він диктував праці своїм секретарям, і його мозок з дивовижною продуктивністю генерував нові плідні ідеї, відкривав нові, ще нерозкриті таємниці математики. Феноменальна пам'ять його зберігала величезну кількість фактів, а обчислював він з легкістю, яка й сьогодні викликає подив.

Якось два учні Ейлера обчислювали на папері суму 17 членів складного ряду, при цьому в 15-й цифрі в них виявилася розбіжність на одиницю. Щоб розв'язати суперечку, вони звернулися за порадою до вчителя. Той пробив всі обчислення усно і назвав правильну відповідь.

Найдивовижнішим у діяльності Ейлера було те, що він зовсім не замикався в математиці. Учений чудово знав кращих письменників стародавнього світу, стародавню літературу з математики, історію всіх часів і народів, мови стародавні та східні, Західної Європи (серед них і російську), ботаніку, хімію, фізику, анатомію і медицину. Своїми знаннями вражав спеціалістів із цих галузей знань. Він міг, наприклад, прочитати напам'ять всю «Енеїду» і навіть назвати перші й останні рядки поеми на кожній сторінці того видання, яким користувався. Учений з насолодою слухав музику і написав трактат з математичної теорії музики.

Особисте життя Ейлера було тяжким. У нього померла дружина і він одружився вдруге. З тринадцяти дітей вісім померло в ранньому дитинстві. У 1771 р. під час пожежі згорів його будинок і майже все майно. Ледве встигли вивести з палаючого будинку сліпого вченого і врятувати велику кількість рукописів. Держава компенсувала матеріальні збитки, і вчений продовжував свою різнобічну діяльність. Йому оперували око і частково повернули зір. Щоб не трапилося ускладнень, лікарі заборонили працювати. Зрозуміло, що цього Ейлер виконати не міг. Тому, поновивши сили, продовжував працювати. Його енергія не вичерпувалась і в 70 і 75 років.

Якось увечері, після спокійно проведеного дня, Ейлер грався з онуком. Але раптом йому стало погано. Вигукнувши «я вмираю», він втратив свідомість. Через кілька хвилин Ейлер «перестав обчислювати і жити». Учений помер від крововиливу в мозок.

Можна упорядкувати цілу книжку із цитат і висловлювань видатних учених різних країн про унікальну геніальність Ейлера, його дивовижну працездатність і різнобічність таланту.

Видатний французький астроном і математик П.-С. Лаплас часто говорив своїм учням: «Читайте Ейлера, він наш спільний учитель». Німецький математик К.-Ф. Гаусс писав: «Вивчення праць Ейлера вважається кращою школою в різних галузях математики, і ніщо не може цього замінити».

Директор Петербурзької Академії наук Орлов якось звернувся до Ейлера з незвичним проханням: написати таку кількість праць, щоб їх вистачило для друку в наукових записках Академії протягом 20 років після смерті вченого. Ейлер пообіцяв виконати це завдання. За 7 років він написав 70 мемуарів, а всього залишив після себе готовими до друку понад 250 наукових праць, які друкувалися в академічних виданнях не 20, а 80 років (до 1862 р.).

Нащадків ще більше, ніж його сучасників, вражали масштаби доробку вченого. Понад 886 наукових праць, серед яких більш як 20 великих 2-, 3-томних монографій. В епістолярній спадщині налічується близько 3 000 листів, більшість з яких є невеликими закінченими науковими повідомленнями. З нагоди 200-річчя з дня народження вченого в Швейцарії розпочато видання повного зібрання його творів. Воно має складатись із 72 великих томів по 600 сторінок кожний. Уже побачили світ 62 томи. Але за цей час знайдено багато нових праць вченого. Отже, видання буде значно об'ємнішим, бо наукова спадщина Ейлера ще далеко не вичерпана. У ній понад $\frac{3}{5}$ праць стосуються математики і $\frac{2}{5}$ — прикладних питань. Із 30 томів математичної серії 19 присвячено математичному аналізу, 4,5 — теорії чисел, 4 — геометрії, 2,5 — алгебрі, 1 — комбінаториці й теорії ймовірностей.

Про величезну і постійну працездатність Ейлера свідчать не тільки опубліковані ним праці, а й розв'язані задачі, які пропонувались Паризькою академією наук. За успішне розв'язання їх він одержував премії з 1738 по 1772 рік, всього 12 раз, у 1752 р. — одержав подвійну премію. Ейлер був членом багатьох іноземних академій і наукових товариств. Паризька академія наук, статутом якої передбачено штат тільки із 40 академіків, враховуючи виключні заслуги Ейлера перед наукою, обрала його в травні 1755 р. «понад штат» своїм іноземним членом.

Вітчизняні вчені М. В. Остроградський, В. Я. Буняковський, П. Л. Чебишов та інші математики і фізики доклали багато зусиль, щоб зробити праці Ейлера доступними математичній громадськості.

Ейлер розвинув кілька нових математичних дисциплін, які до нього перебували лише в зародковій формі: теорію звичайних диференціальних рівнянь і в частинних похідних, варіаційне числення, елементарну теорію функцій комплексної змінної; поклав початок теорії підсумовування рядів, розкладанню функцій у тригонометричні ряди, теорії спеціальних функцій і визначених інтегралів, диференціальній геометрії поверхонь.

Видатний радянський математик, академік М. М. Лузін писав про Ейлера: «Найбільш громіздка формула гнулася в його сильних руках, як віск, і слухняно давала під його зусиллями все, що вгадувала в ній його проникливість ...Можна без перебільшення сказати, що перед очима Ейлера математичні формули жили своїм власним

життям і розповідали надзвичайно важливі речі про явища природи і що йому досить було лише торкнутися формул, щоб вони, раніше німі, починали говорити і давати відповіді, сповнені глибокого змісту».

Справді, його знамениті формули

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z, \qquad (1)$$

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z \qquad (2)$$

не тільки пов'язали показникову функцію з тригонометричними функціями і комплексними числами, а й стали вихідним пунктом для дослідження природи числа π.

З формул (1) і (2) легко дістати

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

З формули (1), поклавши, що $z=\pi$, Ейлер дістав несподівану й дивовижну, одну з найкоротших формул всієї математики:

$$e^{i\pi}=-1.$$

Праці Ейлера на століття визначили розвиток теорії чисел. Він знайшов доведення всіх теорем Ферма, довів неправильність однієї з них, довів для $n=3$ і $n=4$ знамениту велику теорему Ферма, ввів важливу так звану функцію Ейлера $\varphi(m)$, значення якої дорівнюють числу цілих чисел, менших від m і взаємно простих з m.

У листах Ейлера до члена Петербурзької Академії Гольдбаха, його товариша, містяться дві знамениті «задачі Гольдбаха»: довести, що всяке непарне натуральне число, більше за 5, є сумою трьох простих чисел, а всяке парне, більше від 2, є сумою двох простих чисел. Першу задачу розв'язав уже в наш час І. М. Виноградов, другу — не доведено досі.

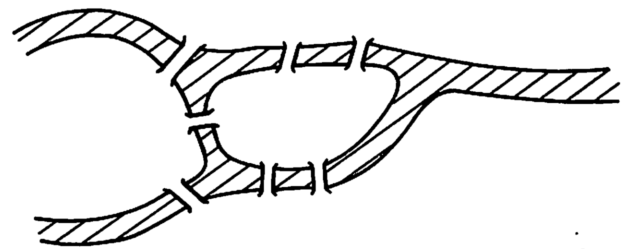
Ейлер довів першу важливу теорему топології про те, що в усякому опуклому многограннику кількість вершин b, кількість ребер p і кількість граней r завжди пов'язані співвідношенням $b-p+r=2$. Топологічний характер має і його відома задача про сім мостів.

У зв'язку з розвитком картографії вчений розробив теорію кривизни поверхонь, теорію розгортуваних поверхонь і конформних перетворень.

Ейлеру належать чудові і надзвичайно сучасні слова: «Немає науки, яка б не була пов'язана з математикою, науки, яка, якщо вона має бути грунтовно розробленою, не вимагала б застосування вищої математики». Кращим підтвердженням цих слів є сама творчість Ейлера. Фізика, механіка, астрономія, оптика, гідротехніка, картографія, теорія механізмів і машин, аеронавтика, балістика, архітектура, фізіологія і теорія музики — ось далеко неповний перелік галузей знань, у яких працював Ейлер.

Світову славу приніс Ейлерові двотомний трактат «Механіка, або наука про рух, викладена аналітично». Теорії руху планет учений присвятив тритомний трактат. Величезний успіх у багатьох країнах мала праця «Повна теорія конструювання та маневрування суден, зроблена доступно для тих, хто займається навігацією». У 1750 р. Ейлер дав математичний аналіз процесу роботи реактивної турбіни, вивівши турбінне рівняння. Праці Ейлера майже на 150 років випередили епоху. Тільки в 1943 р. було зроблено модель турбіни безпосередньо за описом Ейлера. Саме розв'язування практичних задач було кращим способом перевірки дієвості різних математичних методів. Ці задачі були стимулом для розробки нових, універсальних методів математики.

У навчальних посібниках і наукових працях вченого є багато задач з елементарної математики, доступних учням середньої школи. Деякі з них поклали початок новим розділам математики, наприклад: теорії графів, топології та іншим. Багато математичних понять елементарної математики названо ім'ям геніального вченого. Пропонуємо читачам кілька задач, взятих з праць Леонарда Ейлера або пов'язаних з його ім'ям. Розв'язування їх буде продуктивним способом ознайомлення з творчістю цього вченого.



Мал. 28

Задачі

1. а) Точка M перетину медіан трикутника (центр його маси), центр O описаного навколо нього кола і точка H перетину висот (ортоцентр) лежать на одній прямій, що називається прямою Ейлера;

б) $|OM|:|MH|=1:2$.

Довести обидва твердження.

2. Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків висот між вершинами трикутника і ортоцентром лежать на колі, яке називається колом Ейлера. Довести, що центр кола Ейлера збігається із серединою відрізка, який з'єднує ортоцентр із центром описаного кола, а радіус кола Ейлера дорівнює половині радіуса описаного кола.

3. *Задача Ейлера про сім мостів.* На річці Прегаль, де стоїть місто Калінінград (колишній Кенігсберг), острів, правий берег, лівий і територія з'єднані сімома мостами (мал. 28). Чи можна пройти по всіх семи мостах, не ступивши на жодний з них двічі?

(Аналогічні задачі, пов'язані з так званими *унікурсальними* кривими, подано на табл. 8).

4. Нехай кількість людей збільшується щороку на 0,01. Через скільки років кількість людей збільшиться в 10 раз?

5. Обчислити похідну функції $y=e^x x^n$.

6. Довести тотожність:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

7. Довести формулу:

$$a^4+b^4=\left(a^2-2ab\cos\frac{\pi}{4}+b^2\right)\left(a^2+2ab\cos\frac{3\pi}{4}+b^2\right)$$

Бернуллі Якоб I (1654—1705) — один з родоначальників славнозвісної сім'ї Бернуллі, яка дала світу видатних фізиків і математиків. Понад 250 років у Базельському університеті були професорами Бернуллі. Батько готував Якоба до духовної кар'єри, але перемогла любов до фізико-математичних наук. Ознайомившись у 1687 р. із знаменитою статтею Лейбніца про нове числення, Якоб став прихильником і популяризатором нового числення. Застосував математичний аналіз до вивчення властивостей кривих ліній, квадратур і кубатур. Він — автор першої книжки з теорії рядів. У книжці «Мистецтво завбачень» довів окремий випадок закону великих чисел. Розв'язав знамениту задачу Лейбніца про криву рівних спусків (ізохрону). Стаття з розв'язанням задачі Лейбніца була першою друкованою працею, в якій всі дослідження від початку до кінця проводилися засобами нового аналізу.

Завдяки працям Якоба Бернуллі теорія ймовірностей набула великого значення в практичних застосуваннях. Разом з братом Йоганном I заклав основи важливої математичної дисципліни — варіаційного числення. Автор багатьох праць з арифметики, алгебри, геометрії, фізики.

Бернуллі Йоганн I (1667—1748) — брат Якоба, за порадою якого він зайнявся математикою. Батько готував Йоганна I до торгової практики, але вирішили все заняття математикою. Обидва брати виявили блискучі математичні здібності, оволоділи статтями Лейбніца і скоро почали збагачувати математичний аналіз новими відкриттями. У 1697 р. сформулював задачу про криву найшвидшого спуску (брахістохрону). Праці присвячені різним питанням математичного аналізу, зокрема теорії рядів, а також теорії ймовірностей, механіці, гідромеханіці.

Дружба і спільна робота братів скоро переросла в гостре, недостойне суперництво.

Брати Бернуллі надзвичайно багато зробили для швидкого поширення нового числення.

Клеро Алексіс Клод (1713—1765) — французький математик. Надзвичайно рано виявив математичну обдарованість, у 12 років доповідав у Академії про властивості винайдених ним кривих четвертого порядку $(x^2+y^2)^2=c$. За великі успіхи Паризька академія з дозволу короля порушила устав і обрала 18-річного Клеро академіком (за уставом в академіки обирали членів, яким було не менше як 20 років). Праці присвячені дослідженням властивостей спеціальних кривих, теорії диференціальних рівнянь. І до наших днів не втратила значення знаменита праця Клеро «Теорія фігури Землі».

ЕПІЛОГ ЕПОХИ

Три титани думки — Ньютон, Лейбніц і Ейлер, як три легендарні кити Землі, тримали на собі математику в одну з найгероїчніших, багатих фактами і драматичними колізіями епох історії математики. За життя одного покоління працею великих подвижників математика не просто збагатилася численними новими фактами, а піднялася на якісно новий рівень побудови своїх теорій, строгості розв'язання задач і доведення теорем.

Виникнення нового числення не щаслива випадковість, а закономірний етап розвитку науки, нерозривно пов'язаної із соціальними й економічними умовами відповідної епохи.

Епілог до розділу є водночас прологом до зрілості математики. За рамками розповідей залишилося майже три століття найбурхливішого і багатого на імена й здобуті результати шляху переможної ходи математики. Славу древньої і вічно молодої науки примножили нові колумби її таємниць — Ж. Л. Лагранж, О. Л. Коші, П. С. Лаплас, Н. Г. Абель, Е. Галуа, М. І. Лобачевський, М. В. Остроградський, П. Л. Чебишов, М. М. Лузін, О. Я. Хінчин, А. М. Колмогоров, В. М. Глушков і багато інших з славної шеренги невтомних трудівників неспокійного світу математики.

ВИКОРИСТАНА ТА РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Маркс К., Енгельс Ф. Твори.
Маркс К. Математические рукописи. М., Наука, 1968.
Ленін В. І. Повне зібрання творів.
Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. М., Просвещение, 1979.
Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. 2-е изд., испр. и доп. Минск, Вышэйшая школа, 1979.
Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. К., Радянська школа, 1979.
Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука (Математика древнего Египта, Вавилона и Греции). М., Физматгиз, 1959.
Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. 2-е изд., испр и доп. М., 1967.
Глейзер Г. И. История математики в школе. М., Просвещение, 1964.
Глейзер Г. И. История математики в средней школе. М., Просвещение, 1970.
Глухов А. Г. Книги, пронизывающие века. К., Радянська школа, 1979.
Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. М., Знание, 1981.
Депман И. Я. История арифметики. 2-е изд. М., Просвещение, 1965.
История математики с древнейших времен до начала нового времени. М., Наука, т. 1—3, 1970—1972.
История отечественной математики в 3-х томах, 4-х книгах. К., Наукова думка, 1970—1972.
Кольман Э. История математики в древности. М., Физматгиз, 1961.
Кымпан Ф. История числа π. М., Наука, 1971.
Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. М., Наука, 1976.
Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI—XVII вв. М., Наука, 1979.
Рыбников К. А. История математики. 2-е изд. М., Изд-во Московск. ун-та, 1974.
У истоков классической науки (Сборник статей). М., Наука, 1968.
Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. М., Наука, 1968.
Хрестоматия по истории математики. М., Просвещение, 1976, 1977, кн. 1, 2.
Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., Физматгиз, 1961.

ЗМІСТ

Конфорович А. Г.
К65
Колумби математики.— К.: Рад. школа, 1982.— 223 с.— Бібліогр.: с. 222.

В опр.: 50 к. 80 000 пр.

У книжці розповідається про життя і творчість найвидатніших математиків з часів Стародавньої Греції до початку XVIII століття. Короткі підсумкові зауваження та довідки про математиків, яким не присвячено окремих нарисів, допоможуть зрозуміти наступність математичних ідей, побачити глибокі зв'язки в творчості вчених різних часів і народів. Розрахована на учнів старших класів. Буде корисною і організаторам позакласної роботи та всім, хто цікавиться математикою.

$К\ \dfrac{4802020000-242}{М210(04)-82}\ 361-82$ 22.1г

АНДРЕЙ ГРИГОРЬЕВИЧ КОНФОРОВИЧ

Колумбы математики
(на украинском языке)

Издательство «Радянська школа».
252053. Киев, Ю. Коцюбинского, 5.

Зав. редакцією математики *О. П. Бондаренко*.
Редактор *Н. І. Литвиненко*. Літредактор *Л. П Фалінська*. Художній редактор *В. Ф. Монжеран*. Технічний редактор *Ж. А. Головіна*. Коректор *Г. П. Наказнюк*.

Інформ. бланк № 2867

Здано до набору 23.07.81. Підписано до друку 31.03.82. БФ 04175. Формат 70×100/32. Папір офсетний № 1. Гарнітура літературна. Спосіб друку офсетний. Умовн. арк. 9,1+0,32 вкл.+0,16 форз. Обл.-видавн. арк. 9,11+0,32 вкл.+0,36 форз. Тираж 80 000. Видавн. № 27611. Зам. № 1—211. Ціна 50 к.

Видавництво «Радянська школа»,
252053, Київ, Ю. Коцюбинського, 5.

Діапозитиви тексту виготовлено на Головному підприємстві РВО «Поліграфкнига». Надруковано на київській книжковій фабриці «Жовтень». 252053, Київ, 53, Артема, 25.


Тбілісі
Біруні
Хорезмі
Самарқанд
Ашхабад
Омар Хайям
Нішапур
Бағдад
Делі
Бомбей
Аден